カー・ブラックホールの幾何学

B. オニール著／井川俊彦＝訳

The Geometry of Kerr Black Holes

ＡＫピータース・トッパン 数理科学シリーズ―9

For HJE

まえがき

本書の主題はカー時空の大域幾何学である．カー時空というのは，中心に質量が置かれた回転する重力場の相対論的なモデルである．カーが求めた重力方程式の解は，質量Mと単位質量当たりの角運動量 a をパラメータとする時空の族を与えている．特に $a = 0$ とすると，回転をしていないということでシュワルツシルド時空に帰着する．本書でも，カー時空と，特別な場合としてのシュワルツシルド時空を対比して考えることにする．

本書は5つの章で構成されており，そのうち中に挟まれた3つの章でカー時空を考える．最初の第1章では，全体の準備として，本書で必要となる事項を概説する．最後の第5章では，ペトロフ・タイプと零的測地線叢について紹介するが，もちろん，具体例としてはカー時空を念頭に置いている．これには，カー時空の位置づけを時空全体の中で眺めてみる，という意図もある．これらを両端に据え，第2章ではカー計量の基本的な幾何学を解説する．第3章では，カー時空を解析的に最大拡張して，その大域構造を述べる．第4章は(これがいちばん長い章であるが)カー測地線について論究する．各章の始めには，その章のまとめを付けてある．

本書の目的は，題名どおり，カー時空の幾何学を研究することである．つまり，曲率，測地線，等長写像，全測地的部分空間，位相構造，等々を調べる．これらの幾何学的不変量の物理的意味についても言及するが，本書の目的は〈物理をやる〉ことではない．物理学から見れば，カー時空というのは，天文学から量子重力理論までの，物理とその関連分野を展開する土俵ということになろう．

しかしながら，本書が興味を持っているのは，回転する星の内部ではなく，題名にあるとおり，最大拡張した(帯電していない)カー・ブラックホールそのものの研究なのである．カー時空には，ゆっくり回転している場合($a < \mathrm{M}$)と速く回転している場合($a > \mathrm{M}$)があり，それを分けているのが極限カー時空($a = \mathrm{M}$)である．速く回転しているカー時空は，物理的にも数学的にも，重要度は低い．これは，他の2つの場合に含めて考えることができる．極限カー時空は，例外的な場合であるが，より複雑なゆっくり回転している場合($a < \mathrm{M}$)への手がかりとして重要な意味を持っている．

ローレンツ幾何学(その中でも特に，正定値計量を持つリーマン幾何学との差違)に興味を持っている数学者は，たくさんの目新しい話題をカー時空の中に見出すはずである．例えば次のようなものがある．(1) 因果律．ベクトルや測地線が，空間的，時間的，零的に分かれること．(2) 局所的に定義した計量を，解析的に最大に拡張すること．(3)〈特異点〉の存在．ペンローズとホーキングの定理によれば，ローレンツ幾何学においては，特異点が存在することは，異常なことではなく納得のいくことなのである．

本書の読者である学生や研究者の方々は，関心を持たれるテーマが様々であると思われるので，本書を読むのに準備として必要とする知識は最小限に止めてある．もちろん，筆者の前著 *Semi-Riemannian Geometry* (Academic Press 刊， 1983) を読んでおかなければならない，ということはない．本書は独立したものである．

カー時空の話を始めると多くの手法を使いたい誘惑にかられるのであるが，本書では 3 種類に制限してある．テンソル解析，微分形式，(第 5 章で使う) ニューマン−ペンローズ技法，の 3 種類である．カー解の表現も，これらの形を用いている．

筆者の知る限り，本書の結果の多くは新しいものである．特に，等長群の決定 (第 3 章 3.7 節,3.8 節), 位相構造の決定 (第 3 章 3.9 節), 測地線の軌道の解析 (第 4 章の 4.7 節から 4.10 節) は新しい成果である．この最後の結果については説明が必要であろう．最終的に目指しているのはカー測地線の分類である．つまり，単なる赤道面やカー時空の外部に限ることなく，最大に拡張されたカー時空における測地線の軌道を記述するのが目的なのである．そのために特に注目して**時間的測地線**を調べることにする．零的測地線は，より簡単な特別な場合として取り扱う．(純数学的対象である) 空間的な測地線は，いろいろな部分空間内でのふるまいから分かるように，かなり難しいところがある．

本書は，章と，その中を細分する節で構成されている．例えば，第 3 章の 6 節は 3.6 と書く．定理，補題，注意などは節の中で通し番号を付けてある．例えば，系 3.6.4 は，3.6 節の中の 4 番目であることを示している．系の中の 4 番目，ということではない (なおこれらとは別に，図の番号は，独立した通し番号になっている). 参考文献の参照は「著者，日付」の形で書いてある．

付録には，微分形式等の説明と，記号の一覧表を付けた．

本書に出てくる数式は手で計算したが, 複雑な計算のチェックにはコンピュータソフトの Mathematica (Wolfram Research 社) と Maple (Waterloo Maple Software 社) を用いた．微分形式の計算のチェックには Maple を用いた．Mathematica は，数値計算のチェックと図を描くのに使用した．

参考文献の表は，同時に，筆者が薫陶を受けた方々のリストでもある．そしてそれ以外にも，このリストと同じくらい多くの方々に助けていただいた．筆者の学生と先

生のみなさんである (もちろん，過去・現在，公式・非公式を問わない). これら全ての方々にお礼申し上げる．

序　章

長い間近代科学を発達させる起動力となっているのが，われわれの太陽系の解明である．ニュートンの大著プリンキピア・マテマティカは，彼が研究した重力と運動の法則をまとめたものであるが，ケプラー，コペルニクス，ガリレオなどの先人の集大成にもなっている．ニュートンの理論は科学界を越えた分野にまで大きな影響を与えたが，200 年が経過すると，ニュートン力学だけでは太陽系を説明できないことが明らかになってきた．それは小さいことであったが，決して無視できないことである．すなわち，水星の近日点の位置を計算すると，他の惑星の影響をすべて組み込んでも，100 年間に 43 秒の割合で観測値との間にズレが生じたのであった．

1915 年. ニュートンが理論の実証に用いたのは地球の周りを月が回ることであったが，アインシュタインが使用したのは水星の近日点の移動である．ここに一般相対性理論の原点があり，その理論はアインシュタインの方程式とよばれる $G = kT$ に結実されている．彼は，太陽の重力場についての精密なモデル等を必要とせず，この式を多項式による近似で計算し，43 秒のズレを解決したのである．

1916 年. アインシュタインがベルリンへ移ってから数週間後，彼はカール・シュワルツシルドから手紙を受け取った．シュワルツシルドは天文学者で，すでにそのとき若いとはいえない年齢であったが，ドイツの兵隊としてロシア戦線に行っていたのである．その地で彼は病気になり，まもなく死んでしまう．それでも，相対性理論の精緻なモデルを作り上げる時間は残されていた．このシュワルツシルド時空は，ニュートンのモデルに代わって，孤立した球対称の星における重力場を記述する最適なモデルであった．しかしながら，相対性理論はほとんど知名度がなく，それを実証するにも，地上に束縛された実験室では不可能なのであった．

1920 年代. 第一次世界大戦が終了すると早速，天文学を使って相対性理論を実証する試みが始まった．有名なのは，イギリスの物理学者アーサー・エディントンの観測である．これは，太陽に近い星と離れた星を観測し，アインシュタインが予言したように，重力が光を〈曲げる〉かどうかを調べたのである．この成功により，相対性理論は脚光を浴び，多くの科学者がこの理論に興味を示し，この 10 年間で天文学と相対

性理論は急速に発展した．

重要な研究分野は星の進化であった．太陽のような普通の星は，核燃焼によって重力崩壊するのを防いでいる．燃料がなくなれば，星は収縮し，ついには白色矮星になる．これは，大きさが地球程度で質量は太陽くらいの星である．つまり，1 辺数センチの立方体の重量が何千トン，という密度なのである．

1931 年. 初めて白色矮星の内側の相対論的モデルを作ったのは，天文学者の S. チャンドラセカールである．彼の計算によると，質量と半径の関係は簡単な曲線になる．おどろいたことに，質量が大きくなるほど半径は小さくなってしまう．質量が太陽の 1.2 倍以上の場合には，半径は非常に小さくて星は不安定になる．さらに崩壊が進行するのである．

1934 年. W. バーデと F. ツウィッキーは，崩壊が進むと，陽子と電子に分かれた状態を保つことができずに中性子で安定し，中性子星になるという理論を作った．直径 16km 程度までに収縮し，とほうもない密度になるのである．一般相対性理論は，白色矮星の研究には便利なものであったが，超高密度の中性子星の研究には必要不可欠となる．もはやニュートン力学は適用できないのである．

1939 年. 理論的に初めてブラックホールが登場したのは，ロバート・オッペンハイマーと H. スナイダーの論文である．彼らはこう書いている．「熱核エネルギー源が使い尽くされると，非常に重い星は崩壊する．何らかの理由で星の質量が太陽の質量程度に減少しなければ，この収縮は無限につづくであろう」... そして収縮を続け，白色矮星よりも中性子星よりも小さくなり，外界と切り離されたものになるのである．

ブラックホールの発見により，星の内部に関するシュワルツシルド・モデルが再度注目されるようになった．それまでは，シュワルツシルド半径 $r_* = 2M$ の数値はモデルの単なる特異点であり，大した意味はない，と考えられていた．例えば，直径 700,000 km の太陽では，シュワルツシルド・モデルから計算される特異点の数値は $r_* = 3$ km となる．しかしながらブラックホールの場合には体積が十分に小さくなるので，この半径は，特異点というよりも，そこからは何も，光さえも出てこない〈地平線〉とみなすべきである，という考え方が次第に出てきたのである．

1954 年. この年，若い物理学者 A. Z. ペトロフによる時空の分類が The Reports of the State University of Kazan という雑誌に掲載された (Kazan(カザン) というのは，ロシアのモスクワの東 480km の所に位置する都市である). 内向き，および外向きの光線の特徴で言えば，シュワルツシルド時空はペトロフ・タイプの D 型に分類される．ペトロフ・タイプは，その重要性が理解されるまでに時間がかかったが，次の発展への大きな足がかりなのであった．

星は回転している．太陽のように回転速度が遅い星の場合は問題ないが，星が崩壊

するとき，角速度は保存されるので回転の速度は増加する．例えば中性子星の回転速度は膨大なものになっている．パルサーは，このように回転する中性子星だと考えられているのである．

しかしながら，シュワルツシルド時空を作る理論上の星は回転していない．1915 年に，この静止モデルはわずか数週間で作られた．そこで，回転している場合も容易に作れるだろう，と考えられたのであるが，成功しないまま時が過ぎてしまった．

1963 年. 英国で教育を受けたニュージーランドの物理学者ロイ・カーは，その当時テキサス大学にいたが，巧妙な方法を使った．彼は，シュワルツシルド時空がペトロフ・タイプの D 型であることを念頭において，ややこしい回転モデルを直接作ることをせず，D 型の計量テンソルを代数的に研究したのである．そして，長いこと探していた計量が発見された．

カーの論文は 1 ページ半の短いものであったが，2 年後に詳細な計算が発表された．

1967 – 1968 年. R. H. ボイヤーと R. W. リンキストは，巧妙な座標系を導入してカー時空の研究を容易にした (1967 年). 現在，この座標系には 2 人の名前が付いている．その論文の中でさらに彼らは，最大に拡張されたカー時空を発見し，その測地線に言及した．だが，カー測地線の完全な研究には，ケンブリッジ大学でステファン・ホーキングの学生であったブランドン・カーターが開発した，測地線に関する第 1 積分が必要であった (1968 年). この手法は，現在でも，カー時空の大域的性質を研究するのに最適な方法なのである．

1968 – 1975 年. 1960 年代以降の理論と天文学の発展は，ブラックホールの存在を確かなものにしてきた．銀河の中心で多くの星が崩壊する場合の巨大なブラックホールや，ビッグバンのすぐ後にできた小さいブラックホールなども考えられている．単一の星が崩壊する場合でも，星の物理的特性はいろいろなので，様々なブラックホールの可能性がある．しかしながら，ワーナー・イスラエル，ブランドン・カーター，ステファン・ホーキング，デビット・ロビンソンらの研究結果によると，崩壊するにしたがって物理的特性は失われてゆき，最後の状態は質量と回転の比だけで決定されることになる．それゆえ，カーのモデルは，ブラックホールの研究に重要な位置を占めているのである．

訳者前書き

本書は B. O'Neill 著 *The Geometry of Kerr Black Holes* の翻訳である．実はこの『カー・ブラックホールの幾何学 (オニール著)』という語の中に本書の特徴が全て含まれている．このことを説明しておく．

第 1 の特徴は，テーマがカー・ブラックホールである，ということにある．1 つの状況を極端にしてみよう，というのは研究の常套手段であるが，重力についてもこれが考えられた．非常に重力が大きい場合はどうなるか，というわけである．したがって，一般相対性理論が開発されるや，この問題にそれが応用されたのは当然といえよう．そして，星が重力崩壊してブラックホールとなるときの最終時空として，シュワルツシルド解やカー解が得られた．カー時空は，シュワルツシルド時空に回転を加えたもので，エルゴ球等，興味深い事物が豊富にある．一方において，宇宙検閲仮定を設定すると最終時空はカー時空に帰着する，という唯一性定理が証明された．すなわちカー時空は，ブラックホール時空の中でもきれいなものであり，同時に研究事項も豊かである，というすぐれた特徴を持っているのである．この瀟洒と豊饒を数学の分野で例えれば，ランク 1 のコンパクト対称空間ということにもなろう．テーマとして十分過ぎるものである．

第 2 の特徴は，幾何学の本，ということである．相対性理論の言語が微分幾何学であるため，物理学者がブラックホールの研究に着手するには，先ず，これを勉強しなければならない．といって，数学者と同じ勉強をしていては物理に辿り着けない．なにしろ，目的は相対論の研究，微分幾何学はその道具にすぎない，なのである．それで，相対性理論を取り扱った書籍では，微分幾何学の解説に多くの頁が割かれることになり，書き方も，〈道具〉としての角度から見た〈ダイジェスト〉ということになる．だが，数学から見るとここに〈違和感〉を感じる．また，テンソルや微分形式を縦横に用いてブラックホールの解析が進行すれば，数学の立場からも興趣が沸く．解明された現象やその過程で得られた式にどのような数学的意味があるのか，研究素材には事欠かない．それで物理の論文を見ることになるのだが，幾許かの違和感があり，読み辛い思いをすることがある．目的は数学なのだから物理的な装飾はいらない，とい

う感が否めない．そして本書は，カー・ブラックホールを数学的に整備・記述・展開したものであり，このような違和感に捕らわれることはないのである．

第3の特徴として，著者がオニールである，ということを述べておかなければならない．彼は，部分空間や沈め込みの理論で有名な数学者であるが，同時に，*Elementary Differential Geometry, Semi-Riemannian Geometry* という2冊のすぐれた教科書の著者でもある．研究者として優秀であることと教育者としてすぐれている事は，同一ではない．つねにアイデアが湧き出る天才的な学者にとっては，教科書を作るなぞ時間の無駄と考えるかもしれない．また，一代の碩学たる大学者が既知の事項を本にするとなれば，(彼が誠実であればあるだけ) 膨大な巻となるであろう．その分野の資産としては有り難いものだが，教科書としては読み難いものである．やはり教科書というのは，質・量ともに手頃で，読者をして読み易さを感じさせ，読後には必要十分な知識を与え，さらなる知的探求心を喚起させるものでなければならない．オニール氏は，研究者・教育者両方の資質を兼ね備えている．本書は，その彼がまとめ上げた，過不足ないコンパクトかつ完備な内容となっている．

以上のようなわけで，本書は，微分幾何学の基礎を学んだ後，相対性理論関連の方向を目指す人々にとり最適なものである．学部上級生，大学院生，研究者の方々の勉強・研究の一助になれば，訳者としてこれに勝る喜びはない．

翻訳にあたっては,『数学辞典』(岩波書店),『理化学辞典』(岩波書店),『天文・宇宙の辞典』(恒星社) を中心にし，適宜恣意も入れて訳語を決定した．例えば,〈metric〉は，物理学では〈メトリック〉とすることが多いが，本訳では，数学でよく使われるいい方の〈計量〉と訳出した．また，文意に応じて作成したものもある．例えば〈特異点〉．本書においては，式の特異点ではあるのだが，検討対象はそれが与える領域なので，敢えて〈特異領域〉とした．このような作意の当否，訳者の非力による誤訳，不注意による過誤，等々，気にかかる事は多い．読者諸兄の御叱責を待つ次第である．なお，本文中に引用されている『鏡の国のアリス』の文章は生野幸吉訳　福音館書店刊に依る．

本訳の完成に御尽力された株式会社トッパンの方々に厚くお礼申しあげる．吉川直身氏には陣頭で指揮を頂き，編集部の岡田佐智子氏には最前線で印刷会社と訳者の間を行き来していただいた．さらに，山本幸男氏からは，終始変わらぬ激励を頂戴した．また，複雑な数式や図に溢れた原稿をいとも容易に組み上げられた東京書籍印刷株式会社プリプレス部の平峯勉氏にも感謝する．本書のデザインを担当されたのは菊池薫氏である．著名な氏の作品で本書が装丁できて望外の喜びである．もちろん，訳者の

様々な疑問に答えてくれた原著者のバレット・オニール氏にも深謝しなければならない．そして，謝辞の取りには大槻富之助先生の名前を記すことになる．先生のお陰でここまで辿り着けたのである．

１９９６年１１月
井川俊彦

目　　次

第1章
背景

本章では，後の章で必要となる事項を簡単に述べておく．つまり，多様体論，テンソル解析，微分幾何学，一般相対性理論，微分形式，等について説明する．説明の詳しさは事項ごとに異なっている．本書以外からでも簡単に知識が得られる事項については簡潔に書いてある．例えば，多様体論については，定義と記号の解説だけで済ましてある．一方，解析的多様体の拡張については，成書で見かけることも少なく，カー時空の構成に不可欠な事項なので詳しく記してある．

テンソル解析 (1.2 節と 1.3 節) は，微分幾何学と相対性理論の言語として広く使われているものである．これには，座標を明示する方法としない方法がある．また，カルタン流の微分形式の手法 (1.8 節と付録B) もよく使われるもので，一般の多様体はもちろん，特にカー時空の曲率を計算するには便利なものである．知名度は低いがニューマン－ペンローズの技法 (第 5 章) というものもある．これは，時空の曲率と測地線の関係を解析するのに有効な手段となる．

1.1　多様体

ごくおおまかに言うと，多様体というのは，局所的にはユークリッド空間 R^n と見なすことによって，解析学を展開することができる空間である．なお，R^n の解析学は既知とする．R^m の開集合 $\mathcal{U}$ から R^n の中への写像 $\phi = (f_1, \ldots, f_n)$ は，各実数値関数 f_i が何回でも連続的偏微分可能であるとき，**滑らか** (smooth) (あるいは，**無限回連続微分可能** (infinitely differentiable), C^∞ **クラス**) である，と言う．

多様体と座標系

位相空間 S における n 次元**座標系** (coordinate system) と言うのは，S の開集合 $\mathcal{U}$ から R^n の開集合 $\xi(\mathcal{U})$ への同相写像 ξ のことである．この開集合 $\mathcal{U}$ を，ξ の**座標近傍** (coordinate neighborhood) と呼ぶ．また，$\mathcal{U}$ で $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$ となるとき，この実数値関数 x^i を**座標関数** (coordinate function) と呼ぶ．

n 次元の**滑らかな多様体** (smooth manifold) M というのは，ハウスドルフ空間で，n 次元座標系の集まり $\mathcal{A}$ (これを**滑らかなアトラス** (smooth atlas) と言う) を持ち，以下の条件を満たすものである．

1. 全ての $\xi \in \mathcal{A}$ に対する座標系の集まりが M 全体を覆う．
2. 2つの $\xi, \eta \in \mathcal{A}$ は**滑らかに重なり合う**．すなわち，合成写像 $\xi \circ \eta^{-1}$ は，普通のユークリッド空間の意味で，滑らかである．

代表的な多様体の例としては，n 次元**ユークリッド空間** (Euclidean space) R^n と n 次元**球** (sphere) S^n がある．R^n の場合では，恒等写像が1つだけでアトラスとなっている．S^n の場合は，2個の立体射影で S^n を覆っている．多様体の開集合は，自然な方法で，それ自身多様体となる．2つの多様体 M と N の直積 $M \times N$ は，座標系の積 $\mathcal{U} \times \mathcal{V} \to R^m \times R^n$ を座標系として多様体になる．いま，$\xi = (x^1, \ldots, x^m)$，$\eta = (y^1, \ldots, y^n)$ とするとき，$M \times N$ から M と N への射影を省略して，$\xi \times \eta = (x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^n)$ と書くことにする．

アトラス $\mathcal{A}$ に対して，その中の座標系と滑らかに重なり合う座標系があるならば，それも $\mathcal{A}$ に取り入れて，$\mathcal{A}$ を広げることにする．例えば，普通の直交座標系で定義された R^2 に，極座標系等も取り入れるのである．

滑らかな写像

多様体間の写像 $\psi: M \to N$ は，任意の座標系で表した $\zeta \circ \psi \circ \xi^{-1} = (f_1, \ldots, f_n)$ がユークリッド空間の意味で滑らかなとき，**滑らか** (smooth) である，と定義する．簡単にいえば，点 $\psi(p)$ の座標系 ζ が，点 p の座標系 ξ に，滑らかに依存しているのである．もちろん特別な場合として，滑らかな実数値関数 $f: M \to R^1$ も矛盾なく定義できる．M 上の滑らかな実数値関数 f の全体 $\mathfrak{F}(M)$ は，普通の意味で関数間に和と積を定義して，可換環となる．

微分同相写像 (diffeomorphism) $\psi: M \to N$ とは，滑らかな写像で，逆写像 ψ^{-1} も滑らかなものである．このとき，Mと N は**微分同相** (diffeomorphic) である，という．2つの多様体が微分同相であるならば，多様体論の立場からは，その2つの多様体は同一であると見なすのである．

接ベクトル

多様体論では接ベクトルの定義が重要である．その原理はベクトルの方向微分にある．多様体 M の点 $p \in M$ における**接ベクトル** (tangent vector) とは，R 線形写像

$v: \mathfrak{F}(M) \to R$ で，ライプニッツの法則

$$v[fg] = v[f]g(p) + f(p)v[g], \qquad f, g \in \mathfrak{F}(M)$$

を満たすものである．多様体 M の点 p における接ベクトルの全体を $T_p(M)$ と表し，M の点 p における**接空間** (tangent space) と呼ぶ．これは，(1) 実数によるスカラー倍，(2) ベクトルどうしの和，を与えることによってベクトル空間となる．以下に述べることからも分かるように，点 p における接ベクトルは，その点を始点とする矢印と考え，$T_p(M)$ は M の線形近似と考えれば理解しやすい．簡単な例としては，R^3 内の曲面 M に接する平面を考えればよい．

ξ を多様体 M の座標系とする (つまりアトラスの元である)．この座標系 ξ 内の点 p において，n 個の接ベクトル$\partial_1|_p, \ldots, \partial_n|_p$ を

$$(\partial_j|_p)[f] = (\partial f / \partial x^j)(p)$$

で定義する．この右辺において，f は，関数の**局所座標による表現 (coordinate expression)** $f \circ \xi^{-1}, f = (f \circ \xi^{-1})(x^1, \ldots, x^n)$ を意味しており，偏微分は，ユークリッド空間における i 番目の変数による普通の偏微分である．この**座標ベクトル (coordinate vector)** $\partial_j|_p$ は，ξ の座標曲線の接線と考えればよい．

次の定理は，各点において，座標ベクトルが接空間の基底をなすことを示しており，よく使うものである．(以下，特に断らないかぎり M の次元は n とする)

定理 1.1.1(基本定理)　点 p の 近傍 $\mathcal{U}$ における座標系を $(x^1, \ldots, x^n)$ とすると，接ベクトル $v \in T_p(M)$ は $v = \Sigma_j v[x^i]\partial_j|_p$ と書ける．

接空間 $T_p(M)$ の全体は，次に構成する方法により，多様体となる．これを M の**接バンドル** (tangent bundle) といい TM と書く．ベクトル $v \in T_p(M) \subset TM$ を p に写すことで**射影** (projection) $\pi: TM \to M$ を定義する．M の近傍 $\mathcal{U}$ の座標系を $(x^1, \ldots, x^n)$ とするとき，任意の v に対して，$\dot{x}^i(v) = v[x^i]$ によって　写像 $\dot{x}^i: \pi^{-1}(\mathcal{U}) \to \mathcal{R}$ を定義する．このとき，$(x^1, \ldots, x^n, \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n): \pi^{-1}(\mathcal{U}) \to R^{2n}$ が TM の座標系となる．

曲線

開区間 $I \subset R$ (この区間の端が無限大の場合も含む) から多様体 M への滑らかな写像 α を M 上の**曲線** (curve) という．各 $s \in I$ に対し，曲線の**接ベクトル** (tangent

vector) とは $\alpha'(s) = (d\alpha/ds)(s)$ のことである．これは，任意の $f \in \mathfrak{F}(M)$ に対して

$$\alpha'(s)[f] = \frac{d(f \circ \alpha)}{ds}(s)$$

とすることで，点 $\alpha(p)$ における M の接ベクトルとなる．

簡単のため，特に断らないかぎり，幾何学量 (つまり，曲線や実数値関数，等々) は全て滑らかであるとする．この〈滑らか〉を定義する方法はいろいろあるが，ここでは次の一般的な定義を採用する．すなわち，ある幾何学量 X を任意の座標で表現したとき，それがユークリッド空間における意味での滑らかな関数で構成される場合，X は**滑らか** (smooth) である，という．

微分写像

写像 $\psi: M \to N$ を考える．これに対し，M の各点 p において，ψ の点 p における**微分写像** (differential map), と呼ばれる線形写像 $d\psi|_p: T_p(M) \to T_{\psi(p)}(N)$ を，任意の $v \in T_p(M)$ と $g \in \mathfrak{F}(M)$ に対して，

$$d\psi(v)[g] = v[g \circ \psi]$$

で定義する．

各点 $p \in M$ で微分写像を与えれば，接バンドル間の写像 $d\psi: TM \to TN$ となる．そこで，添字の p を省略して $d\psi$ と記すことにする．

微分写像 $d\psi$ は，**接線を保存する** (preserve tangents), と特徴づけることもできる．つまり，いま α を M の曲線とするとき，$d\psi$ は，各接ベクトル $\alpha'(s)$ を，N における像曲線 $\psi \circ \alpha$ の接ベクトル $(\psi \circ \alpha)'(s)$ へ移しているのである．

ベクトル場

多様体 M 上の**ベクトル場** (vector field) V とは，各点 p に接ベクトル V_p を対応させる関数である．ベクトル場を直感的にとらえるには，力の場や定常流体の速度を思い浮かべればよい．M 上のベクトル場の全体 $\mathfrak{X}(M)$ は，各点ごとに，接ベクトルの和を作ることで和を定義し，関数 $f \in \mathfrak{F}(M)$ による積でスカラー倍を定義して，M 上の加群となる．

接ベクトルの定義から，ベクトル場 V とは，$f \to Vf$ で定義される微分作用素である，と見ることができる．ここに Vf は，点 $p \in M$ において $(Vf)(p) = V_p[f] \in R$ となる実数値関数である．V は滑らかであるから，f が滑らかならば fV も滑らかとなる．したがって，V は環 $\mathfrak{F}(M)$ 上の**微分** (derivation) となる．

座標系でベクトル場を書けば，基本定理から $V = \Sigma V[x^i]\partial_i$ となる．これは，上記のようにベクトル場を定義した場合と，$V^i = Vx^i$ を満たす n 個の関数の集まりとしてベクトル場を定義するテンソル表示 (1.2 節) とを結びつける基礎となる式である．

2 つのベクトル場 V , W に対して新しいベクトル場 $[V, W]$ を対応させる作用を，任意の $f \in \mathfrak{F}(M)$ に対して

$$[V, W]f = V(Wf) - W(Vf)$$

が成立することで定義する．これは，重要な公式であり，V と W の**リー括弧積** (Lie bracket) と呼ばれる．リー括弧積は，実数上の歪対称な双線形写像で，**ヤコビ恒等式** (Jacobi identity)

$$[U, [V, W]] + [V, [W, U] + [W, [U, V]] = 0$$

を満たす．基礎数学の範囲では，座標ベクトル場に対して $[\partial_i, \partial_j] = 0$ となる (この事実は，偏微分の順序が交換可能であることから証明できる) ので，括弧積は登場しない．

積分曲線

多様体 M 上のベクトル場 V は，微分方程式である，と考えることもできる．この微分方程式の解曲線を α とすると，α の各点における接線が V で与えられている，つまり，任意の $s \in I$ に対して

$$\alpha'(s) = V_{\alpha(s)}$$

となっているのである (この α を**積分曲線** (integral curve) という). 座標系で

$$V = \Sigma V^i \partial_i, \qquad V^i = Vx^i,$$

と置くと，

$$\alpha'(s) = \Sigma\alpha'(s)[x^i]\partial_i = \Sigma d(x^i \circ \alpha)/ds)\partial_i$$

と書けるので，上記の微分方程式は線形常微分方程式系

$$\frac{d(x^i \circ \alpha)}{ds} = V^i(x^1, \ldots, x^n), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

となる．(V は滑らかであるから) 微分方程式の解の存在と一意性に関する定理を使うと，M の各点 p の近傍において，$\alpha_p(0) = p$ を満たす積分曲線が，局所的に一意に存在することが分かる．2 つの積分曲線 α と β が重なり合うのは，パラメータの変換で移り変わる場合，つまり $\beta(s) = \alpha(s + c)$ となる場合だけである．

ベクトル場 X は，その各積分曲線が実数全体で定義できるとき，**完備** (complete) である，という．いま X を完備とする．このとき，任意の $s \in R$ に対して，点 $p \in M$ を点 $\alpha_p(s) \in M$ まで〈流す〉写像 $\psi_s: M \to M$ が定義できる．明らかに，$\psi_0 = id$ で，任意の s, t に対して $\psi_{s+t} = \psi_s \circ \psi_t$ となる．また，逆写像 ψ_{-s} も滑らかであるから，ψ は微分同相写像である．この写像の全体 $\{\psi_s: s \in R\}$ を X の**流れ** (flow) という．

もし X が完備でなければ，流れは局所的にしか定義できない．つまり，各点 $p \in M$ に対して，点 p の近傍 $\mathcal{U}$ と実数 $\epsilon > 0$ が存在し，各 $q \in \mathcal{U}$ にについて，α_q は $(-\epsilon, \epsilon)$ でのみ定義できるのである．よって，上記の性質を満たす写像 $\psi_s: \mathcal{U} \to M$ が定義できるのも局所的な範囲のみである．

1 形式

多様体上の1形式とは，ベクトル場に双対する量である．M の点 p において，接空間 $T_p(M)$ の双対空間を $T_p(M)^*$ と置く．$T_p(M)^*$ の元は $T_p(M) \to R$ で定義される線形写像であり，これを **コベクトル** (covector) と呼ぶ．M 上の1**形式** (one-form) θ とは，コベクトルの場，すなわち，M の各点 p にコベクトル $\theta_p \in T_p(M)^*$ を対応させる関数である．$\mathfrak{X}(M)$ の場合と同様に，M 上の (滑らかな) コベクトル場の集合 $\mathfrak{X}^*(M)$ は，各点ごとに，和を作ることで和 $\theta + \omega$ を定義し，スカラー倍 $f\theta$ を定義して，$\mathfrak{F}(M)$ 上の加群となる．

ベクトル場 $V \in \mathfrak{X}(M)$ と1形式 $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ から，各点 $p \in M$ で $(\theta V)(p) = \theta_p(V_p)$ として，関数 $\theta V = \theta(V) \in \mathfrak{X}(M)$ が作られる．

関数 $f \in \mathfrak{F}(M)$ から，任意の接ベクトル v に対して $(df)(v) = v[f]$ として，f の**微分** (differential) と呼ばれる1形式 df が作られる．この優雅 (かつ実用的) な定義により，初等解析学ではあいまいのままにされた dx の意味が明確になったわけである．

基本定理の双対を次のように述べることができる．ある座標系において，**座標1形式** (coordinate one-form) $dx^1, \ldots, dx^n$ を用いて，1形式は $\theta = \Sigma\theta(\partial_i)dx^i$ と表すことができる．(証明は，式の両辺に ∂_i を代入すればよい.)

特に，$(df)(\partial_i) = \partial_i(f) = \partial f/\partial x^i$ であるから，よく知られた公式 $df = \Sigma\partial f/\partial x^i dx^i$ を得ることができる．

滑らかなファイバー・バンドル

ファイバー・バンドルの概念は，カー時空を理解するのに重要なものであるので，ここで一般的な定義を与えておく．まず，リー群 G の多様体 F への**左からの作用** (left action) とは，$G \times F$ から F への滑らかな写像 $(g, q) \to gq$ で次を満たすものである．

F の任意の点を q とするとき，任意の $g_1, g_2 \in G$ に対して $g_1(g_2(q)) = (g_1 g_2(q))$ が成立し，G の単位元 e に対して $eq = q$ が成立する．この定義から，$g \in G$ に対して写像 $\lambda_g: F \to F$ を考えると，これは，点 q を gq へ移す写像であり，逆写像 $\lambda_{g^{-1}}$ も存在するから，微分同相写像になっている．もし $\lambda_g = id$ ならば $g = e$ である，となるとき，この作用は**効果的** (effective) であると呼ぶ．リー群については，Helgason (1978), Warner (1983)　等を参照せよ．

カー時空に応用する場合には，G は円群 S^1 であり，2 次元球 S^2 を z 軸の周りに回転させる，という効果的な作用を考える．つまり，$S^2 = \{v \in R^3: |v| = 1\}$ に対して，〈角度〉 $\alpha \in R$ の回転 R_α を

$$R_\alpha(x, y, z) = (x \cos\alpha - y \sin\alpha, x \sin\alpha + y \cos\alpha, z)$$

で与えるのである．

ファイバー・バンドルは積多様体の拡張である．積多様体 $B \times F$ では，B への射影 π はそのままで，ファイバー $b \times F$ は，大域的にねじれている場合も考慮に入れていた (例えば，メビウスの帯においては，帯の真ん中の円が B となる). ファイバー・バンドルは，局所的に積多様体と考えられるもので，大域的なねじれに相当するのが，リー群の作用になっている．

つまり，滑らかな写像 $\pi: E \to B$, リー群 G の多様体 F への (上に述べた意味の) 作用，それに次の 1, 2 の条件を満たす関数 ϕ の集合 Φ の組を**滑らかなファイバー・バンドル** (smooth fiber bundle) という．

1. 局所的に積となる条件： 各 $\phi \in \Phi$ は，$\mathcal{U}$ を B の開集合として，点 $q \in F$, $b \in \mathcal{U}$ に対して $\pi(\phi(b, q)) = b$ を満たす微分同相写像 $\mathcal{U} \times F \to \phi^{-1}(\mathcal{U})$ である．
2. 共通部分の条件： 2 個の写像 $\phi, \psi \in \Phi$ が B で共通部分 $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ を持つなら，任意の $b \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ と $q \in F$ に対して

$$\psi(b, q) = \phi(b, \lambda_{\gamma(b)}(q)), \qquad b \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V},\ q \in F$$

を満たす滑らかな写像 $\gamma: \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \to G$ が存在する．

ファイバー・バンドルにおいて，π を**射影** (projection), E を**全空間** (total manifold), B を**底空間** (base), F を**ファイバー** (fiber), G を**構造群** (structural group), Φ を**バンドルの座標系** (bundle coordinate system), と呼ぶ．

ファイバーが R^n で構造群が一般線形群であるものを (実) **ベクトル・バンドル** (vector bundle) と呼ぶ．多様体 M 上の接バンドル TM はベクトル・バンドルの例である．この場合 $\pi: TM \to M$ で，$\{x^1, \ldots, x^n\}$ を M の座標系とするとき，$\phi(b, q) = \Sigma q_i(\partial_i|_b)$ がバンドルの座標系となる．

円座標

このようにして多様体が定義されてしまえば，座標系を与える写像 η の値域を，R^n ではなくて別な n 次元多様体 Q にすることで，新しい多様体 M を構成することが可能となる．(Q の普通の座標を通して M に座標を入れるわけである.)

例えば，平面 R^2 における極座標 $(r\ ,\ \vartheta)$ を考える．これは，R^2 $-$ (半直線) での座標系とすることができる．いま，ϑ を，S^1 への写像とする．そして，$Q = R^1 \times S^1$ とすれば，(r, ϑ) が R^2 $-$ (半直線) の座標系となるのである．このように拡張しておくと便利なことが多い．

滑らかと解析的

多様体 M の滑らかなアトラス $\mathcal{A}$ において，関数 $\xi \circ \eta^{-1}$ が普通のユークリッド空間における意味で解析的である，つまり，収束するベキ級数で表される，とする．このとき $\mathcal{A}$ を**解析的アトラス** (analytic atlas), M を**解析的多様体** (analytic manifold) と呼ぶ．例えば，R^n や S^n は解析的である．

解析的関数は滑らかであるので，解析的多様体は滑らかな多様体でもある．したがって，解析的の場合には滑らかな構造を改めて定義する必要はない．解析的多様体 M 上の量は，それを (解析的な) 座標系で表現すると収束するベキ級数で与えられるとき，解析的であるという．

解析的という性質には次のような強力な剛性がある．M を連結とする．もし 2 つの解析的写像 $M \to N$ が M のある開集合 $\mathcal{U}$ で一致するなら，M 全体で一致している．いい換えると，$\mathcal{U}$ で定義された解析的写像は，M 全体に唯一の方法で拡張できるのである．滑らかという性質だけでは剛性が無いことは簡単な例から分かる．

1.2　テンソル

テンソルを定義する方法はいろいろある．ここではまず簡潔に，多様体 M 上のテンソル場を，座標系によらない方法で定義する．

座標によらない定義

M 上のベクトル場の全体を $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(M)$, 1 形式の全体を $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{X}^*(M)$, とする．これらは，$M$ 上の実数値関数の全体 $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(M)$ 上の加群である．

定義 1.2.1　r, s を，ゼロではない非負の整数とする．M 上で与えられた (r,s) 型の(滑らかな) **テンソル場** (tensor field) A とは，M 上の双線形写像

$$A\colon \underbrace{\mathfrak{X}^* \times \ldots \times \mathfrak{X}^*}_{r} \times \underbrace{\mathfrak{X} \times \ldots \times \mathfrak{X}}_{s} \to \mathfrak{F}$$

のことである．

また，関数 $f \in \mathfrak{F}$ は $(0,0)$ 型のテンソルである，とする．

上記の定義から，(r,s) 型のテンソル A は，1 形式 $\theta^1, \ldots, \theta^r$ とベクトル場 $X_1, \ldots, X_s$ に対して実数値関数 $A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)$ を定め，また，各変数において $\mathfrak{F}$ 上の線形になっていることが分かる．すなわち，

$$A(\theta^1, \ldots, f\theta^i, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) = fA(\theta^1, \ldots, \theta^i, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)$$

のように，関数 f は前に出るのである．M 上の (r,s) 型テンソルの全体を $\mathfrak{T}^r_s = \mathfrak{T}^r_s(M)$ と表すことにする．これは，普通どおりに和と関数倍を定義して，$\mathfrak{F}$ 上の加群となる．

$\mathfrak{T}^0_1 = \mathfrak{X}^*$ が成立することはすぐ分かる．また，$X \in \mathfrak{X}$ を，1 形式 θ に関して $X(\theta) = \theta(X)$ で定義される関数 $\mathfrak{X}^* \to \mathfrak{F}$ と見れば，$\mathfrak{T}^1_0$ をベクトル場の全体 $\mathfrak{X}$ と同一視することができる．(これにより，ベクトル空間の間で同型 $V \approx V^{**}$ が得られている.)

テンソルの重要なもう 1 つの解釈を，具体例で述べておく．いま，$A\colon \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ を $\mathfrak{F}$ 上の双線形写像とする．このとき，$\boldsymbol{A}(\theta, X, Y) = \theta(A(X,Y))$ で定義される $\boldsymbol{A}$ は $(1,2)$ 型のテンソルで $\boldsymbol{A} \approx A$ となっているのである．次の節には，この解釈が自然に必要となる幾何学的に重要なテンソル場がたくさん登場する．なお，テンソルではない例として括弧積 $[\ ,\ ]\colon \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ の演算をあげておく．これは，実数に関しては双線形であるが，$[fX, Y] = f[X,Y] - YfX$ となるので，関数に関しては双線形ではない．したがって，括弧積はテンソルではないのである．

テンソルどうしの和が定義できるのは，型が同じ場合だけである．だが，テンソルの積は，任意の型どうしでも定義できる．例えば，A が $(1,1)$ 型，B が $(1,2)$ 型のとき，**テンソル積** (tensor product) $A \otimes B$ は，1 形式 θ , ω とベクトル場 X , Y , Z に関して

$$(A \otimes B)(\theta, \omega, X, Y, Z) = A(\theta, X)B(\omega, Y, Z)$$

で定義される $(2,3)$ 型のテンソルである．

テンソル積は，$\mathfrak{F}$ 双線形で結合的であるが，可換法則は一般には成立しない ($X \otimes Y \neq Y \otimes X$ なのである). しかし A が**共変** (covariant) テンソル (つまり $(0, s)$ 型) で B が**反変** (contravariant) テンソル (つまり $(r, 0)$ 型) のときには，可換法則が成立する.

古典的な方法

上で定義したテンソルを座標を使って表示するため，まず，添字を使った古典的な表現から説明する.

定義 1.2.2　$\mathcal{U} \subset M$ における座標系を $(x^1, \ldots, x^n)$ とする. この近傍において，テンソル $A \in \mathfrak{T}^r_s = \mathfrak{T}^r_s(M)$ の成分とは，実数値関数

$$A^{i_1,\ldots,i_r}{}_{j_1,\ldots,j_s} = A(dx^{i_1}, \ldots, dx^{i_r}, \partial_{j_1}, \ldots, \partial_{j_s})$$

である. ここに添字は，1 から $n = \dim M$ までを動くものとする.

この式から分かるように，上付の添字は**反変成分** (contravariant component), 下付の添字は**共変成分** (covariant component) を表わしている. 前に述べた座標を使わないテンソルの定義から上記を導くのは容易である. 例えば，$(1, 1)$ 型テンソル A では，1 形式 $\theta = \Sigma\theta_i dx^i$ とベクトル場 $X = \Sigma X^j \partial_j$ を作用させて

$$A(\theta, X) = \Sigma\theta_i X^i A(dx^i, \partial_j) = \Sigma A^i{}_j \theta_i X^j$$

となる.

約束　本書では，次のような弱い形の**アインシュタインの約束**を使うことにする. 和を表すシグマは書く. 繰り返して現れた添字について和を取ることとする. (常時ではないが) 普通は，繰り返しの添字は上付と下付のペアで現れる. 添字は，1 から $n = \dim M$ まで動くものとする. ∥

2 つの (r, s) 型テンソルの和の成分は，各成分の和である. テンソル積の成分も，各成分の積となる. すなわち，A が $(1, 2)$ 型テンソル，B が $(2, 3)$ 型テンソルのとき，テンソル $A \otimes B$ は $(2, 3)$ 型であり，その成分は

$$(A \otimes B)^{ij}{}_{k\ell m} = A^i{}_k B^j{}_{\ell m}$$

となる.

座標を使ってテンソルを定義するときは，それが座標系の取り方に独立であることをチェックしなければならないので，座標によらない形で定義するほうがよい．しかしながら，古典的な添字を使う方法では，テンソル式の両辺で上付添字と下付添字が一致していなければならない，というエラーのチェック機能があるので，明快さと柔軟さではこちらが勝っている．

標構場

古典的なテンソルの表現をさらに便利にするため，もう少し拡張する方法がある．テンソルを表すのに使う座標系の座標ベクトル場 $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ を，**標構場** (frame field) $\{E_1, \ldots, E_n\}$ へ変更するのである．この n 個のベクトル場 E_i は，ある領域 $\mathcal{U} \subset M$ の各点 p において，接空間 $T_p(M)$ の基底となっている．座標の微分 $dx^1, \ldots, dx^n$ も，$\omega^i(E_j) = \delta^i_j$ という関係で与えられる**双対 1 形式** (dual one-form) $\omega^1, \ldots, \omega^n$ へ変更する．1 形式 $\{\omega^i\}$ は $\{E_i\}$ の**余標構場** (coframe field) となる．したがって，任意のベクトル場 X に関して**双対公式** (duality formula) $X = \Sigma\omega^i(X)E_i$ を得る．

M のテンソル場の標構場に関する成分は，座標系に関する成分と同様に定義できる．例えば A を $(1,2)$ 型のテンソルとすると，これは，座標によらない定義では，$\mathfrak{F}(M)$ 上の双線形写像 $\mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ である．座標系を使うと，A の成分は $A^i_{jk} = A(dx^i, \partial_j, \partial_k)$ で与えられる．標構場では，A の成分は $A^i_{jk} = A(\omega^i, E_j, E_k)$ となる．テンソルどうしの和や積の成分も，座標系の場合と同じである．

このように拡張する利点の 1 つは，座標系よりも広い領域で標構場を定義することができる，という所にある．例えばトーラス T では，T 全体を覆うためには座標系が 4 つ必要だが，標構場なら 1 つですむ．

変換公式も，座標系の場合を標構場に置き換えればよい．ある領域 $\mathcal{U}$ において，標構場 $\{E_j\}$ と余標構場 $\{\omega^i\}$ の組と，標構場 $\{F_j\}$ と余標構場 $\{\theta^i\}$ の組があるとする．このとき，$\mathcal{U}$ において，$n \times n$ 行列値関数 A と B が存在し

$$F_j = \Sigma a_j{}^m E_m, \qquad \theta^i = \Sigma b^i{}_q \omega^q$$

となる．双対性から $\Sigma b^i{}_m a_j{}^m = \delta^i{}_j$ が成立する．特に座標変換ならば，この行列 A と B はヤコビ行列 $(\partial y^i/\partial x^j)$ と $(\partial x^i/\partial y^j)$ になる．

標構場の変換でテンソルの成分がどのように変換されるのかを調べるには，$(1,1)$ 型テンソル A の場合で確認すればよい．A が 標構場 $\{E_i\}$ に関して A^i_j という成分を

持つとすると，標構場 $\{F_j\}$ では

$$A(\theta^i, F_j) = A(\Sigma b^i{}_q \omega^q, \Sigma a_j{}^m E_m) = \Sigma b^i{}_q a_j{}^m A^q{}_m$$

となる．逆に，1組の関数が**テンソルの変換法則**を満たしているなら，それはテンソルを定義する．上記の例でいえば，$\{A^q{}_m\}$ に対して $A(\theta, V) = \Sigma A^q{}_m \theta_q V^m$ とすることで A が定義されるのである．このように定義したものが標構場の取り方に独立であることは，変換法則が保証している．

縮約

(有限次元ベクトル空間上で定義された) 線形写像 T において，T の行列を (A^i_j) とするとき，数 $\Sigma A^m{}_m$ を T の**トレース** (trace) という．この概念をテンソルに拡張すると次のようになる．標構場の表現で定義する．テンソル A の反変成分の添字と共変成分の添字を1つずつ選ぶ．この2つに対し，他の添字は無視して，前記のようにしてトレースを作るのである．(トレースは基底に依存しないので，この定義も標構場に独立したものである．) 例えば，A を $(2,3)$ 型テンソルとし，最初の反変成分 (上付) と2番目の共変成分 (下付) を選んでトレースを作る，とする．これで作られたテンソルは $\Sigma A^{mi}{}_{jmk}$ という成分を持つことになる．このテンソルを A の**縮約** (contraction) といい，$\mathrm{C}^1_2 A$ と書くことにする．よって，一般的に，(r,s) 型のテンソルを縮約すると $(r-1, s-1)$ 型のテンソルとなる．

1点におけるテンソル

M の上の1点を p とする．定義1.2.1において，$\mathfrak{F}$ を R に，$\mathfrak{F}$ 加群の $\mathfrak{X}$ と $\mathfrak{X}^*$ を実ベクトル空間 $T_p(M)$ と $T_p(M)^*$ に置き換えると，**点** $p \in M$ **における** (r,s) 型テンソルが定義できる．

M 上のテンソル場 A は，各点 $p \in M$ において，その点におけるテンソル A_p を与える．これを，テンソル場の点 p における**値** (value), という．例えば，A を $(2,0)$ 型とする．いま $v, w \in T_p(M)$ が与えられたとき，$V_p = v$, $W_p = w$ を満たすように，M 上のベクトル場 V , W を取る．さて，$A(V, W)$ は M 上の関数である．この関数の点 p における値を $A_p(v,w)$ とする．このとき次が成立する．

1. $A_p(v,w)$ は V , W の取り方によらない．したがって A_p は矛盾なく定義できる．

2. $A_p\colon T_p(M) \times T_p(M) \to R$ は，R 上の双線形写像であり，それゆえ点 p におけるテンソルである．

もちろん，$T_p(M)$ を任意のベクトル空間 V に，$T_p(M)^*$ を V の双対である V^* に置き換えても (r,s) 型テンソルを定義することができる．この表現を使うと，例えば，V 上の**内積** (inner product) g は V 上で定義された正定値で対称な $(0,2)$ 型テンソルである，ということになる．正定値の条件を弱めて**非退化** (nondegenerate) (つまり，任意の $w \in V$ に関して $g(v,w)=0$ ならば $v=0$) にしたときは，g のことを**スカラー積** (scalar product) と呼ぶ．

相対性理論への応用を念頭に入れたテンソルの計算技法に関しては Dodson and Poston (1991) を見よ．

1.3 微分幾何学

計量テンソル

微分幾何学の舞台は，計量テンソル g を持つ滑らかな多様体 M である．つまり，g は滑らかな $(0,2)$ 型共変テンソルで，これにより，各点 p における接空間 $T_p(M)$ にスカラー積 g_p が与えられているのである．このとき M を**擬リーマン多様体** (semi-Riemannian manifold) と呼ぶ．接ベクトルの場合と同じように，M 上のベクトル場 V についても，実数値関数 $g(V,W)$ を $<V,W>$ と表すことにする．

計量テンソルが正定値 (つまり，スカラー積 g_p が内積) のとき，G を**リーマン計量** (Riemannian metric) といい，それを持つ M を**リーマン多様体** (Riemannian manifold) と呼ぶ．しかるに，相対性理論で必要となるのは不定値の計量である．各 g_p がローレンツ・スカラー積 (1.5 節参照) のとき，g を**ローレンツ計量** (Lorentz metric) といい，それを持つ M を**ローレンツ多様体** (Lorentz manifold) と呼ぶ．

ある領域 $\mathcal{U}$ において座標系 $(x^1,\ldots,x^n)$ を取ると，計量テンソルの成分は $g_{ij} = g(\partial_i,\partial_j) =<\partial_i,\partial_j>$ と書けるから $g=\Sigma g_{ij}dx^i \otimes dx^j$ である．計量のかわりに，各点で 2 次形式 g_p を与える**線素** (line element) $\mathsf{q}=ds^2$ を使うこともある．定義から，ds^2 のベクトル場 V 上における値は $g(V,V) =<V,V>$ となる．

線素から，計量テンソルを構成することができる．線素は，テンソルではないが，座標系を使って $ds^2=\Sigma g_{ij}dx^i dx^j$ と書くことができる．なおここで，微分を並べて書いてあるのは，普通の意味での関数の積である．さてそこで，ベクトル場を $V=\Sigma V^i\partial_i$

とすると，

$$\begin{aligned}(ds^2)(V) &=< V,V >=< \Sigma V^i\partial_i, \Sigma V^j\partial_j > \\ &= \Sigma V^iV^j < \partial_i, \partial_j >= \Sigma g_{ij}V^iV^j \\ &= \Sigma g_{ij}dx^i(V)dx^j(V) = (\Sigma g_{ij}dx^idx^j)(V)\end{aligned}$$

となるのである．

例

多様体 R^n に線素 $\Sigma\varepsilon_i(dx^i)^2$ を与えたものを R^n_ν と書く．ここに，$\varepsilon_i = \pm 1$ は，$i \leq \nu$ のときは -1，$i > \nu$ のときは $+1$ とする．R^n_ν を，**指数** (index)　ν **の，**n **次元擬ユークリッド空間** (semi-Euclidean n-space) と呼ぶ．特に $\nu = 0$ のときは，普通のユークリッド空間 (リーマン多様体の 1 つ) である．また，$\nu = 1$ で $n \geq 2$ のときは**ミンコフスキー空間** (Minkowski space)(ローレンツ多様体の 1 つ) と呼ぶ．

2 つの擬リーマン多様体 M と N があるとき，その積多様体には，自然な形で計量 $< v, w >$ が入る．これは，v と w を M と N へ射影してスカラー積をとり，それの和を作ればよい．擬リーマン多様体 M の開集合 $\mathcal{U}$ は，M の計量を $\mathcal{U}$ へ制限したものを計量として，擬リーマン多様体となる．擬リーマン多様体の例は，擬ユークリッド空間の部分空間にたくさん見つけることができる (1.7 節参照).

等長写像

擬リーマン多様体の間の写像 $\psi\colon M \to N$ は，微分同相写像であり，かつ，**スカラー積を保存する** (preserve scalar product) (つまり，M の任意の接ベクトル v と w に対して

$$< d\psi(v), d\psi(w) >=< v, w >$$

が成立する) とき，**等長写像** (isometry) と呼ばれる．そしてこのとき，Mと N は**等長** (isometric) である，という．幾何学的には同一であると見なすのである．例えば，R^1 の開区間は，全て微分同相であるが，等長であるのは長さが同じときだけである．

等長の関係式を座標系で表しておく．いま，$\mathcal{V} \subset N$ で $ds_N^{\ 2} = \Sigma\bar{g}_{ij}dy^idy^j, \mathcal{U} \subset M$ で $ds_M^{\ 2} = \Sigma g_{ij}dx^idx^j$, であるとする．そして，写像 $\phi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ は，これらの座標系で $y^i = y^i(x^1, \ldots, x^n)$ と書けるとする．このとき，$ds_N^{\ 2}$ を ϕ で引き戻したものが $ds_M^{\ 2}$ ならば $\mathcal{U}$ において等長なのである．つまり，$dy^i = \Sigma\partial y^i/\partial x^m dx^m$ を $ds_N^{\ 2}$ に代入し，$y^i = y^i(x^1, \ldots, x^n)$ を $\bar{g}_{ij}$ に代入すれば，$ds_M^{\ 2}$ が得られるということである．

後になってカー時空に応用するときには，このややこしく見える関係式は簡潔になる．

共変微分

擬リーマン多様体 M 上のベクトル場 V と W に対して新しいベクトル場 $\nabla_V W$ を対応させる規則を定義する．この新しいベクトル場は，各点 p において，V_p 方向へ W をずらした (ベクトル的な) 割合を与えるものとする．擬ユークリッド空間 R^n_ν の場合には，

$$\nabla_V(\Sigma W^i \partial_i) = \Sigma V[W^i]\partial_i$$

として ∇ を定義すればよい．ここに $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ は，R^n_ν における普通の直交座標系を与えるベクトル場である (指数 ν は，この式には関係しない)．この ∇ の性質を一般化して，任意の多様体においても，似たような対応を作ることができる．

定理 1.3.1(擬リーマン幾何学の基本定理)　擬リーマン多様体 M において，以下を満たす関数 $\nabla: \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ が一意に存在する．

(1) $\nabla_V W$ は，V に関して $\mathfrak{F}$ 線形である．

(2) $\nabla_V W$ は，W に関して R 線形である．

(3) 任意の $f \in \mathfrak{F}$ に関して $\nabla_V(fW) = V[f]W + f\nabla_V W$ が成立する．

(4) $[V, W] = \nabla_V W - \nabla_W V$

(5) $X < V, W > = < \nabla_X V, W > + < V, \nabla_X W >$

この ∇ を，M の**レビ—チビタ接続** (Levi-Civita connection) という．またベクトル場 V と W に対して $\nabla_V W$ と書き，V に関する W の**共変微分**という．

(1) の性質から，接ベクトル v に対して $\nabla_v W$ が矛盾なく定義できる．実際，$V_p = v$ を満たす任意のベクトル場 V に対して $(\nabla_V W)|_p$ とすればよいのである．

近傍 $\mathcal{U} \subset M$ における座標系で ∇ を表現すると，任意の i と j に対して

$$\nabla_{\partial_i}(\partial_j) = \Sigma\ \Gamma^m{}_{ij}\partial_m$$

となる．ここに表れる $\mathcal{U}$ で定義された実数値関数 $\Gamma^k{}_{ij}$ を**クリストッフェルの記号** (Christoffel symbol) という．この関数について

$$\Gamma^k{}_{ij} = \tfrac{1}{2}\Sigma g^{k\ell}[\ \partial g_{\ell j}/\partial x^j + \partial g_{\ell j}/\partial x^i - \partial g_{ij}/\partial x^\ell]$$

が成立する．

共変微分は，次のようにして，M の曲線 α に適用することができる．いま，α に沿ってベクトル場 Y が定義されているとする．このとき，**曲線 $\alpha(\alpha' \neq 0$ とする) に沿った Y の共変微分**を $Y' = \nabla_{\alpha'} Y$ で定義する．座標で表現すると

$$Y' = \sum_k \left\{ \frac{dY^k}{ds} + \sum_{ij} \Gamma^k{}_{ij} \frac{dY^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} \right\} \partial_k$$

となる．ここに，座標関数 $x^i \circ \alpha$ を省略して x^i と記した．この式は任意の α に関して成立する．

$Y' = 0$ のとき，ベクトル場 Y は**平行** (parallel) である，と呼ばれる．そして，s_1 と s_2 をパラメータの2つの値とするとき，$Y(s_1)$ を α に沿って平行移動して $Y(s_2)$ を得た，という言い方をする．

曲線 α の接ベクトル α' は，α 上のベクトル場である．さらに共変微分した α'' は，曲線の**加速度** (acceleration) $\alpha'' = \nabla_{\alpha'} \alpha'$ である．

測地線

ユークリッド空間における直線の概念を擬リーマン多様体 M に拡張したものが測地線である．M の曲線 γ は，加速度がゼロ (すなわち $\gamma'' = 0$) のとき，**測地線** (geodesic) と呼ばれる．座標系で表現すると

$$x^{k\prime\prime} + \sum \Gamma^k{}_{ij} x^{i\prime} x^{j\prime} = 0, \quad k = 1, \ldots, n$$

となる．これを**測地線の方程式**と呼ぶ．ここに，ダッシュは γ のパラメータ s に関する微分を表し，x^i は $x^i \circ \gamma$ の省略である．微分方程式の理論を使えば，M の任意の接ベクトル v に対して，初期条件 $\gamma_v'(s_0) = v$ を満たす測地線 $\gamma_v : I \to M$ が一意に存在する．ここに，区間 I はできるかぎり大きく取ることにする．任意の v に関して $I = R$ となるとき，すなわち全ての測地線が数直線全体まで (測地線として) 拡張できるとき，M は**測地的に完備** (geodesically complete) である，という．

測地線のパラメータを変換した $\beta(s) = \gamma(h(s))$ がまた測地線となるのは，h が $h(s) = as + b$ を満たすときにかぎる．つまり，測地線のパラメータは幾何学的な意味を持っているのである．パラメータを変換して測地線にすることができる曲線を**原測地線** (pregeodesic) と呼ぶ．

ラグランジュの方法を使って測地線の方程式を別な形で表現することもできる．場合によってはこちらの方が便利なこともある．いま，$L: TM \to R$ を，M の接バンド

ル TM 上の滑らかな関数とし，接バンドルに座標系 $(x^1, \ldots, x^n, \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n)$ を与えておく．M の曲線 α がオイラーの方程式

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j}(\alpha')\right] = \frac{\partial L}{\partial x^i}(\alpha'), \quad i = 1, \ldots, n.$$

を満たすとき，この α は L の**極値** (extremal) である，という．

擬リーマン多様体 M おいて，$L: TM \to R$ として $L(v) = \frac{1}{2} < v, v >$ を考える．座標系で書くと $L = \frac{1}{2}\Sigma g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)\dot{x}^i\dot{x}^j$ となる．ここに，$\dot{x}^i(\alpha') = x^{i'}$ で，$x^{i'}$ は $d(x^i \circ \alpha)/ds$ を表す．このとき，オイラーの方程式は

$$\frac{d}{ds}\left[\Sigma g_{k\ell}\, x^{\ell'}\right] = \frac{1}{2}\sum \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} x^{i'} x^{j'}, k = 1, \ldots, n$$

となる．

この式は測地線の微分方程式に一致している．それを確認するには，上式の左辺を微分して，(先に述べた) ${\Gamma^k}_{ij}$ と g_{ij} の関係式を使えばよい．

ラグランジュの方法は第 4 章で必要となる．

型の変換

擬リーマン多様体において，計量テンソルを使うと，テンソルを (r, s) 型から (r', s') 型 (ただし $r' + s' = r + s$ とする) へ変換することができる．変換したテンソルは，元のテンソルと同じ情報を持っており，表現を変えただけと見なすことができる (つまり，共変と反変の違いは重要ではなくなるのである)．

一般に，(r, s) 型に対して，$(r - 1, s + 1)$ あるいは $(r + 1, s - 1)$ と変換できることが分かればよい．ここでは標構場を使って説明する．いま，標構場 $\{E_i\}$ に関して ${A^{ij}}_{k\ell}$ という成分を持つ $(2, 2)$ 型テンソル A があるとする．これを $(1, 3)$ 型に変換するには，i を下げるか j を下げるかで 2 通りの方法がある．i を下げると，新しいテンソルは ${A_i}^j{}_{k\ell} = \Sigma g_{im} {A^{mj}}_{k\ell}$ となる．ここに，g_{ij} は，計量テンソル g を，この標構場で表示したときの成分 $< E_i, E_j >$ を表す．

同様にして，$(3, 1)$ 型に変換するなら，(g_{ij}) の逆行列 (g^{ij}) を使えばよい．すなわち，${A^{ij}}_{k\ell}$ において添字 k k を上げると ${A^{ijk}}_{\ell} = \Sigma g^{km} {A^{ij}}_{m\ell}$ となる．

このようにして，テンソルとは，$A, B, \ldots$ 等に，上下することのできるスイッチが $r + s$ 個ついたものである，という古典的な定義に帰着するのである (この上下することを，添字を**上げる** (raising), **下げる** (lowering), という)．

前述したオイラーの方程式において，$\partial L/\partial \dot{x}^i = \Sigma g_{i\ell}\dot{x}^\ell$ は，α に沿ったコベクトル場の i 番目の成分を表し，接ベクトル場 α' の (反変) 成分と計量的な意味で一致して

いるわけである．α が相対性理論における粒子を表しているならば，これは，エネルギー運動量の共変ベクトルによる表現と解釈することができる．

座標系よりも標構場が便利である大きな理由は次にある．

補題 1.3.2　$\{E_i\}$ を正規直交標構場とする．すなわち，$g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_j, \varepsilon_i = \pm 1$ とする．このとき，添字 i の上げ下げは，単に ε_i を掛けることと一致する．

証明　例えば，$A^i{}_{jk}$ の i を下げるとする．このとき，新しいテンソルの成分は

$$A_{ijk} = \Sigma g_{im} A^m{}_{jk} = \Sigma_m \delta_{im}\varepsilon_i A^m{}_{jk} = \varepsilon_i A^i{}_{jk}$$

となる．□

上式の右辺では和を取っていない．1.2 節で述べたように，本書では，**弱い形**のアインシュタインの約束を採用しているので，和を取る場合には Σ を書くのである．

1.2 節で述べたように，(r,s) 型のテンソルを縮約すると，共変と反変の添字がひとつずつ消えて $(r-1, s-1)$ 型のテンソルとなる．擬リーマン多様体では，共変成分 (あるいは反変成分) どうしでも縮約の操作を行うことができる．このような場合は，添字の一方を上げて (あるいは下げて)，普通の縮約を行えばよいのである．例えば，$(1,4)$ 型のテンソルで，1 番目と 3 番目の共変成分どうしを縮約すると，$\Sigma g^{ab} A^i{}_{ajbk}$ という成分を持つ $(1,2)$ 型テンソル $\mathsf{C}_{13}A$ となる．さらに，標構場が正規直交系のときには，この式の 2 重の和が普通の和 $\Sigma\varepsilon_m A^i{}_{mjmk}$ になる．

曲率

曲面におけるガウス曲率の概念は，擬リーマン多様体の上にまで広げることができる．

定義 1.3.3　擬リーマン多様体 M において，

$$R_{XY}Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]}Z,$$

で定義される関数 $R\colon \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ を，M の**リーマン曲率テンソル** (Riemannian curvature tensor) という．ここに，∇ は M 上のレビ–チビタ接続を表す．

∇ や括弧積 $[\ ,\ ]$ はテンソルではないが，R がテンソルであることは容易に示すことができる．ベクトル場 X と Y の括弧積がゼロであるときには (例えば座標ベクト

ル場の場合), 曲率テンソル R は，共変微分の順序の差を表わしている．このように，共変微分を 2 回以上続けて行うときには曲率テンソルが必要となることが多い．曲率テンソルは，微分幾何学において最も重要な量である．

曲率テンソルを逆の符号で定義する場合もあるが，本書では，上記の伝統的な定義を採用する．

命題 1.3.4(曲率テンソルの性質) 任意の $x, y, v, w \in T_p(M)$ に対して次が成立する．

1. $R_{xy} = -R_{yx}$
2. $< R_{xy}v, w >= - < R_{xy}w, v >$
3. $R_{xy}z + R_{yz}x + R_{zx}y = 0$
4. $< R_{xy}v, w >=< R_{vw}x, y >$

標構場 $\{E_i\}$ に関する曲率テンソルの標成分は

$$R^i{}_{jk\ell} = \omega^i(R_{E_k E_\ell} E_j)$$

であるから，1.2 節で述べた双対公式 $X = \Sigma\omega^m(X)E_m$ により

$$R_{\partial_k \partial_\ell}(\partial_j) = \Sigma R^m{}_{jk\ell}\partial_m$$

を得る．

曲率テンソルの性質から，曲率テンソルを縮約してゼロにならないものは (符号の差違を除いて)1 つしかないことが分かる．これを**リッチ曲率テンソル** (Ricci curvature tensor) Ric と呼ぶ．本書では次のような符号を採用する．

補題 1.3.5 任意の標構場に関して，Ric の成分は $R_{ij} = \mathrm{Ric}(E_i, E_j) = \Sigma R^m{}_{imj}$ で与えられる．特に，正規直交系に関しては $\mathrm{Ric}(V, W) = \Sigma\varepsilon_m < R_{VE_m}E_m, W >$ となる．

リッチ・テンソルは，相対性理論において非常に重要な役割を持っている．アインシュタインの方程式に出てくるのは，曲率テンソルではなくて，リッチ・テンソル (を少し変えた形) なのである．

リッチ・テンソルを縮約すると**スカラー曲率** (scalar curvature) $S = \Sigma g^{ij} R_{ij}$ になる．また，**クレッチマンの曲率不変量** (Kretschmann curvature invariant) $k = \langle R, R \rangle = \Sigma R^{ijk\ell} R_{ijk\ell}$ も必要となる場合がある．

M の曲率テンソルに R 含まれている情報は，**断面曲率** (sectional curvature) K で表すこともできる．これは，M の非退化な2次元平面 Π 上で定義された実数値関数であり，Π の基底 v , w に対して

$$K(\Pi) = \frac{\langle R_{vw}v, w \rangle}{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2}$$

で定義される．この式が基底の取り方によらないことは容易に証明できる．(Π が非退化であるため分母はゼロにならない．1.5節を見よ.)

S が曲面，つまり2次元のリーマン多様体のときには，点 $p \in S$ における2次元平面 $T_p(S)$ の断面曲率 K は，その点における古典的な**ガウス曲率** (Gaussian curvature) に一致する．

リーマン曲率テンソル R の共変微分は，きれいな対称性を持っている．一般に，V を任意のベクトル場とするとき，共変微分の操作 ∇_V は，任意のテンソル場 A へ拡張することができる．$\nabla_V A$ は，A と同じ型のテンソルとなる．リーマン曲率テンソル R の場合では，$(1,3)$ 型のテンソル場 $\nabla_V R$ が

$$(\nabla_V R)_{XY} Z = \nabla_V (R_{XY} Z) - R_{\nabla_V X, Y}(Z) - R_{X, \nabla_V Y}(Z) - R_{XY}(\nabla_V Z)$$

で定義される．この式は，$\nabla_V (R_{XY} Z)$ に対するライプニッツの積の法則になっていることに注意せよ．さてこのとき，X , Y , Z が巡回している**ビアンキの恒等式** (Bianchi curvature identity)

$$(\nabla_X R)_{YZ} + (\nabla_Y R)_{ZX} + (\nabla_Z R)_{XY} = 0$$

が成立するのである．くわしくは，Misner, Thorne and Wheeler (1973) の13節，O'Neill (1983) の第3章を参照せよ．本書では，この恒等式を，少し変形したニューマン－ペンローズ技法の形にして，第5章で用いる．

もちろん，曲率テンソル関係の公式は幾何学的不変量である．つまり，等長写像により (対応するテンソルどうしが) 不変である．例えば，$\psi \colon M \to N$ を等長写像とすると，M の任意な接ベクトル v, w に対して，$\mathrm{Ric}_N(d\psi(v), d\psi(w)) = \mathrm{Ric}_M(v, w)$ が成立する．

キリング・ベクトル場

X を擬リーマン多様体 M 上のベクトル場とする．簡単のため，X は完備，つま

り，その流れ $\{\psi_s\}$ が大域的に定義できる，とする (1.1 節). 各 $\psi_s\colon M \to M$ が等長変換のとき，X を**キリング・ベクトル場** (Killing vector field) と呼ぶ．また，**無限小等長変換** (infinitesimal isometry) ともいう．例えば，円 S^1 において，長さ一定のベクトル場は，その流れが円の回転なので，キリング・ベクトル場になっている．

X が完備でないときには，上記の定義は局所的な所でしか成立しない．

命題 1.3.6　ベクトル場 X に対して，次は同値である．

(1) X はキリング・ベクトル場である．

(2) 任意の V, W に対して

$$X < V,W >=< [X,V],W > + < V,[X,W] >$$

が成立する．

(3) 任意の V, W に対して

$$< \nabla_V X, W >= - < \nabla_W X, V >$$

が成立する．

特に，X が座標ベクトル場 ∂_r のときには，(2) 式は $\partial g_{ij}/\partial x^r = 0$ となる．

上記の定義から分かるように，キリング・ベクトル場は，$M \to M$ が等長かどうかを判断するのに使われる．また，次の**保存補題**があるので，測地線の研究にも便利なものである．

補題 1.3.7　M において，X をキリング・ベクトル場，γ を測地線とするとき，スカラー積 $< X, \gamma' >$ は γ に沿って一定である．

証明　$\gamma'' = 0$ であるから，$(d/ds) < X, \gamma' >=< \nabla_{\gamma'}(X), \gamma' >$ を得るが，これは命題 1.3.6(3) の式よりゼロである．□

M が連結のとき，M の等長変換 ψ は，ある点 $p \in M$ における微分写像 $d\psi_p$ により決定する．これをキリング・ベクトル場の表現でいえば，キリング・ベクトル場 X は，ある点の任意の近傍における値により完全に決定する，ということになる．

1.4　多様体の拡張

微分幾何学者は，都合がよいように，擬リーマン多様体が完備であるという仮定を入れて研究を行う．しかしながら相対性理論においては，ある座標近傍 $\mathcal{U}$ において計量テンソルが分かっていることすらかなり幸運なことなのである．ましてや計量の大域的性質を調べるには，分かっている領域 $\mathcal{U}$ から拡張するしかない．ここでは，拡張の方法を2つ説明する．

座標による拡張

$\mathcal{U}$ を擬リーマン多様体とする．これを次のようにして拡張する．$\mathcal{U}$ から滑らかな (あるいは解析的) 多様体 M の開集合 $\mathcal{U}_1$ への微分同相写像 ϕ を見つける．この ϕ が等長写像となるように $\mathcal{U}_1$ に計量 g_1 を与える．テンソル場 g_1 を，$\mathcal{U}_1$ を含む集合 $\mathcal{U}_2$ まで拡張する．$\tilde{g} = g_2|\tilde{\mathcal{U}}$ が (非退化) 計量テンソルであるような開集合 $\tilde{\mathcal{U}}$ を取る (つまり $\mathcal{U}_1 \subset \tilde{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}_2$ となっている)．そこでもし $\tilde{\mathcal{U}}$ が $\mathcal{U}_1 \approx \mathcal{U}$ よりも大きければ，これに $\tilde{g}$ を付けたものが求める拡張である．

だが，どのようにして微分同相写像 $\phi\colon \mathcal{U} \to M$ を見つけ，どうやって g_1 を拡張すればよいのであろうか．次のような特別な場合には，この答えは自明である．そして，後で応用するとき必要となる拡張もこれに準じている．

領域 $\mathcal{U}$ における座標系を $(x^1, \ldots, x^n)$, ここにおける計量テンソルの成分を g_{ij} とする．座標系は，$\mathcal{U}$ から R^n の開集合 $\mathcal{U}_1$ への微分同相写像 $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$ を与える．上記のように，$\mathcal{U}_1$ に計量を与えて ξ が等長写像となるようにする．この計量の成分 g_{ij} は，元と同じ座標表現をしているが，ここでの $(x^1, \ldots, x^n)$ は R^n における普通の直交座標系である．R^n においては，関数の組 g_{ij} を，$\mathcal{U}_1$より大きい開集合 $\mathcal{U}_2$ へ拡張するのは容易である．g_{ij} が解析的関数ならば，この拡張方法は一意に定まる．(本書で用いる応用では，拡張に使うのは多項式や三角関数である.)

さて，拡張した関数の組 $\tilde{g}_{ij}$ が (非退化) 計量テンソルである領域を $\tilde{\mathcal{U}}$ とすると，これが $\mathcal{U}$ の求める拡張なのである．

位相空間のはり合わせ

2つの擬リーマン多様体 M と N があり，開集合 $\mathcal{U} \subset M$ から開集合 $\mathcal{V} \subset N$ への等長写像 μ が与えられているとする．M と N を，$\mathcal{U} \approx \mathcal{V}$ にそってはり合わせ，新しい多様体 Q を作ることにする．このとき，$\{M, N, \mu\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}\}$ を**はり合わせのデータ** (gluing data), μ を**はり合わせ写像** (matching map) と呼ぶ．Q の位相が問題とな

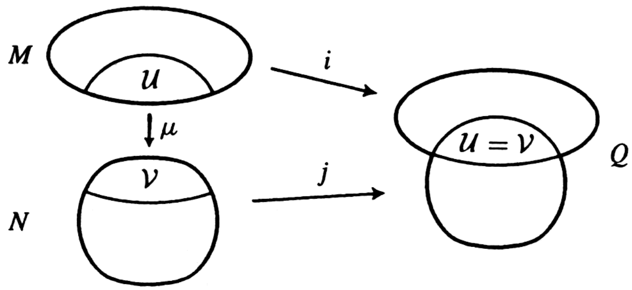


図 1.1　M と N を $\mathcal{U} \approx \mathcal{V}$ ではり合わせて Q を作る．

るので，とりあえず，M と N は位相空間としておく．多様体の構造と計量は，後で自然に与えられることになる．

いま M と N の**直和** (disjoint union) $M \cup N$ において，

$$p = q \quad \text{または} \quad p = \mu(q) \quad \text{または} \quad q = \mu(p)$$

であるとき 2 点 p と q は同値 $p \sim q$ である，として同値関係 $\sim$ を導入する．さてそこで，この同値関係による**商空間** (quotient space) $M \cup N / \sim$ を $Q = M \cup_\mu N$ と置く．Q では，点 $u \in \mathcal{U}$ と点 $\mu(u) \in \mathcal{V}$ が融合して 1 つの点になっているわけである．Q の各点は，次のうちの一つの形をしている：

$$m \in M - \mathcal{U}, n \in N - \mathcal{V}, (u, \mu(u)) = (\mu^{-1}(v), v), \quad u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{V}.$$

点 $m \in M - \mathcal{U}$ を $m \in Q$ に，点 $u \in \mathcal{U}$ を $(u, \mu(u)) \in Q$ に写す写像を $i: M \to Q$ と置く．同様に，$n \in N - \mathcal{V}$ を n に，$v \in \mathcal{V}$ を $(\mu^{-1}(v), v)$ に写す写像を $j: N \to Q$ とする．この定義から，$\mathcal{U}$ に制限すれば $i = j \circ \mu$ が成立している．

i と j は，**自然な単射** (natural injection) と呼ばれる．したがって，和集合の上に与えられる $i \cup j: M \cup N \to Q$ は，商空間への自然な射影になっている (図 1.1). Q の部分集合 S が開集合となる必要十分条件は，$i^{-1}(S)$ が M で開集合でかつ $j^{-1}(S)$ が N で開集合となることである．いい換えると，$\phi: Q \to X$ が連続である条件は，$\phi \circ i$ と $\phi \circ j$ が連続となることである．

補題 1.4.1　上記の関係式において，自然な単射 i は，$\mathcal{U}$ から Q の開集合 $i(\mathcal{U})$ の上への同相写像である．同様に，j は，$\mathcal{V}$ から $j(\mathcal{V})$ の上への同相写像である．

証明　まず，これまでの作り方より，i と j が連続であることが分かる．次に，i が，M の開集合 W を Q の開集合へ写すことを示す．$i(W)$ が開集合である条件は，$i^{-1}(i(W))$ と $j^{-1}(i(W))$ が開集合となることである．明らかに $i^{-1}(i(W)) = W$ であり，これは M の開集合．また，

$$j^{-1}(i(W)) = j^{-1}(i(W) \cap j(N)) = j^{-1}(i(W \cap \mathcal{U})) = \mu(W \cap \mathcal{U})$$

となり，これは N の開集合である．特に，$i(\mathcal{U})$ は Q の開集合である．

よって，i は，1対1であるので，$i(\mathcal{U})$ の上への同相写像であることが分かる．同様にして $j: N \to j(\mathcal{V})$ についても示すことができる．□

今後，自然な単射で同一視して，$i(M) = M$, $j(N) = N$ と見なすことにする．つまり，Q は，$M \cap N = \mathcal{U} \approx \mathcal{V}$ を満たす M と N の和集合である，とするのである．

補題 1.4.2　$\{M, N, \mu: \mathcal{U} \to \mathcal{V}\}$ をはり合わせのデータとする．いま，$\phi_M: M \to P$, $\phi_N: N \to P$ が連続写像で $\phi_M|\mathcal{U} = \phi_N \circ \mu$ を満たすとする．このとき $\phi \circ i = \phi_M|\mathcal{U}$, $\phi \circ j = \phi_N|\mathcal{V}$ であるような連続写像 $\phi: Q \to P$ が一意に存在する．

自然な単射で同一視して述べれば，ϕ_M と ϕ_N が $M \cap N$ で一致するなら，$Q = M \cup N$ の上の写像が定義される，ということなのである．

証明　$i(M)$ で $\phi(i(m)) = \phi_M(m)$, $j(N)$ で $\phi(j(n)) = \phi_N(n)$, として ϕ を定義すればよい．この定義に矛盾がないことは，$i(m) = j(n)$ のとき，$m \in \mathcal{U}$, $n \in \mathcal{V}$ で $n = \mu(m)$ であるから，$\phi_N(n) = \phi_N(j(m)) = \phi_M(m)$ となることから分かる．$\phi \circ i$ と $\phi \circ j$ は連続写像であるから，前記の補題より，ϕ は連続となる．□

同様な方法により，さらに一般的な次の結果を得ることができる．

補題 1.4.3(写像の補題)　$\{M, N, \mu: \mathcal{U} \to \mathcal{V}\}$ と $\{M', N', \mu': \mathcal{U}' \to \mathcal{V}'\}$ をはり合わせのデータとする．2つの連続写像 $\phi_M: M \to M'$ と $\phi_N: N \to N'$ が，$\phi_M(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}'$, $\phi_N(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}'$ かつ $\mu' \circ \phi_M|\mathcal{U} = \phi_N \circ \mu$ を満たすとする．このとき，$\phi \circ i = i' \circ \phi_M$ かつ $\phi \circ j = j' \circ \phi_N$ (自然な単射で同一視した表現なら，$\phi|M = \phi_M$ かつ $\phi|N = \phi_N$) を満たす連続写像 $\phi: Q \to Q'$ が一意に存在する．

さて，ここで1つ問題がある．本書で必要となる擬リーマン多様体は，その定義から，ハウスドルフ空間であるが，M と N がハウスドルフ空間でも，Q がハウスドルフ空

間にならない場合が出てくるのである．例えば，$M = N = R^1$ で $\mathcal{U} = \mathcal{V} = \{t: t < 0\}$ とし，恒等写像を μ とする．これではり合わせを行うと，Q は，図 1.2 のように，原点から枝分かれした形になる．原点が 0 と 0' の 2 つであり，0 の近傍と 0' の近傍は共通部分を持っているのである．よって，ハウスドルフ空間の条件に適合しない．

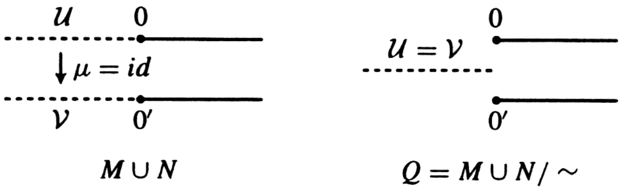


図 1.2　ハウスドルフ空間にならないはり合わせ．

このような状況を避けるために，次の条件を入れることにする．

定義 1.4.4　はり合わせのデータ $\{M, N, \mu: \mathcal{U} \to \mathcal{V}\}$ が**ハウスドルフ条件** (Hausforff condition) を満たすとは：$\{p_n\} \to p \in M - \mathcal{U}$ および $\{\mu(p_n)\} \to q \in N - \mathcal{V}$ の両方を満たす点列 $\{p_n\}$ が $\mathcal{U}$ に存在しない，ことである．

この点列を $M \cup_\mu N$ へ写せば，上の条件は，点列が異なる 2 点へ収束することはない，ということになる (図 1.2 の例では 2 点に収束している)．

補題 1.4.5　M と N をハウスドルフ空間とし，$M, N, \mu: \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ がハウスドルフ条件を満たすとする．このとき，$Q = M \cup_\mu N$ はハウスドルフ空間である．

証明　$x \neq y$ を $Q = i(M) \cup j(N)$ の 2 点とする．2 点とも $i(M)$ に含まれるなら，M がハウスドルフ空間で $i(M)$ は開集合であるから，x と y は，共通部分のない近傍を持つ．2 点が $j(N)$ に含まれる場合も同様である．そこで，$x \in i(M) - j(\mathcal{V})$ かつ $y \in i(N) - i(\mathcal{U})$ の場合を考える．開集合 $i(M)$ の点 x において，$\mathcal{N}_1 \supset \mathcal{N}_2 \supset \ldots$ を満たす近傍の列 $\{\mathcal{N}_k: k = 1, 2, \ldots\}$ を取る．点 y についても同様に $\{\mathcal{N}'_k\}$ を取る．$\mathcal{N}_k$ と $\mathcal{N}'_k$ が共通部分を持たなくなるような整数 k が存在することを示す．

存在しないとすると，全ての $k \geq 1$ について，$x_k \in \mathcal{N}_k \cap \mathcal{N}'_k$ となる点 x_k がある．よって点列 $\{x_k\}$ は x と y に収束する．ところで，$i^{-1}: i(M) \to M$ は同相写像であるから，$\mathcal{U}$ の点列 $\{i^{-1}(x_k)\}$ は $p = i^{-1}(x) \in M - \mathcal{U}$ に収束する．同様に，$\mathcal{V}$ の点列 $\{j^{-1}(x_k)\}$ は $q = j^{-1}(y) \in N - \mathcal{V}$ に収束する．しかるに，$\mu \circ i^{-1} = j^{-1}$ であるので，これはハウスドルフ条件に矛盾する．□

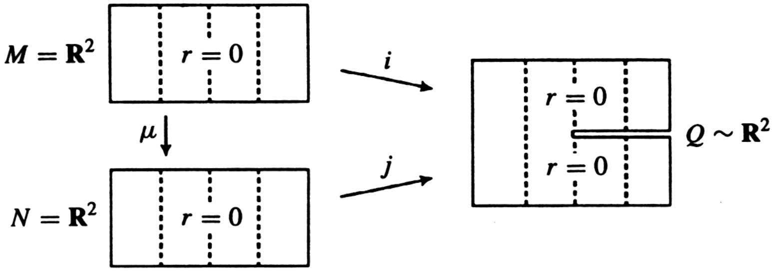


図 1.3　Q **は，2つの平面** $R^2(r,t)$ **を，**$\{r: r<0\}$ **に沿ってはり合わせたものである．**

例 1.4.6　$M=N$ を，直交座標 r,t を持った平面 R^2 とする．開集合 $\mathcal{U}=\mathcal{V}=\{(r,t): r<0\}$ を取る．$\mu: \mathcal{U}\to\mathcal{V}$ を恒等写像とすると，先の例と同じく，$Q=M\cup_\mu N$ はハウスドルフ空間にはならない．そこで，μ として $\mu(r,t)=(r,t/r)$ と置く．これはハウスドルフ条件を満たしている．実際，$\mathcal{U}=\{(r,t): r<0\}$ の点列 (r_n,t_n) が $M-\mathcal{U}$ の点 (r_o,t_o) に収束するとする．このとき $r_o=0$ である．しかるに，$t_n/r_n\to\infty$ なので，$\mu(r_n,t_n)=(r_n,t_n/r_n)$ は**発散する**．よって $Q=M\cup_\mu N$ はハウスドルフ空間になっている．‖

この例は第3章で構成するものの原型なので，もう少し詳しく検討しておく．図1.3では，M と N を，r 軸を水平方向に取って，長方形で示してある．Q は R^2 に同相である．だが，Q において，r と t は座標関数にはならない．Q において，t は，矛盾なく定義することができないのである（r はできる）．実際，直線 $r=r_o$ は，$r_o<0$ では1つの成分しかないが，$r_o\geq 0$ では2つの成分を持っている．

擬リーマン多様体のはり合わせ

2つの多様体 M と N に関してはり合わせのデータがあり，$\mu: \mathcal{U}\to\mathcal{V}$ が滑らかな写像であるとする．このとき，Q を多様体とし，$\mathcal{U}$ と $\mathcal{V}$ が部分多様体になるようにできる．しかも，その方法は一意に定まる．実際，$M\approx i(M)$ の座標系と $N\approx j(N)$ の座標系を合わせたものを Q のアトラスとすればよいのである．$i(M)$ の座標系と $j(N)$ の座標系が滑らかに重なっていることは容易に示すことができる．

前記の写像の関係は，〈連続〉を〈滑らか〉に置き換えれば，同相写像が微分同相写像に置き換わって，成立する．さらに，〈滑らか〉を〈解析的〉に置き換えてもよい．

M と N が擬リーマン多様体で，はり合わせ写像 μ が等長写像のとき，M と N の計量テンソルは $M \cap N = \mathcal{U} \approx \mathcal{V}$ で一致するので，Q に計量テンソルが与えられる．すなわち，Q は，M と N を拡張した擬リーマン多様体になる．このような拡張を繰り返して最大カー時空を作るのである．

一般に，μ で保存される M と N の性質は Q でも成立する．例えば，M と N が 4 次元ローレンツ多様体ならば，Q も 4 次元ローレンツ多様体になっている (符号数と次元は等長写像により不変である).

写像の関係も,〈滑らかな多様体〉を〈擬リーマン多様体〉に置き換えて,〈滑らかな写像〉を〈(局所的な) 等長写像〉に置き換えて，成立する．

1.5　ローレンツ・ベクトル空間

相対性理論で必要となるのはローレンツ多様体であり，そこで最も特徴ある性質は，接空間の線形代数から導かれる．本節では，接空間の線形代数を取り扱い，接空間の基本的な性質を解説する．

V を n 次元の実ベクトル空間とする．1.2 節で述べたように，V 上の**スカラー積**とは，V 上の，対称な非退化双線形写像である．$g(v, w) = 0$ であるとき，ベクトル v と w は **直交** (orthogonal) **する**, といい $v \perp w$ と書く．したがって，g が非退化ならば，全てのベクトルに直交するものはゼロ・ベクトルのみ，となる．つまり，$v \perp V \Rightarrow v = 0$ である．非退化の判定条件は，ある基底 $\{v_1, \ldots, v_n\}$ に関して，行列 $g_{ij} = g(v_i, v_j)$ の行列式がゼロにならないことである (よって，任意の基底に関してゼロにならない).

前にも記したように，$g(v, w)$ を $< v, w >$ と書くこともある．スカラー積 g が与えられたベクトル空間 V を，**スカラー積空間** (scalar product space) と呼ぶ．g が正定値，すなわち**内積**のときには，**内積空間** (inner product space) と呼ぶ.

ベクトル v によっては $< v, v >$ が負になることもあるので，v の**ノルム** (norm) $|v|$ を $| < v, v > |^{1/2}$ で定義する．$|u| = 1$, つまり $< u, u >= \pm 1$ のとき，u を**単位ベクトル**と呼ぶ．互いに直交している単位ベクトルの組は，**正規直交** (orthonormal) である，という.

命題 1.5.1　スカラー積空間 $V \neq 0$ には正規直交基底が存在する．すなわち，正規直交しているベクトルの組 $e_1, \ldots, e_n$ から正規直交基底を構成することができる．

証明　グラム－シュミットの方法を使うことはできないが，次のような簡単な帰納法

で証明することができる．

1. V には $< v, v > \neq 0$ であるベクトル v が存在する．もしそうでなければ，任意のベクトル v, w について，$0 =< v + w, v + w >= 2 < v, w >$ となる．

   先ず，$e_1 = v/|v|$ と置く．

2. いま，$e_1, \ldots, e_k$ $(k < n = \dim V)$ を正規直交であるベクトルの組とする．このとき，ベクトル e_{k+1} が存在し，$e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}$ も正規直交となる．

実際，$\{e_1, \ldots, e_k\}$ で張られる部分空間に直交するベクトルにより構成される部分空間を W とする．W に制限したスカラー積は非退化である．そうでなければ，V の全てのベクトルに直交するゼロでないベクトルが W に存在することになる．

この W に (1) を適用すればよい．□

正規直交基底 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ に関し，$< e_i, e_j >= \delta_{ij}\varepsilon_i$ によって数 $\varepsilon_i = \pm 1$ を定める．

命題 1.5.2(シルベスターの慣性法則)　V の任意の正規直交基底に関して，$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ は (順序を除いて) 同一である．

$(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ を V の**符号数** (signature) という．普通，-1 を先に並べて書く．-1 の個数を V の**指数** (index) という．

ε_i を使うと，ベクトル v は $v = \Sigma\varepsilon_i < v, e_i > e_i$ と**正規直交表現** (orthonormal expansion) できる．実際，この式の (左辺) − (右辺) を考えると，これは，全ての v に直交しているから，V に直交している．しかるに非退化なので (左辺) = (右辺) となる．

定義 1.5.3　次元が 2 以上で，指数が 1 であるスカラー積空間を**ローレンツ・ベクトル空間** (Lorentz vector space) という．

つまり，ローレンツ空間では符号数は $(-1, +1, \ldots, +1)$ である．符号を逆にした $(+1, -1, \ldots, -1)$ でも意味は同じことになる．以後，特に断らないかぎり，V で n 次元のローレンツ・ベクトル空間を表すことにする．

さて，(内積空間とは異なる) ローレンツ・ベクトル空間特有の性質を検討する．それらの性質は，いちばん簡単なローレンツ・ベクトル空間である**ミンコフスキー平面**

(Minkowski plane) R^2_1, すなわちスカラー積 $<(x,t),(x',t')>= xx' - tt'$ を導入した R^2 で確認することができる.

定義 1.5.4 ローレンツ・ベクトル空間 V のベクトル v は次のように分けられる.

$<v,v>> 0$ あるいは $v=0$ のとき**空間的** (spacelike) と呼ばれる.

$<v,v>= 0$ かつ $v \neq 0$ のとき**零的** (null) (あるいは**光的** (lightlike)) と呼ばれる.

$<v,v>< 0$ のとき**時間的** (timelike) と呼ばれる.

この分類をベクトルの**因果的特性** (causal character) という.

ローレンツ・ベクトル空間において, 簡単ながらいちばん役に立つ特質は, おそらく次のものである.

補題 1.5.5 時間的ベクトル z に直交するベクトルは空間的である. すなわち, $z^\perp = \{v \in V : v \perp z\}$ は内積空間であり, V は直和 $Rz \oplus z^\perp$ になっている.

証明 $u = z/|z|$ は単位ベクトルであるから, 補題1.5.5から, 正規直交基底 $u, e_1, \ldots, e_{n-1}$ が存在する. $v \perp z$ ならば $v \perp u$ であるから, ベクトルの正規直交表現を使って $v = b_1 e_1 + \cdots + b_{n-1} e_{n-1}$ と書ける. よって, $<v,v>= \Sigma b_i^2 \geq 0$ となり, 等号が成立するなら $v=0$ であるから, v は空間的となる.

$u^\perp$ は, $e_1, \ldots, e_{n-1}$ で張られる部分空間であるから, 上のことより, (V のスカラー積を制限した) 内積を持つ空間になる. 以上より, ベクトルの正規直交表現から, $V = Ru \oplus u^\perp$, $u^\perp = z^\perp$ が分かる. □

時間的単位ベクトル u と $x \in u^\perp$ を使って, ベクトル v を $v = au + x$ とすることは, いろいろな証明で使える便利な表現である. このとき $<v,v>= -a^2 + |x|^2$ となり, これもよく使われる.

V における零的ベクトルの集合 Λ は, **零円錐** (nullcone) と呼ばれる. (一般に, ベクトル空間 V の部分集合で, 正の係数倍で閉じているものを, V の**円錐** (cone) という.) 普通の n 次元実ベクトル空間と同様に, V も, 線形同型写像 $V \to R^n$ を座標系として, 自然な多様体の構造を持っている.

補題 1.5.6 V の零円錐 Λ は 2 つの成分Λ^+, Λ^- を持つ. この 2 つは $\Lambda^- = -\Lambda^+$ という関係をみたしている. 各成分は $R^+ \times S^{n-2}$ と微分同相である (図 1.4 を見よ).

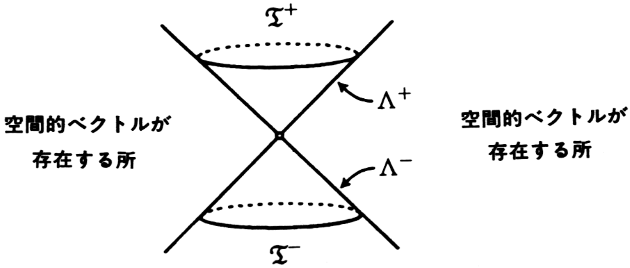


図 1.4　空間的ベクトル ローレンツ・ベクトル空間における零円錐と時間円錐

証明　V の時間的ベクトル u を取る．前記のように，零的ベクトル v を，$x \perp u$ を使って $au + x$ と書く．$a > 0$ である零的ベクトルの全体を Λ^+, $a < 0$ である零的ベクトルの全体を Λ^- と置く．$\Lambda, \Lambda^+, \Lambda^-$ が円錐となり，$\Lambda^- = -\Lambda^+$ であることは明らか．また，v は零的であるから $|x|^2 = a^2$ である．

次に，Λ^+ が $R^+ \times S^{n-2}$ と微分同相であることを示す．ここに S^{n-2} は，内積空間 $u^\perp \approx R^{n-1}$ の単位円である．$v = au + x$ が Λ^+ に含まれているときには，$|x| = a$ であるから，$v \to (a, x/a) \in R^+ \times S^{n-2}$ とすればよい．逆方向の写像は，$(r, y) \in R^+ \times S^{n-2}$ に対して零的ベクトル $r(u + y)$ を対応させるようにする．この2つがお互いの逆写像になっていることは簡単に確認することができる．

$n \geq 3$ のとき球 S^{n-2} は連結であるから，Λ^+ と Λ^- は，零円錐の連結成分になる(もちろん，Λ^+ と Λ^- に共通部分は無い).

$n = 2$ のときは事情が異なる．$S^0 = \{\pm 1\}$ であるから，Λ^+, Λ^- は連結ではない．それぞれ2本の半直線で構成されている(具体的にいえば R^2_1 であり，このとき Λ は，原点を通り傾き $\pm 45°$ の直線の集まりである). □

個々の Λ^+ と Λ^- を**零円錐** (nullcone) と呼ぶこともある．なお，プラス，マイナスの符号を付けたが，これに本質的な意味があるわけではない．

V における時間的ベクトルの集合 $\mathfrak{T}$ は**時間円錐** (time cone) と呼ばれる．

補題 1.5.7　V の時間円錐 $\mathfrak{T}$ は2つの成分 $\mathfrak{T}^+, \mathfrak{T}^-$ を持つ．この2つは $\mathfrak{T}^- = -\mathfrak{T}^+$

という関係をみたしている．また，ともに開で凸であり，

$$bdry\ \mathfrak{T}^+ = \Lambda^+ \cup \{0\},$$
$$bdry\ \mathfrak{T}^- = \Lambda^- \cup \{0\}$$

である．

証明　時間的単位ベクトル u を1つ与えて，任意のベクトル v を，$au+x$ と書く．そうすると，$<v,v>= -a^2+|x|^2$ であるから，v が時間的である条件は $a^2>|x|^2$ である．

$a>0$ である時間的ベクトル $v\in\mathfrak{T}$ の全体を $\mathfrak{T}^+$, $a<0$ である時間的ベクトルの全体を $\mathfrak{T}^-$ と置く．明らかに，$\mathfrak{T}, \mathfrak{T}^+, \mathfrak{T}^-$ は円錐であり，$\mathfrak{T}^- = -\mathfrak{T}^+$ である．また，これらは不等式で定義されているから，V の開集合である．

次に，例えば，$\mathfrak{T}^+$ が凸であることを示す．まず，V の任意のベクトル v に対し，$H_v = \{w\in V\colon <w,v><0\}$ が凸であることに注意しておく．実際，$w_1, w_2\in H_v$ ならば，$0<t<1$ を満たす t に関して，$w_t = tw_1+(1-t)w_2$ も H_v に含まれている．そこで，凸集合の共通部分は凸であるから，単位ベクトル u と，$e\perp u$ である全ての (時間的) 単位ベクトル e で作られる H_{u+e} の共通部分が $\mathfrak{T}^+$ であることを示せばよい．

まず，$v\in\mathfrak{T}^+$ とする．前のように $v=au+x$ と表すと $a>|x|$ である．任意の $e\perp u$ に関し，シュワルツの不等式を使って

$$<v,u+e>=<au+x,u+e>= -a+<x,e>\le -a+|x|<0$$

となるから，$v\in\cap H_{u+e}$ である．

逆に，$v\in\cap H_{u+e}$ のとき $v\in\mathfrak{T}^+$ であることを見る．$v\neq lu$ と仮定してよいので，$0\neq x\perp u$ で $v=au+x$ と書ける．特に，$v\in H_{u+x/|x|}$ である．よって

$$0><au+x,u+x/|x|>= -a+|x|<0$$

であるから $v\in\mathfrak{T}^+$ を得る．□

系 1.5.8　2つの時間的ベクトル z, z' が同じ時間円錐に含まれる条件は $<z,z'><0$ である．

証明　$f(v)=<v,z>$ で定義された関数 $f\colon\mathfrak{T}\to R$ を考える．Z が含まれる時間円錐を $\mathfrak{T}^+$ とする．$f(z)<0$ であり，2つの時間円錐 $\mathfrak{T}^\pm$ はそれぞれ連結であるから，

$\mathfrak{T}^+$ において $f < 0$ となる．よって，z' が $\mathfrak{T}^+$ に含まれるなら $< z, z' >= f(z') < 0$ となる．もし $z' \in \mathfrak{T}^-$ ならば，$-z' \in \mathfrak{T}^+$ なので，$< z, z' >= - < z, -z' >> 0$ となる．□

空間的でないベクトルは，**非空間的** (nonspacelike) (あるいは**因果的** (causal)) と呼ばれる．$\mathfrak{T}^+ \cup \Lambda^+$ と $\mathfrak{T}^- \cup \Lambda^-$ を V の**因果円錐** (causal cone) と呼ぶ．上記の系は，次のようにいい換えて使われることが多い．時間的ベクトル Z と因果的ベクトル W が同じ因果円錐に含まれる条件は $< z, w >< 0$ である．

ベクトルの因果的特性は，部分空間 W へ拡張される．V のスカラー積を W へ制限して定義するのである．

定義 1.5.9　V を，スカラー積 g を持つローレンツ空間とする．V の部分空間 W は：

$g|W$ が正定値のとき**空間的** (spacelike) と呼ばれる．

$g|W$ が退化するとき**零的** (null) と呼ばれる．

$g|W$ が非退化で指数 1 のとき**時間的** (timelike) と呼ばれる．

命題 1.5.1 と命題 1.5.2 から，V の任意の部分空間 W は，上記のうちのどれか 1 つの性質を持つことが分かる．これを，W の**因果的特性** (causal character) と呼ぶ．零的という性質は，一見すると奇妙なものだが，ローレンツ幾何学においては (したがって相対性理論においても) 重要な意味を持っているのである．

$\dim W = 1$ のときは，W のベクトル v の因果的特性が，v が張る部分空間 Rv の因果的特性と同一なので，上記の定義は定義 1.5.4 と一致する．特に，ゼロ部分空間は，ゼロ・ベクトルと同様に，空間的である．

明らかに，W が空間的となる条件は，それが内積空間となることである (よって，W でシュワルツの不等式が成立する)．1 次元の場合を別にすれば，W が時間的となる条件は，それがローレンツ・ベクトル空間となることである．

図 1.5 から分かるように，幾何学的に見れば，部分空間の因果的特性は，それと零円錐との関係で決定される．時間的と空間的の場合には明らかなので，より興味深い零的の場合について検討する．

補題 1.5.10　ローレンツ・ベクトル空間において，直交する 2 つの零的ベクトルは一次従属である．

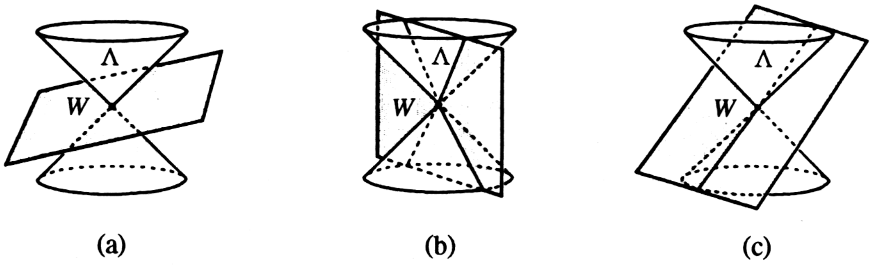


図 1.5　部分空間 W は，(a) では空間的，(b) では時間的，(c) では零的になっている．零的の場合，W は零円錐 Λ に接している．

証明　直交する 2 つの零的ベクトルを v, w とする．もし 1 次独立ならば，それらが張る 2 次元空間 N に含まれるベクトルは (0 を除いて) 全て零的ベクトルである．一方，補題 1.5.5 より，V には $(n-1)$ 次元の空間的部分空間 S が存在する．両方の次元の関係から $N \cap S \neq 0$ となるが，これは矛盾である．□

補題 1.5.11　W を，V の零的部分空間とする．このとき：

(1) $d \perp W$ を満たす，ゼロでないベクトル $d \in W$ が (スカラー倍を別にすれば) 一意に存在する．

(2) $W - Rd$ に含まれるベクトルは空間的である (図 1.5 を見よ).

証明　(1) 定義より $g|_W$ は退化であるから，条件に合うベクトル $d \neq 0$ は存在する．補題 1.5.10 より，そのようなベクトルはお互い 1 次従属であり，$d \perp W$ という性質は (ゼロでない) スカラー倍で保存される．

(2) いま $x \in W - Rd$, とくに $d \perp x$ とする．もし x が時間的ならば，補題 1.5.5 から，d は空間的となる．x が零的ならば，補題 1.5.10 から，$x \in Rd$ となる．どちらも不合理なので，x は空間的でなければならない．□

部分空間 $W \subset V$ に対して $W^{\perp} = \{v : v \perp W\}$ と置く．W が空間的のとき，W の正規直交基底を元にして V の正規直交基底を作ると，$W^{\perp}$ が時間的で (W が時間的ならば $W^{\perp}$ は空間的で), $V = W \oplus W^{\perp}$ となることが分かる．$(W^{\perp})^{\perp} = W$ であるから，W が零的ならば $W^{\perp}$ も零的となる．

1.6 一般相対性理論概論

この節では，相対性理論の基礎を概観する．

まず，3 次元多様体 S を考え，これを**空間** (space) と呼ぶ．空間の**粒子** (particle) とは，曲線 $\alpha\colon I \to S$のことである．曲線のパラメータを**時間** (time) と考える．つまり，$\alpha(t) \in S$ は，時間 t における粒子の位置を表しているのである．さて，ニュートン力学においては，S は 3 次元ユークリッド空間 R^3 であり，粒子の動きは運動の法則で支配されている．次のような古典的な状況を考える．質量 M を持つ物体が $S = R^3$ の原点にあり，いろいろな質量 $m \ll \mathrm{M}$ を持ったいくつかの粒子が，ニュートンの重力法則，運動の法則に従って，S 内を運動しているとする．この状況を相対性理論に翻案していくことにする．

第 1 段階として，リーマン直積空間 $S \times R^1$ を作る．R^1 に普通の計量を入れ，これを時間軸と考える．この多様体を**時空** (spacetime) と呼ぶ．時空の各点 (x, t) が**事象** (event), つまり，時間 t において点 x で起こった事件，を表している．粒子は，時空内の曲線 $t \to (\alpha(t), t)$ となる (図 1.6 を見よ).

一般相対性理論への翻案第 2 段階として，リーマン直積の線素 $d\sigma^2 + dt^2$ をローレンツ線素 $d\sigma^2 - dt^2$ に置き換える．この時空の時間的円錐は，あとで見るように，真空中では光のスピードで運動する質点は存在しない，という物理学上の要請を数学的に記述する条件を満たしている．(空間 S を R^3 として質量 M をゼロとすれば，特殊相対性理論の舞台である**ミンコフスキー時空** (Minkowski spacetime) となる.)

さて，第 3 段階が本質的である．上記の時空を，ニュートンの運動法則までも幾何学的に取り込んで，**粒子が，中心に置かれた質量による重力効果のみで運動する (これが物理学上の概念) ならば，その軌跡は測地線である (これが幾何学)**, と解釈できる時空 (4 次元ローレンツ多様体) へ置き換える．

この条件を満たす時空は，1915 年にアインシュタインが一般相対性理論を発表してから数週間のうちに，カール・シュワルツシルドによって発見された．シュワルツシルド時空の星は回転していない．だが，実際の天体は回転している．(ニュートンの理論では，回転は重力と関係がないものであった．しかし相対性理論では，質量とともに回転のエネルギーも重力源になっているのである.) 現在彼の名前が付いている，回転するモデルをロイ・カーが発見したのは，それから半世紀後であった (序章を見よ).

相対性理論において (空間) × (時間) という積の構造を捨てることは，この 2 つの概念を融合することであった．いみじくもミンコフスキーは次のようにいっている．

「空間それ自身，時間それ自身は，今後，闇の彼方に消え去る運命にある．この 2

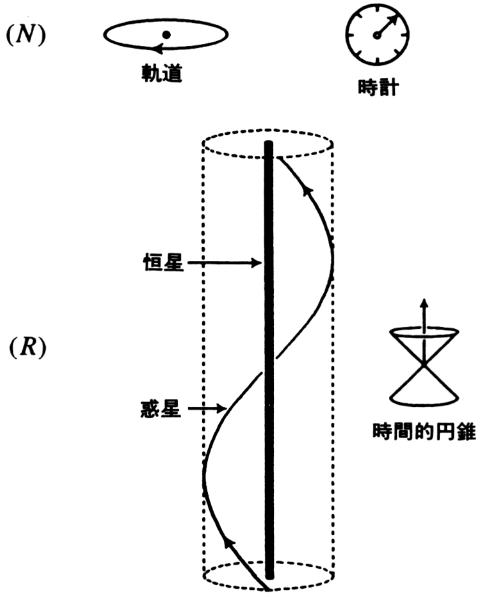


図 1.6　惑星が，恒星の周りを，円軌道を描いて動いているとする．ニュートンのモデル (N) では：　空間に固定された円軌道を，惑星がぐるぐる回っている．パラメータはニュートン物理学的絶対時間である．相対性理論のモデル (R) では：　惑星が時空内で螺旋を描いて動いている．パラメータは惑星の固有時である．

つを合体したものが真実の姿なのである」

相対性理論を学ぶ上で心理的に障害となるのは，時間と空間は別個のもの，という固定観念である．さらにやっかいなことに，相対性理論では，この 2 つを分離することが (常に，ではないが) 多い．

本書では，中心力の場を相対論的に考える．もちろん，さまざまな重力場に対して時空のモデルを構成することが相対性理論の目的であるが，物理的に意味のあるものは，そんなに多く知られていない．

以下，上述したことをさらに詳しく述べる．

時空

時空とは 4 次元ローレンツ多様体 M である．その各点を**事象** (event) と呼ぶ．M は連結とする．連結成分が複数あるとしても，異なる成分間では相互作用が与えられ

ないのである．また，時間は未来へ進むのみ，という概念を取り込むために，M にもう1つ構造を与える必要がある．M の各点 $p \in M$ における接空間 $T_p(M)$ はローレンツ・ベクトル空間であるから，$T_p(M)$ の時間円錐 $\mathfrak{T}$ の2つの成分に過去と未来を指定することができる．このように，M の各点に連続的に未来を指定することを，M の**時間的向き付け** (time-orient) という．未来と指定した成分を**未来向き時間円錐** (future timecone) (略して**未来円錐** (futurecone)), もう一方の成分を**過去向き時間円錐** (past timecone) と呼ぶ．ローレンツ多様体が時間的向き付け可能であるための必要十分条件は，非空間的ベクトル場が (空間全体で連続的に) 存在することである．この事実は，1の分解を使って容易に証明できる．なお，曲線やベクトル場が時間的，空間的，零的であるというのは，その各点での接ベクトルが同名の因果的特性 を持つことで定義されたことを確認しておく．非空間的，非時間的，という場合も同様である．

定義 1.6.1　連結で，時間的向き付けされた4次元ローレンツ多様体を**時空** (spacetime) と呼ぶ．

未来向き時間円錐に含まれる時間的接ベクトル Z を**未来向き** (future-pointing) と呼ぶ．過去向き，も同様に定義する．未来向き時間円錐の境界である零円錐を**未来円錐** (future-cone) と呼び，そこに含まれるベクトルを**未来向き** (future-pointing) と呼ぶ (図1.7を見よ). 非空間的曲線，ベクトル場は，その各点における接ベクトルが未来向きのとき，**未来向き** (future-pointing) であると呼ばれる．

多様体の次元が3や2の場合でも**時空**と呼ぶことにする．これは，平面や直線上のニュートン力学を相対性理論へ置き換えるときに使われるものである．

時空の定義の中には，重力場における物理的不変量は時空における幾何学的不変量である，というアインシュタインの慧眼が含まれている．これは当たり前のようであるが，その意味するところは革命的である．座標を使って表現されたものは，それが (時空における) 座標の取り方によらないことが示されなければ，物理的な意味はないのである．

粒子

粒子というのは，簡単にいえば，その環境に対して1点と見なすことができる物体である．恒星の周りを回る惑星，惑星に着陸した宇宙飛行士，等は粒子としてよい．

定義 1.6.2　未来向きの時間的曲線 $\alpha: I \to M$ を，時空 M 内の**質点** (material particle) α と呼ぶ．α の弧長関数 τ を α の固有時といい，$m = |\alpha'| > 0$ をその質

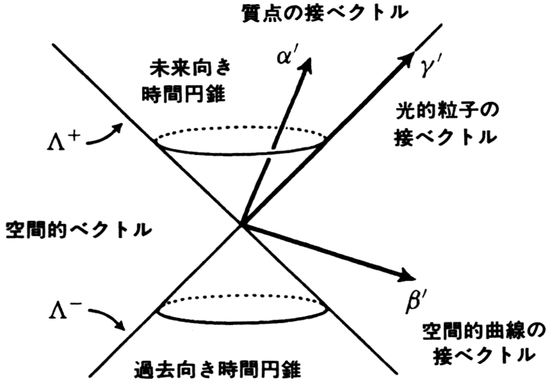


図 1.7　接ベクトルと時間円錐

量という．(もちろん，τ と m は α の定義域 I 上の関数である.)

このように，相対性理論においては絶対時間は無いのであるが，各質点はそれぞれ固有の時間を持っている．弧長の値は始点の取り方で変化するから，固有時は〈時計の合わせ方〉で変化する．しかし，時間の間隔 $\Delta\tau$ は変化しない．α が事象 $p=\alpha(\tau_0)$ から事象 $q=\alpha(\tau_1)$ まで移動したのなら，経過時間は $\Delta\tau=\tau_1-\tau_0$ となる．

相対性理論には常識に反するような現象があるが，その中でも特に有名なのが〈双子のパラドックス〉である．双子の兄弟が，事象 p で離れ離れになったとする．その後，事象 m で再会したとき，絶対時間は存在しないので，2 人の年齢が同じとなる必然性はない．この現象は核物理学ではよく知られたことであり，旅客機に乗せた原子時計と地上に置いた原子時計を比較することで簡単に検証することができる (Sachs and Wu 1977 を見よ).

双子の兄弟の固有時は，彼らの移動手段によらず，固有に時を刻んでいる．再会したときに年齢が異なっているのは，彼らの速さが異なっていたからではない．一般相対性理論においては速さは定義されない．実際，粒子が動いているかどうかを判定する絶対的な方法は無い．相対性理論で問題となる差異は，動いているかどうかではなく，時空において加速度があるかないか，である．加速度運動をした双子の兄は，そうではない弟よりも，再会したときに若いのである (Misner, Thorne and Wheeler 1973 にある例を見よ).

相対性理論の基本となるのは，光子で運ばれる光(つまり電磁波)の特異性である．

定義 1.6.3　時空 M において，未来向き零的測地線 γ を**光粒子** (lightlike particle) と呼ぶ．

つまり，⟨光は直進する⟩ という性質が幾何学的に正当化されているのである．光粒子では $|\gamma'| = 0$, つまり質量がゼロであるから (時計が無く) 固有時を持たない．

一方，質点 α は，測地線になる場合もならない場合もある．一般に，重力の影響だけで運動する状態を**自由落下** (freely falling) と呼ぶ．つまり相対性理論では，自由落下である条件はそれが測地線となることである．ここが，ニュートン力学の表現と異なる所である．例えば，先に述べた (自由落下で) 軌道を描いている惑星を考える．これは，ニュートン力学では，空間内で加速度運動をしているのだが，時空でみると加速度はない．つまり，図 1.6 の時空は，螺線を描く軌道が測地線となるような計量を持っていることになるのである．

測地線 α では $<\alpha', \alpha'>= -m^2$ は定数であるから，自由落下している粒子では，質量 M は一定であることが分かる．

注意 1.6.4　質点 α の接ベクトル $\alpha' = d\alpha/ds$ を，物理学の用語では，**エネルギー運動量 4 元ベクトル** (energy-momentum 4-vector) と呼んで $\boldsymbol{p}$ で表す．すぐ後で見るように，これは，ニュートン力学におけるエネルギーと運動量の概念を融合したものである．α のパラメータを固有時 τ (つまり弧長) にする場合もある．このパラメータにしたときの $\tilde{\alpha}$ では，定義から $m = |d\alpha/ds| = d\tau/ds$ であるから，$\boldsymbol{p} = d\alpha/ds = m\, d\tilde{\alpha}/d\tau$ となる．単位ベクトル $d\tilde{\alpha}/d\tau$ を粒子の **4 元速度** (4-velocity) と呼ぶ．これは，ニュートン力学における単位当たりのエネルギーと速度 (このときは **3 元速度** (3-velocity) と呼ぶ) の概念を融合したものである．なお，$\tilde{\alpha}$ という表現を使うことはあまりない．α のパラメータは，前後の文脈から判断することになる．‖

光粒子 γ では，**エネルギー運動量 4 元ベクトル**は $\boldsymbol{p} = \gamma'$ となる．

曲率

一般相対性理論の核となるアイデアは，重力場を，自由落下する粒子が測地線であるような曲がった時空で記述する，ということである．粒子に対する重力効果は，(ニュートン物理学では，運動法則で直接的に表現されていたのであるが) リーマン曲率が測地線に与える幾何学的な効果として間接的に記述されることになる．相対論の影響がゆ

るやかな舞台 (つまり，速度が遅く，重力が弱い場合) では，適当に時空を選べば，相対性理論が予測する重力効果は，(少なくとも質点の場合には) ニュートン力学で十分に近似することができる．光に対する重力効果 (ニュートン力学的にいえば重力が光を〈曲げる〉 こと) は純粋に相対性理論の範疇である．

アインシュタイン自身は，一般相対性理論の仕上げとして，太陽系に近似的な相対論を適用した．水星の近日点について，ニュートン力学で予測された位置と実際とのズレを解決したのである．それに使われたのが，モデルである時空の曲率と重力場の物理的特性を結びつける，**アインシュタインの方程式**であった．曲率の式が物理学的に意味を持っているのは，幾何学的にいうと，次の 3 種類の場合である．

1. 特殊相対性理論では，曲率はゼロである．つまり，時空は平坦になっている．理論を適用するのは重力が無いとみなされる状況なのである (例えば，核物理学).

2. **真空**, つまり**カラ**の時空では，重力源がない．アインシュタインの方程式でいえば，リッチ曲率が消える，ということである．このような時空を**リッチ平坦** (Ricci flat) と呼ぶ．例えば，孤立した星の重力場を (星自身は除いて) モデル化した時空はリッチ平坦である．なお，**リーマン曲率**は消えるとは限らない．実際，曲率を使って記述された重力が，自由落下している粒子に対する重力の幾何学的効果を表しているのである．

3. リッチ曲率がゼロでないとき，それは重力源の運動を表している．例えば，宇宙論における宇宙の時空モデルでは，銀河が充満しており，その重力の相互作用 (これがリッチ曲率で表現される) が銀河の相対論的運動を説明するのである．

定常的オブザーバー

時空における**オブザーバー**とは，固有時をパラメータとする質点のことである．オブザーバーの間では信号のやりとりができ，固有時を使うことができる．特殊相対性理論では，自由落下している単一のオブザーバーの固有時 (と空間) をミンコフスキー空間全体に適用することができる．だが一般相対性理論では，同様なことをするには複数のオブザーバーが必要となる．

時空 M における**オブザーバー場** U とは，未来向きの時間的単位ベクトル場のことである．よって U の積分曲線がオブザーバーになる．これを U−オブザーバーという．

定義 1.6.5　M におけるオブザーバー場 U に関して，M 上の滑らかな関数 $f > 0$ が存在し，fU がキリング・ベクトル場となるとき，U は**定常的** (stationary) である，と呼ばれる．(あるいは，M は U **に関して定常的**である，という.) さらに，U が超曲面に対して垂直 (つまり，$U^{\perp}$ が積分可能) であるとき，U は**静的** (static) である，と呼ばれる．

この定義の物理学的な解釈は次のようになる．U が定常的のときは，fU の局所的流れ $\{\psi_s\}$ が等長となり，これにより U−オブザーバー α は自分自身へ移される (普通，固有時は変化する). したがって，U−オブザーバーにとって，局所的に宇宙は不変なのである．定常的オブザーバー場 U が唯一存在するような時空を**絶対定常** (absolutely stationary) と呼び，そのとき，U−オブザーバーは**静止している** (at rest), という．

U が静止しているなら，U の各積分多様体は，3 次元の空間的部分空間で，流れにより等長になっているので，U−オブザーバーに関して共通の〈空間〉となる．つまり，時空が空間と時間に分離する，という重要な意味を持っているのである．

時空 M 全体が定常的であることはほとんどないが，M の連結開領域 $\mathcal{U}$(これも時空である) が定常的となることはある．実際の例では，孤立した星の外側の重力場をモデルとした時空は，その星の物理的特性が変わらない状態 (つまり，崩壊や爆発が生じないとき) では，定常的である．さらに，星が回転していない場合は，時空は静的となる．

時空において座標系 $\xi = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ を取り，∂_0 を未来向きの時間的ベクトル場とし，$\{\partial_1, \partial_2, \partial_3\}$ で張られる空間を空間的とする．このとき，(適当なパラメータに関して) x^0 曲線はオブザーバーとなり，$x^0 =$ (定数) で定められる断片は 3 次元のリーマン多様体となる．このような座標系では，ニュートン力学の枠組みと似たようなものとなるので，ニュートン力学の相対論的な類似を検討することができる．だが，ローレンツ多様体の任意の点で，このような座標系は多数存在する．意味のある結果を得るためには，その座標系が時空の幾何学と密接に関係しているものでなければならないのである．その一例をあげる．

補題 1.6.6　座標系 $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ において，∂_0 が未来向き時間的ベクトル場で，任意の i, j に対して$\partial g_{ij}/\partial x^0 = 0$ が成立しているとする．このとき，オブザーバー場 $U = \partial_0/|\partial_0|$ は定常的である．逆に，U が定常的ならば，各点において，上記を満たす座標系が取れる．

証明　任意の i, j に対して $\partial g_{ij}/\partial x^0 = 0$ を満たす座標系では，∂_0 はキリング・ベ

クトル場となる (1.3 節). したがって，$f = |\partial_0| > 0$ として，$fU = \partial_0$ である．

逆に，fU がキリング・ベクトル場である関数 $f > 0$ を考える．fU はゼロでないから，各点において，$\partial_0 = fU$ を満たす座標系 $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ が存在する．そして，∂_0 がキリング・ベクトル場であるから，任意の i, j について $\partial g_{ij}/\partial x^0 = 0$ となる．
□

この補題を静的なオブザーバー場に適用するなら，任意の $j > 0$ について $g_{0j} = 0$, という条件を付け加えればよい．

瞬間的オブザーバー

時間と空間の分離は，無限小ならば常に可能である．事象 $p \in M$ における**瞬間的オブザーバー** (instantaneous observer) とは，$T_p(M)$ の未来向き時間的単位ベクトル u のことをいう．つまり，u は，p を通り 4 元ベクトルが u であるオブザーバー α の瞬間的な情報を与えるものである．詳しくいえば，u により，時間軸を Ru とし，空間を $u^\perp \approx R^3$ として，$T_p(M)$ を時間と空間に分離する．u に関しては，p を通る粒子 α の速度を測る自然な方法がある (p における α の固有時を τ_0 と置く). α が質点ならば，$x \in u^\perp$ で $\alpha'(\tau_0) = au + x$ となる．図 1.8 から分かるように，a は，時間 t を持つ u 方向への，固有時 τ を持つ α の瞬間的な増加率を表している．つまり，$a = dt/d\tau$ である．同様に，$|x|$ は，$u^\perp$ における弧長 σ の，τ に関する増加率を表している．つまり，$|x| = d\sigma/d\tau$ である．したがって，u で測った事象 p における α の速度は

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma/d\tau}{d\tau/dt} = \frac{|x|}{a} < 1$$

となる．

右辺の不等式は次のようにして分かる．α は時間的であるから，

$$0 >< \alpha', \alpha' > |_p = -a^2 + |x|^2$$

であり，u と α' は未来向きであるから，$a > 0$ である．よって $|x| < a$ となる．

α を光粒子 γ に置き換えると，γ' は零的であるから，

$$0 =< \gamma', \gamma' >= -a^2 + |x|^2$$

より $d\sigma/ds = 1$ となる．

以上から，瞬間的オブザーバーで測ると，光の速度は $c = 1$ となり (幾何単位系に関しては付録Aを見よ), 質点の速度は 1 未満となる．

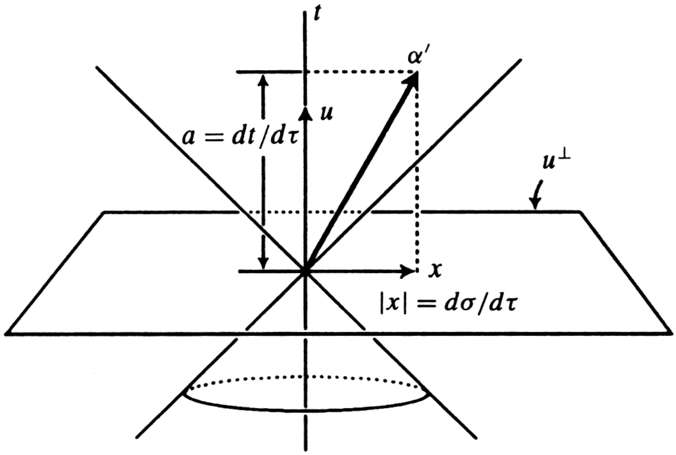


図 1.8　瞬間的オブザーバー u を使い，u の時間 t と空間 $u^{\perp}$ で粒子 α を測る．

どの瞬間的オブザーバーでも光の速度は同一であるが，それ以外のものは，瞬間的オブザーバーによって異なる．例えば，$p \in M$ における瞬間的オブザーバー $u_1 \neq u_2$ を考える．上記と同じようにして $u_1 = 1 \cdot u_1 + 0$ とすると，$d\sigma/dt = |x| = 0$ となり，u_1 は**静止**していることになる．このとき，$u_2 = au_1 + x$ であるから，$u_1 \neq u_2$ ならば $x \neq 0$ となり，u_1 からみれば u_2 は動いているのである．

しかるに，u_2 から $u_2 = 1 \cdot u_2 + 0, u_1 = bu_2 + y$ とすると，u_2 が静止しており u_1 が動いていることになる．

もう一度，u_1 から u_2 を見ることにする．上記の記号を使えば $a = dt_1/dt_2$ となる．しかるに，

$$-1 =< u_2, u_2 >= -a^2 + |x|^2$$

より

$$a = (1 + |x|^2)^{1/2} > 1$$

を得る．ゆえに，$dt_1/dt_2 > 1$ である．つまり，u_1 の時間の方が u_2 の時間よりも速く進むことになる．u_1 から見れば，u_1 が静止していて u_2 が動いているのだから，〈動いている時計は遅れる〉という標語を納得するのである．

同様にして，u_2 からみれば $dt_2/dt_1 > 1$ となる．u_2 が静止していて u_1 が動いて

いることになり，同様の標語を得ることになる．

もちろん，この u_1 と u_2 との差違は，$T_p(M)$ を時間と空間に分離する仕方が異なることに由来するものである．

特殊相対性理論

特殊相対性理論は，ミンコフスキー時空 R^4_1 における一般相対性理論である．よって，任意の時空 M では，接空間 $T_p(M) \approx R^4_1$ において特殊相対性理論が成立し，これにより，M における一般相対性理論とつながっている．

質点 α について，ある事象 $p = \alpha(\tau_0)$ における瞬間的オブザーバー u をとり，物理量 $\boldsymbol{p} = d\alpha/ds = md\alpha/d\tau$ を考える．(注意 1.6.4 を見よ.) このオブザーバーによる空間 $u^\perp$ への α の射影を $\bar{\alpha}$ とする．さて，p の近くで，M をその線形近似 $T_p(M) = Ru + u^\perp$ と (厳密には，p における指数写像を用いて) 同一視する．このとき，オブザーバーの時間 t と質点の固有時 τ を用いて，$\alpha(\tau) = t(\tau)u + \bar{\alpha}(\tau)$ と書ける．したがって，$d\alpha/d\tau = (dt/d\tau)u + d\bar{\alpha}/d\tau$ となり，これは時間的単位ベクトルであるから，$-1 = -(dt/d\tau)^2 + |d\bar{\alpha}/d\tau|^2$ となる．ここに，u で測った α のニュートン力学での速度を $v = |d\bar{\alpha}/dt| = d\sigma/dt$ とすると ($0 \le v < 1$ となっている), 合成関数の微分法則より $|d\bar{\alpha}/d\tau| = v\ dt/d\tau$ であるから，これを変形して $dt/d\tau = (1-v^2)^{-1/2}$ となる．以上より

$$p = m\frac{d\alpha}{d\tau} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}\,u + \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}\frac{d\bar{\alpha}}{dt}$$

を得る．

v が十分小さければ，$(1-v^2)^{-1/2}$ は 1 に近くなり，ニュートン力学の世界に近づく．上式右辺の第 2 項は，ニュートン力学の 3 元運動量に対応するものである．また，

$$E = m(1-v^2)^{-1/2} = m + \tfrac{1}{2}mv^2 + O(v^4)$$

と展開すると静力学のエネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ が出てくるが，アインシュタインは，このスカラー E を，u で測った粒子の**エネルギー**とし，静止質量 $m = E|_{v=0}$ はエネルギーの 1 形態にすぎない，とした．(任意の単位系をとれば，光の速度を c として，有名な公式 $E_0 = mc^2$ となる.)

相対論的な運動を直感的に考えるため，直線上を重力ゼロで運動する場合を取り上げる．これは，2 次元の特殊相対性理論であり，時空は $M \approx R^2_1$ である (もちろん，座標の取り方によらない性質を問題にする)．R^2_1 はユークリッド平面 R^2 と同じ測地線を持つ．つまり直線．光の進路は $dx/dt = \pm 1$, すなわち〈45 度の角度で進む〉の

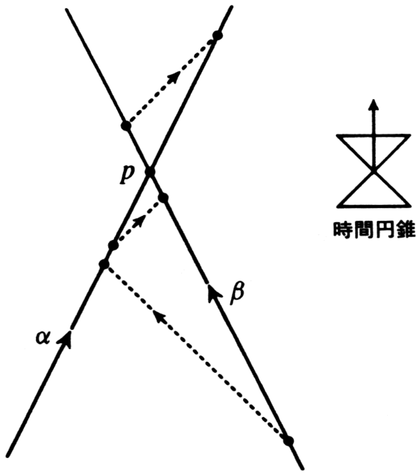


図 1.9　自由落下している α と β が信号を交換する．どちらも直線上を動き，事象 p で交差する．

であり，質量を持つ粒子の速度は $|dx/dt|$ よりも小さい．図示するときは，図 1.6 のように，未来方向を上向きにして描くのが慣例である．

いま，α と β を，銀河から十分離れた虚空を直線的に運動している宇宙船とする．これらの**世界線** (worldline), つまり宇宙船の筋道，を描くことにする．

事例 1.　同じ直線上を，α と β が，共に自由落下で近づきつつある場合．図 1.9 の点線は，相手に送る信号を表している．この場合，双方とも自由落下なので，自分は静止していて相手が近づいてくる，と解釈することになる．‖

事例 2.　α のみ自由落下している場合．β は，ロケットエンジンを作動させて加速しながら α に近づき，最近接した後で離れ，ロケットの加速により光の速度に近い速度になるとする．(〈速度〉をきちんと定義していないが，図 1.10 から，意味は分かる筈である.) ‖

図 1.10 でも，点線は信号を表している．奇数は α からの信号，偶 数は β からの信号，とする．

- α から送られた信号 (1) は β に届く．
- α は，β から送られた信号 (2), (4), (6) を受信する．

- α は，β からの信号 (2) に対して返事 (3) を送り，その返事 (4) を受け取る．
- α は，$\alpha(a)$ において信号 (4) を受け取る．だが，時を置かずに返信 (5) を送っても，β には届かない．もちろん，それ以降の (7) のような信号も届かない．

レーダーは，送信し，(受信したならば) すぐに返信する信号と考えることができる．

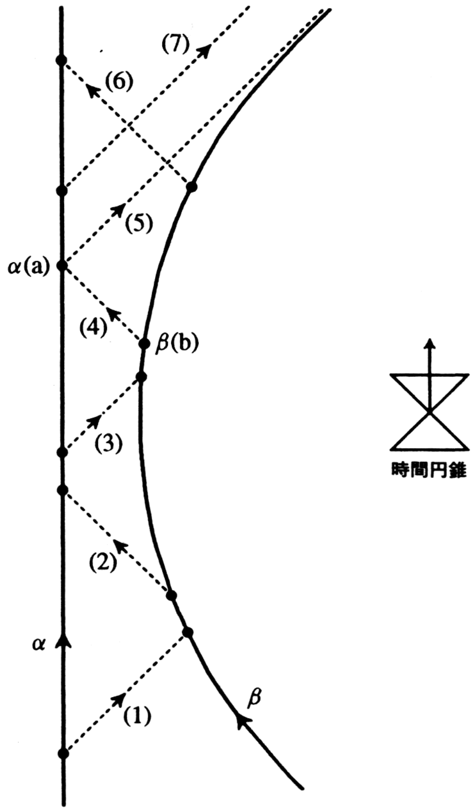


図 1.10　時間円錐自由落下しているオブザーバー α と，加速運動しているオブザーバー β が信号を交換する．

これを使えば，α は，$\alpha(a)$ で発信するのを止めた後でも，β の位置を完全に把握し続けることができる．しかし，β にとっては，α が描く世界線の有限開区間しか把握することができない．この開区間の端は $\alpha(a)$ である．$\beta(b)$ 以降に発信された信号は β に戻ってこない．もう一方の端は，β が発信し始めたレーダー波が最初に α に届いた位置である．

なお，α は，自由落下しているので，動いているのかどうか判断することができない．だが，β は，加速しているのを知ることができる．宇宙船 β の乗員は，ベルトを外せば，壁に押しつけられてしまうのである．

一般相対性理論の基礎について，詳しくは，Harpaz (1992), Misner, Thorne and Wheeler (1965), Sachs and Wu (1977) 等を見よ．

1.7　部分多様体

まず，滑らかな多様体の部分多様体について述べ，次に，擬リーマン多様体，特にローレンツ多様体の部分多様体について解説する．

滑らかな部分多様体

多様体 P が多様体 M の部分多様体であるとは，次の3つの条件を満たすものである．

1. P は M の部分集合であり，包含写像 $j\colon P \to M$ は滑らかである．
2. j の微分写像は単射である (つまり，$(dj)(v) = 0 \Rightarrow v = 0$ となる)．
3. P は M の部分位相空間である (つまり，双対位相を持つ)．

普通，dj を無視して，$T_p(P)$ をベクトル空間 $T_p(M)$ の部分空間と見なす．P の次元が $n = \dim M$ より1少ないとき，P を M の**超曲面** (hypersurface) と呼ぶ．

M の部分集合が与えられたとき，それを部分多様体にする方法 (つまり，位相とアトラスの設定) は，存在するとしても，一通りである．よって，M の部分集合が〈部分多様体である〉あるいは〈そうでない〉という表現は意味を持つ．

部分多様体を作る具体的な方法として，次のようなやり方がある．P を，滑らかな n 次元多様体 M の部分集合とする．P の各点 p において，p の M における近傍 $\mathcal{U}$ と座標系 $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$ で，$\mathcal{U}$ の k **断片** (k-slice)

$$x^{k+1} = x^{k+1}(p), \quad \ldots, \quad x^n = x^n(p)$$

が共通部分 $\mathcal{U} \cap P$ となるようなものが存在するなら，次のようにして，P は M の部分多様体となる．まず，P に誘導位相を導入する．次に，上記の座標系に対し，$\mathcal{U} \cap P$ 上の関数 $x^1, \ldots, x^k$ を座標系として P に多様体の構造を与える．これで M の部分多様体となる．

P が M の部分多様体ならば，各点 $p \in P \subset M$ において，(上記のような) **適合した座標系** (adapted coordinate system) が存在する．

R^n の部分多様体の簡単な例としては，座標軸，平面，$r=$ (定数) で作られる $(n-1)$ 次元球，等がある．滑らかな多様体は，ユークリッド空間の適当な部分多様体と微分同相であることが知られている．

M の部分多様体は，M の閉集合であるとき，**閉じている** (closed) と呼ぶ．(これはよく使われる言葉だが，普遍的な用語ではない.)

閉じた部分超曲面を得る簡単な方法として次がある．

補題 1.7.1 f を M 上の滑らかな実数値関数とし，c を f の値とする．集合 $S=\{p\in M|f(p)=c\}$ の各点で微分 df がゼロでないならば，S は M の閉じた部分超曲面である．

例えば，R^n において，$(u^1,\ldots,u^n)$ を普通の直交座標系とし，$f=\Sigma(u^i)^2$ とする．任意の $r>0$ に対して，$\{f=r^2\}$ は，上記の補題から，閉じた超曲面となる．実際，これは半径 r の $(n-1)$ 次元球である．

カー時空を構成するために 2 次元球が重要な役割をするので，その場合よく使われる座標系について述べておく．

注意 1.7.2 S^2 を R^3 内の半径 1 の球とする．S^2 の球座標系を S^2 に制限して，S^2 上の座標系 $\{\vartheta,\varphi\}$ を作る．(普通の使い方と逆なのであるが) 相対性理論では，図 1.11 のように，ϑ で余緯度，φ で経度を表すことが習慣になっている．φ が円座標なので (1.1 節参照)，座標系 $\{\vartheta,\varphi\}$ は，北極と南極 $(0,0,\pm1)$ を除いた球全体をカバーしている．座標関数 φ は両極で定義されないが，座標ベクトル場 ∂_φ は，球全体で滑らかに定義でき，両極ではゼロとなっている．$\vartheta(0,0,+1)=0$, $\vartheta(0,0,-1)=\pi$ として，関数 ϑ の定義域を球全体に拡張する $(0\le\vartheta\le\pi)$. ϑ は両極では連続でしかないが，$\cos\vartheta$ と $\sin\vartheta$ は，球全体で滑らか (実は解析的) である．‖

葉層

定義 1.7.3 滑らかな多様体 M 上の接 k 次元平面の滑らかな場のことを，k 次元の**分布** (distribution) Π と呼ぶ．こまかくいえば，Π は，各点 $p\in M$ に，接空間 $T_p(M)$ の k 次元部分空間 Π_p を対応させるものである．局所的には，Π は，k 個の滑らかなベクトル場を基底として持っている．

ベクトル・バンドルの用語を使えば，分布とは，M の接バンドル TM の部分バンドルである．M の部分多様体 P で，各点 $p\in P$ において $T_p(P)=\Pi_p$ となるもの

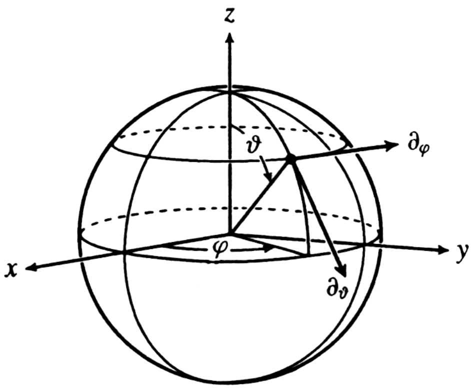


図 1.11　　2次元単位球上の球座標系 (ϑ, φ).

を，Π の**積分多様体** (integral manifold) と呼ぶ．M の各点において積分多様体が存在するとき，Π は**積分可能** (integrable) である，という．

ベクトル場 V に対し，全ての $p \in M$ において $V_p \in \Pi_p$ が成立するとき，V は分布 Π に**含まれる**，という．

定理 1.7.4(フロベニウスの定理)　M 上の分布 Π が積分可能である必要十分条件は，Π に含まれるベクトル場 X, Y に対して，その括弧積 $[X, Y]$ も Π に含まれることである．

この定理の必要条件は，2つのベクトル場が部分多様体に接しているなら，その括弧積も接していることから分かる．十分条件について．各点 $p \in M$ において座標系をとり，その k 断片 ($k = \dim \Pi$) が Π の積分多様体となるようにできる．このとき，各点 p を通り，最大連結積分多様体 P が一意に存在することが容易に分かる．(P は**はめ込まれた**部分多様体であることに注意しておく．つまり，誘導された位相を持つとはかぎらないのである.) このような Π の最大積分多様体の集まりを，k 次元 ($k = \dim \Pi$) の**葉層** (foliation) と呼ぶ．例えば，$R^n - \{0\}$ において，球 $\{f = r^2\}$ は $(n-1)$ 次元の葉層になっている．Pi は，この球の接空間である．

任意の1次元分布は，フロベニウスの定理における括弧積の条件が自明であるから，積分可能である．この葉層を**叢** (congruence) と呼ぶ．M の上の叢は，その1次元積分多様体で M を埋め尽くしている．一般に，このような曲線に対する標準的なパラメータは存在しない．もちろん，M 上でゼロとならないベクトル場 X があれば，そ

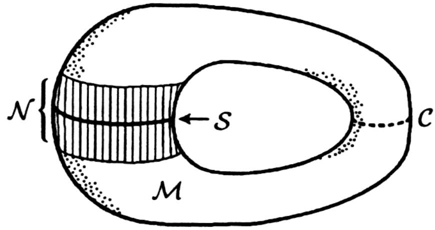


図 1.12 多様体 M の超曲面 S の管状近傍 $\mathcal{N}$.

れは M 上に叢を定める．1 次元の分布 Π が与えられたとき，このようなベクトル場が存在するとはかぎらない．存在するとき，Π は**向き付け可能** (orientable) である，という．このとき，Π は M の各点 p に方向を与える．つまり，$T_p(M)$ に，向き付けられた直線 Π_p が与えられたのである．

超曲面

曲線 α が点 $\alpha(s_0)$ で超曲面 S と交わる，つまり $\alpha(s_0) \in S$ であり，かつ $\alpha'(s_0)$ が S に接していないとき，曲線 α は S に**横断的** (transverse) である，と呼ぶ．つまり，α は その点で S に交差しているのである．

閉部分多様体は，特別に管状近傍と呼ばれる，簡単な近傍を持っている．多様体 M の閉超曲面を S とする．S の近傍 $\mathcal{N}$ は，S 上の直線バンドル $\pi\colon E \to S$ と，任意の $p \in S$ で $\phi(0_p) = p$ となる微分同相写像 $\phi\colon E \to \mathcal{N}$ が存在するとき，**管状** (tubular) **近傍**である，と呼ばれる．(直線バンドルとは，ファイバーが 1 次元のベクトル・バンドルである.) このとき，図 1.12 に示したように，$\mathcal{N}$ は，S を横断する曲線群が作る葉層になっている．

多様体 M の超曲面 S を考える．S 上で定義された M の連続ベクトル場 Z で，S に接することのない (よってゼロにならない) ものが存在するとき，S は M において**両側** (two-sided) を持つ，と呼ばれる．例えば，円筒を作る普通の帯 $S^1 \times R^1$ の中心円は両側を持つが，メビウス帯の中心円は両側を持たない．

M の連結閉超曲面 S の管状近傍を $\mathcal{N}$ とする．S が両側を持つならば，$\mathcal{N} - S$ は 2 つの連結成分を持つ．そうでないとき，S は**片側** (one-sided) しか持たないといい，$\mathcal{N} - S$ は連結になる．

閉超曲面 S は，$M - S$ が連結でないとき，M を 2 つに分離する．

補題 1.7.5　S を，連結多様体 M における，連結閉超曲面で両側を持つとするとき，$M - S$ は最大2個の連結成分を持つ．

証明　$\mathcal{N}$ を S の管状近傍とすると，$\mathcal{N} - S$ は2つの成分を持つ．M は連結であるから，各点 $m \in M$ に対して，m から S への曲線がある．S は閉であるから，この曲線は，S と交わる前に $\mathcal{N} - S$ と交わる．すなわち，$M - S$ の各成分は $\mathcal{N} - S$ の成分を含む．□

この証明は，S が片側しか持たないならば $M - S$ は連結であることを示している．S により分離されないのである．両側を持つ場合には，S は管状近傍を2つに分離するが，大域的には，図1.11にあるように，多様体 M 全体を分離するとはかぎらない．図の場合では，(S から離れた所で) M から円 C を取り除くと，S は，多様体 $M' = M - C$ を2つに分離することになる．

ローレンツ多様体の部分多様体

M をローレンツ多様体とする．M では，曲線の場合と同じように，部分多様体にも**因果的特性** を持つ場合がある．

定義 1.7.6　M の部分多様体 P において，任意の点 $p \in P$ の接空間 $T_p(P)$ が，$T_p(M)$ の部分ベクトル空間として，それぞれ，空間的，零的，時間的であるとする．このとき，P のことを，それぞれ，**空間的**，**零的**，**時間的**である，と呼ぶ．

もちろん，因果的特性を持たない部分多様体が多い．例えば，R^2_1 内の円では，接線は，空間的，零的，時間的の3つの状態を取る．M の計量テンソル $g = \langle\ ,\ \rangle$ を P に制限したもの，とは，g を $v, w \in T_p(P) \subset T_p(M)$ に適用することをいう．よって，空間的部分多様体はリーマン多様体であり，時間的部分多様体 ($\dim \geq 2$ とする) はローレンツ多様体である．この2種類の部分多様体の場合，P と M の幾何学は，古典的リーマン幾何学の場合と同様に，第2基本量 (形テンソル), ガウスの方程式，コダッチの方程式で結びついている (Eisenhart 1929, O'Neill 1983 を参照せよ).

一方，P が零的部分多様体の場合には，P に制限した g は退化であり，P が固有に持つ幾何学の内容は豊富ではない．しかし，零的部分多様体は，必然的に存在するものであり，一般相対性理論では重要な役割を受け持っている．

時空の部分多様体は，時間的接ベクトルが存在しないなら，**非時間的** (nontimelike) である，と呼ばれる．その一例は，空間的部分多様体，零的部分多様体である．非時

間的部分多様体 N には次の重要な性質がある．すなわち，時間的曲線 α が点 $\alpha(s_0)$ で N と交わるならば，接ベクトル $\alpha'(s_0)$ が時間的なので N に接していないから，α は N と横断的に交わっているのである．

時空 M において，**非時間的超曲面 S は両側を持っている**. 実際，M は時間的向き付け可能なので，大域的に定義された時間的ベクトル場 Z が存在するが，Z は S に接していないのである．

命題 1.7.7　時空 M において，非時間的な連結閉超曲面を S とする．$\mathcal{N}$ を S の管状近傍とすると，$\mathcal{N}-S$ の 2 つの連結成分を，次のようにして，$\mathcal{N}^+$ と $\mathcal{N}^-$ に区別することができる．任意の未来向き時間的曲線 α が，点 $\alpha(s_0)\in S$ で S を横断するとき，$\mathcal{N}^-$ から $\mathcal{N}^+$ へ横断する，として $\mathcal{N}^-, \mathcal{N}^+$ を定める．

証明　上記と同じように，Z を，M 上の未来向き時間的ベクトル場とする．S 内からスタートする Z の積分曲線は S を横断している．そこで，$p\in S$ を始点とする Z の積分曲線を β_p とすると，パラメータの最大の開区間を $(0,b_p)$ として，$\beta_p(s)\in\mathcal{N}-S$ である．全ての点 p に対して，このような点 $\beta_p(s)$ の全体は，$S\times(0,\infty)$ の連結部分空間の連続写像の像であり，それゆえ，$\mathcal{N}-S$ の 1 つの成分内に入っている．この成分を $\mathcal{N}^+$ と置き，もう一方を $\mathcal{N}^-$ とする．

曲線 α が，点 $p=\alpha(s_0)$ で S と横断的に交わっているとする．$\alpha'(s_0)$ と Z_p は，共に未来向きの時間的ベクトルであるから，接空間 $T_p(M)$ の超平面 $T_p(S)$ の同じ側に入っている．局所座標系を取れば，十分小さい $s>0$ に関して，点 $\beta_p(s)$ と $\alpha(s)$ は S の同じ側にあることが分かる．つまり，$\alpha(s)\in\mathcal{N}^+$ である．α は横断的であるから，十分小さい $s<0$ については $\alpha(s)\in\mathcal{N}^-$である．□

この命題から次の結果が導かれる．

系 1.7.8　時空 M において，非時間的な連結閉超曲面を S とする．もし S が M を分離するなら，$M-S$ は 2 つの成分 C^+, C^- を持つ．ここに，任意の未来向き時間的曲線 α が S を横断するとき，C^- から C^+ へ横断する，として C^-, C^+を定める．(C^+ を S の**未来側** (future side), C^- を**過去側** (past side), と呼ぶ.)

もう 1 つ超曲面関係の話題がある．ゼロとならないベクトル場 X は，$X^\perp$ が積分可能であるとき，**超曲面直交型** (hypersurface-orthogonal) と呼ばれる．このとき，$X^\perp$ の積分多様体は X に直交する超曲面である．例えば，$R^n-\{0\}$ において，外向きに

放射状に出ているベクトル場 $X = \Sigma u^i \partial_i$ は，常に球 $\{p\colon |p| = (\text{定数})\}$ と直交しているから，超曲面直交型である．

全測地的部分多様体

定義 1.7.9　擬リーマン多様体 M の部分多様体を P とする．M のベクトル場 X, Y が P に接しており，共変微分 $\nabla_X Y$ も P に接しているとき，P を**全測地的** (totally geodesic) 部分多様体という．

全測地的部分多様体の簡単な例としては，R^n の超平面，S^n の大円，等がある．次の命題とそれに関係する結果については，O'Neill (1983) の第 4 章を見よ．

命題 1.7.10　P を M の全測地的部分多様体とする．測地線 γ が，点 $\gamma(s_0)$ において P と交わり，$\gamma'(s_0)$ が接しているなら，$\gamma(s_0)$ の近くで，γ は P 上にある．

γ の全体が P 上にあるとはかぎらない．例えば，P が R^3 内の平面の開円板ならば，円板上にある直線 (測地線である) は，いつかは円板から出てしまう．部分多様体が閉集合ならば，そこから出てしまうことはない．

系 1.7.11　P を M の全測地的閉部分多様体とする．測地線 $\gamma\colon I \to M$ が I の 1 点で P に接しているなら，γ の全体が P 上にある．

証明　$\gamma'(b)$ が P に接しているとすると，上の命題から，集合 $I_P = \{s \in I\colon \gamma(s) \in P\}$ は，空でなく，開集合である．ところで，P は閉集合であるから，I_P も閉である．しかるに I は連結なので，$I_P = I$ となる．□

次は，全測地的閉部分多様体の重要な例である．

定理 1.7.12　擬リーマン多様体 M の部分集合 P を，次の (1) または (2) で定める．

(1) 1 つの等長写像 $\phi\colon M \to M$ の不動点からなる集合．

(2) 1 つのキリング・ベクトル場 の零点からなる集合．

このとき，P は M の全測地的閉部分多様体である．

証明　証明の概略を述べておく．

(1) 明らかに P は閉集合である．$p \in P$ において，$T_p(M)$ のベクトル v で，$d\phi(v) = v$ を満たすものの全体を F_p と置く．F_p は $T_p(M)$ の部分空間である．任意の $v \in F_p$ に対し，測地線 γ_v は，任意の $s \in \gamma_v$ で

$$\phi(\gamma_v(s)) = \gamma_{d\phi(v)}(s) = \gamma_v(s)$$

を満たすから，P 上にある．さらに，p の近くでは，P はこのような測地線全体で構成されている．任意の $p \in P$ についてこれが成立するから，P は全測地的となる．

(2) は，X の流れについて上記と同じような議論をすればよい．□

命題 1.7.10 をいい換えると次のようになる．M の全測地的部分多様体 P 上に曲線 α を取り，V を，α に沿って平行な M のベクトル場とする (つまり，$V' = \nabla_{\alpha'} V = 0$ が成立する)．そこで，もし，V が 1 点で P に接しているなら，V は常に P に接している．

このことから，ローレンツ多様体の連結な全測地的部分多様体は因果的特性を持っていることが分かる．実際，部分多様体の接空間が 1 点で (例えば) 空間的ならば，平行移動で因果的特性は保存されるから，全ての点で接空間は空間的となっているのである．

注意 1.7.13　一般の部分多様体 P と全測地的部分多様体とのズレを測るのが**形テンソル** (shape tensor)(あるいは**第 2 基本形式テンソル** (second fundamental form tensor)S である．これは，P の接ベクトル場 X, Y に対し，M における共変微分 $\nabla_X Y$ の P に直交する成分を $S(X,Y)$ として定義する．つまり $S(X,Y) = \mathrm{nor}\nabla_X Y$．よって，$P$ が全測地的である条件は $S = 0$ である．定理 1.3.1 で述べた ∇ の性質を使えば，S がテンソルであること，すなわち $\mathfrak{F}(P)$ 双線形であること，は容易に分かる．
‖

1.8　カルタン流の計算法

カルタン流の計算法とは，微分形式 (付録 B 参照) を計算の道具として幾何学を展開することである．ここではそれの概説を述べるだけにするが，それでも，共変微分や曲率の計算をする時に強力な道具になることが分かるはずである．

擬リーマン多様体 M 上の正規直交基標構場を $\{E_1, \ldots, E_n\}$ とする．標構場は大域的に存在するとはかぎらないので，M を，より大きい多様体の開集合としておく．この標構場の双対 1 形式 $\{\omega^1, \ldots, \omega^n\}$ を取り，**正規直交余標構場** (orthonormal coframe) とする (ω^i は $\omega^i(E_j) = \delta^i{}_j$ で与えられる). 正規直交余標構場と M の線素 ds^2 の間には次のような関係がある．

補題 1.8.1　形式 $\omega^1, \ldots, \omega^n$ が M 上の正規直交余標構場で，$(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ が M の符号数であるための必要十分条件は

$$ds^2 = \Sigma \varepsilon_i (\omega^i)^2$$

が成立することである．

証明　$\{\omega^i\}$ と $\{\varepsilon_i\}$ が条件を満たすとする．その双対標構場を $\{E_j\}$ とする．任意の接ベクトル v に関して $v = \Sigma \omega^m(v) E_m$ であるから，

$$ds^2(v) = < v, v > = \sum_{m,k} \omega^m(v)\, \omega^k(v) < E_m, E_k >$$

となる．ここで，$< E_m, E_k > = \delta_{mk} \varepsilon_m$ であるから，上式は

$$\Sigma\ \varepsilon_m (\omega^m(v))^2 = [\ \Sigma\ \varepsilon_m (\omega^m)^2](v)$$

となる．

逆に，$\{\omega^i\}$ を 1 形式，$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ を ± 1 なる数として，$ds^2 = \Sigma\ \varepsilon_m (\omega^m)^2$ が成立するとする．このとき計量テンソルは $g = \Sigma\ \varepsilon_m\, \omega^m \otimes \omega^m$ である．$\{\omega^i\}$ に双対なベクトル場を $\{E_i\}$ とすると，

$$< E_i, E_j > = g(E_i, E_j) = \Sigma \varepsilon_m \omega^m(E_i) \omega^m(E_j) = \Sigma \varepsilon_m \delta_{mi} \delta_{mj} = \varepsilon_i \delta_{ij}$$

なので，これは正規直交標構場をなす．よって，$(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ が符号数で，1 形式 ω^i は正規直交していることが分かる．□

定義 1.8.2　∇ をレビ－チビタの共変微分とする．標構場 $\{E_1, \ldots, E_n\}$ と任意の接ベクトル v に関して

$$\omega^i_j(v) = \omega^i(\nabla_v E_j)$$

で与えられる1形式 $\omega^i_j (1 \leq i, j \leq n)$ を，標構場 $\{E_i\}$ に関する**接続形式** (connection form) と呼ぶ．

したがって，双対公式から $\nabla_v E_j = \Sigma\, \omega^m{}_j(v) E_m$ を得る．これは，v 方向へ標構場が変わるときのズレを表すのが行列 $(\omega^i_j(v))$ であることを示している．カルタン流の計算法では，クリストッフェルの記号に相当するものが接続形式なのである．

補題 1.8.3(第1構造方程式)　任意の i について

$$d\,\omega^i = -\Sigma\, \omega^i{}_m \wedge \omega^m$$

が成立する．

証明　$1 \leq a, b \leq n$ について，外微分の公式 (付録B参照) から，

$$(d\omega^i)(E_a, E_b) = E_a \omega^i(E_b) - E_b \omega^i(E_a) - \omega^i[E_a, E_b] = -\omega^i[E_a, E_b]$$

を得る．右辺の等号は，$\omega^i(E_j) = \varepsilon_i \delta_{ij}$ が定数であることより出る．

しかるに，余式の右辺より

$$\begin{aligned}
[-\Sigma\omega^i{}_m \wedge \omega^m](E_a, E_b) &= -\Sigma\omega^i{}_m(E_a)\omega^m(E_b) + \Sigma\omega^i{}_m(E_b)\omega^m(E_a) \\
&= -\omega^i{}_b(E_a) + \omega^i{}_a(E_b) = -\omega^i(\nabla_{E_a} E_b) + \omega^i(\nabla_{E_b} E_a) \\
&= -\omega^i(\nabla_{E_a} E_b - \nabla_{E_b} E_a) = -\omega^j[E_a, E_b]
\end{aligned}$$

となる．□

クリストッフェルの記号と同じように，接続形式もテンソルではない．だが，補題1.3.2と同様にして，添字の上げ下げをすることができる．添字 i について行うならば $\varepsilon_i =< E_i, E_i >$ を掛ければよい．すなわち，

$$\begin{aligned}
\omega_{ij}(v) &=< E_i, \nabla_v(E_j) >=< E_i, \Sigma\omega^m{}_j(v) E_m > \\
&= \Sigma\omega^m{}_j(v) < E_i, E_m >= \varepsilon_i \omega^i{}_j(v)
\end{aligned}$$

であるから，$\omega_{ij} = \varepsilon_i \omega^i_j$ となるのである．(1.2節で述べたように，本書では弱い形のアインシュタインの約束を採用しているから，上式の右辺では和を取っていない．強い形の約束とは異なり，和を取らないこの表示は，これからもよく出てくる.) この式に ε_i を掛けると $\omega^i{}_j = \varepsilon_i\, \omega_{ij}$ となる．

補題 1.8.4　接続形式に関して

$$\omega^i{}_j = -\varepsilon_i \varepsilon_j \omega^j{}_i$$

が成立する．よって特に $\omega^i{}_i = 0$ である．

証明　$< E_i, E_j >$ は定数であるから，任意の接ベクトル v に対して，$< \nabla_v E_i, E_j > + < \nabla_v E_j, E_i >= 0$ が成立する．先の計算式から $\omega_{ij}(v) + \omega_{ji}(v) = 0$ となる．つまり，ω_{ij} は i と j に関して歪対称である．左側の添字を上げて$\varepsilon_j \omega^j{}_i(v) + \varepsilon_i \omega^i_j(v) = 0$ となる．□

これから，接続形式は，$\omega^i{}_j$ $(i < j)$ が決まれば決定されることが分かる．

系 1.8.5　余標構場 $\{\omega^1, \ldots, \omega^n\}$ に対して，接続形式 $\omega^i{}_j$ は，補題 1.8.3 と補題 1.8.4 を満たす唯一の 1 形式である．

この結果から，試行錯誤して接続形式を見つけることも可能である．しかしここでは，余標構場と符号数で接続形式を表示する式を与えておく．これは古典的なクリストッフェルの記号に似た形であり，直感的に接続形式を見つけることができなかった場合には役立つものである．

証明　第 1 構造方程式 (補題 1.8.3) に E_j と E_k を入れて，ε_i を掛けると

$$\varepsilon_i d\omega^i(E_j, E_k) = -\varepsilon_i \omega^i{}_k(E_j) + \varepsilon_i \omega^i{}_j(E_k)$$

となる．この式で添字 i, j, k を巡回し，補題 1.8.4 を用いて

$$\varepsilon_j d\omega^j(E_k, E_i) = \varepsilon_i \omega^i{}_j(E_k) + \varepsilon_j \omega^j{}_k(E_i)$$

となる．同様にして

$$\varepsilon_k d\omega^k(E_i, E_j) = \varepsilon_j \omega^j{}_k(E_i) - \varepsilon_i \omega^i{}_k(E_j)$$

を得る．最初の 2 式を加え，第 3 式を引くと

$$\varepsilon_i d\omega^i(E_j, E_k) + \varepsilon_j d\omega^j(E_k, E_i) - \varepsilon_k d\omega^k(E_i, E_j) = 2\varepsilon_i \omega^i{}_j(E_k)$$

となる．これから，求める式

$$\omega^i{}_j(E_k) = \frac{1}{2}\varepsilon_i[\varepsilon_i d\omega^i(E_j, E_k) + \varepsilon_j d\omega^j(E_k, E_i) - \varepsilon_k d\omega^k(E_i, E_j)]$$

を得る．□

カルタン流の方法では，曲率も微分形式で表示する．

定義 1.8.6 任意の接ベクトル v, w に対して，標構場 $\{E_i\}$ に関する曲率作用素 R_{vw} の行列を $\Omega^i_j(v, w)$ と置く．つまり

$$R_{vw}(E_j) = \sum_i \Omega^i{}_j(v, w)E_i$$

である．

R はテンソルであり，$R_{vw} = -R_{wv}$ なので，この $\Omega^i{}_j$ は 2 形式である．この形式 $\Omega^i{}_j$ を，標構場に関する**曲率形式** (curvature form) と呼ぶ．

命題 1.8.7(第 2 構造方程式) 曲率形式に関して

$$\Omega^i{}_j = d\omega^i{}_j + \Sigma\omega^i{}_m \wedge \omega^m{}_j$$

が成立する．

証明 $1 \leq a, b \leq n$ に対し，Ω の定義から

$$R_{E_aE_b}(E_j) = \Sigma R^i_{jab}(E_i) = \Sigma\Omega^i{}_j(E_a, E_b)E_i$$

となる．一方 R の定義から $R_{E_aE_b}(E_j)$ を計算すると求める式を得る．実際，まず

$$R_{E_aE_b}(E_j) = \nabla_{E_a}(\nabla_{E_b}E_j) - \nabla_{E_b}(\nabla_{E_a}E_j) - \nabla_{[E_a,E_b]}E_j$$

である．そして，$\nabla_{E_a}(E_j) = \Sigma\omega^i{}_j(E_a)E_i$ であるから，右辺の各項は

$$\begin{aligned}
\nabla_{E_a}(\nabla_{E_b}E_j) &= \Sigma E_a[\omega^i{}_j(E_b)]E_i + \Sigma\omega^m{}_j(E_b)\nabla_{E_a}E_m \\
&= \Sigma E_a[\omega^i{}_j(E_b)]E_i + \Sigma\omega^m{}_j(E_b)\cdot\omega^i{}_m(E_b)E_i, \\
\nabla_{E_b}(\nabla_{E_a}E_j) &= (\text{a, b を交換し上式と同じ}) \\
\nabla_{[E_a,E_b]}E_j &= \Sigma\omega^i{}_j([E_a, E_b])E_i
\end{aligned}$$

となる．これらを右辺に代入して

$$R_{E_aE_b}(E_j) = \sum_i \left[E_a\omega^i{}_j(E_b) - E_b\omega^i{}_j(E_a) - \omega^i{}_j[E_a, E_b]\right]E_i$$
$$+ \sum_{m,i}\left[\omega^i{}_m(E_a)\omega^m{}_j(E_b) - \omega^i{}_m(E_b)\omega^m{}_j(E_a)\right]E_i$$

を得る．この中括弧の中は，それぞれ，微分形式 $d\omega^i{}_j$ と $\Sigma\omega^i{}_m \wedge \omega^m{}_j$ の，E_a, E_b における値である．よって

$$R_{E_aE_b}(E_j) = \sum_i [d\omega^i{}_j + \sum \omega^i{}_m \wedge \omega^m{}_j](E_a, E_b)\, E_i$$

である．これを最初の式に代入すれば，任意の E_a, E_b に対して求める式が出る．□

接続形式のときと同様に，Ω の添字を下げると $\Omega_{ij} = \varepsilon_i\Omega^i{}_j$ となる．曲率の歪対称性から，Ω は i と j で歪対称である．よって，

系 1.8.8　曲率形式に関し

$$\Omega^i{}_j = -\varepsilon_i\varepsilon_j\Omega^j{}_i$$

が成立する．特に $\Omega^i{}_i = 0$ である．

この系と補題 1.8.4 から，$(\Omega^i{}_i)$ と $(\omega^i{}_i)$ は，行列に値を取る形式と見れば，リー代数に値をとっていることが分かる (O'Neill 1983 の補題 9.3 を見よ).

2 つの定義を比べれば，曲率テンソル R の標構場 $\{E_i\}$ に関する成分は

$$R^i_{jk\ell} = \Omega^i{}_i(E_k, E_\ell)$$

となる．よって $R_{ijk\ell} = \varepsilon_i R^i_{jk\ell}$ である．標構場が作る 2 次元平面の断面曲率は

$$K(\Pi_{ij}) = K(E_i, E_j) = \varepsilon_i\varepsilon_j R_{ijij} = \varepsilon_j R^i_{jij}$$

であり，スカラー曲率 k は $k = \Sigma\varepsilon_i\varepsilon_j\varepsilon_k\varepsilon_\ell(R_{ijk\ell})^2$ となる．

注意 1.8.9　M の正規直交標構場を $\{E_i\}$ とする．

1. M がリーマン多様体ならば，ε_i は全て $+1$ である．つまり，添字の上げ下げのときに符号が変化することはない．よって行列 $(\omega^i{}_i)$ と $(\Omega^i{}_i)$ は歪対称となる．

2. M がローレンツ多様体のときは，〈時間的〉方向の添字 $0 \approx 4$ のときに符号が変わる．よって

$$\omega^i{}_0 = \omega^0{}_i$$

であるが，$i, j > 0$ では

$$\omega^i{}_j = -\omega^j{}_i$$

となる．$\Omega^i{}_j$ についても同様である．∥

カルタン流の手法を使うのは 2.6 節と 2.7 節であるが，ここで，この手法が有用である例を 1 つあげておく．

系 1.8.10　(u, v) を，擬リーマン曲面 S の直交座標とする．いま，

$$< \partial_u, \partial_u >= E = \varepsilon_1 e^2, \quad < \partial_v, \partial_v >= G = \varepsilon_2 g^2$$

と置く．ここに，$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は ± 1 で，$e > 0, g > 0$ である．このとき，これらの記号を使うと，S のガウス曲率は

$$K_S = \frac{-1}{eg}\left[\varepsilon_1 \left(\frac{e_v}{g}\right)_v + \varepsilon_2 \left(\frac{g_u}{e}\right)_u\right]$$

と表すことができる．

証明　2 つのベクトル場を $E_1 = \partial_u/e,\ E_2 = \partial_v/g$ で定義する．明らかに，これらは正規直交標構場をなしている．1.2 節の定義から，ガウス曲率 K_S は

$$< R_{E_1 E_2} E_2, E_1 >=< \Omega^1{}_2(E_1, E_2)E_1, E_1 >= \varepsilon_1 \Omega^1{}_2(E_1, E_2)$$

で与えられる．

双対余標構場は $\omega^1 = e\,du,\ \omega^2 = g\,dv$ である．第 1 構造方程式を使い，接続形式 $\omega^1{}_2 = -\varepsilon_1\varepsilon_2\omega^2{}_1$ を計算する．まず，

$$d\omega^1 = e_v\,dv \wedge\, du = -(e_v/g)\,du \wedge \omega^2$$
$$d\omega^2 = g_u\,du \wedge\, dv = -(g_u/e)\,dv \wedge \omega^1$$

である．最初の式より $\omega^1{}_2 = (e_v/g)\,du + (*)\,dv$ となる．2 番目の式より，$\omega^2{}_1 = (*)du + (g_u/e)\,dv$ であるから，$\omega^1{}_2 = (*)\,du - \varepsilon_1\varepsilon_2(g_u/e)\,dv$ となる．ここに，(*) は省略したことを表す．これらの式の係数を比べて

$$\omega^1{}_2 = (e_v/g)\,du - \varepsilon_1\varepsilon_2(g_u/e)\,dv$$

となる．ところで，2 次元の場合には，第 2 構造方程式は $\Omega^1{}_2 = d\omega^1{}_2$ となる．ここで，

$$\begin{aligned} d\omega^1{}_2 &= (e_v/g)_v\,dv \wedge du - \varepsilon_1\varepsilon_2(g_u/e)_u\,du \wedge dv \\ &= -[(e_v/g)_v + \varepsilon_1\varepsilon_2(g_u/e)_u]\,du \wedge dv \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} K_S &= \varepsilon_1\Omega^1{}_2(E_1, E_2) = \varepsilon_1 d\omega^1{}_2(E_1, E_2) = \varepsilon_1 d\omega^1{}_2(\partial_u/e, \partial_v/g) \\ &= -\varepsilon_1[(e_v/g)_v + \varepsilon_1\varepsilon_2(g_u/e)_u]/(eg) \end{aligned}$$

を得る．□

1.9　カー・ブラックホールの概説

カー時空は，回転する星の重力場を記述する標準的な相対論的モデルである．この時空は，星が終末期を迎えた時に，その質量が大きいために収縮が止まらずブラックホールとなる場合に現れる．カー時空の質的な特徴は，質量と回転速度で決定される．最も興味深いのは，回転がかなり遅い場合である．(回転が完全に停止すると，カー時空はシュワルツシルド時空に帰着する.)

宇宙にブラックホールが存在することは，広く認められている．ブラックホールの存在を認めないで天文学を展開するのは，現在では，ほとんど不可能である．よく知られているように，ブラックホールから光が逃げることはできない．しかし，一方の星が見えない連星の運動から，間接的にブラックホールの存在を証明することができるのである．

宇宙船に乗り，孤立した，回転が遅いブラックホールに近づいたとしよう．背景の星群の中に，黒い円板としてブラックホールが認識される．シュワルツシルド・ブラックホールについて知識のある探検者は，地平線内に入ろうとはしない．シュワルツシルド・ブラックホールの場合には，入ったら最後，地平線から外へ出ることは不可能なのである．それにもっと直截的なことに，地平線内に入ると，質量のあるものは，あっというまに，時空の特異点に飲み込まれてしまうのである．

では，カー・ブラックホールの地平線内に入るとどうなるであろうか．そこにはもう 1 つの地平線がある．この地平線の中に入ると，そこで特異点に遭遇する．特異点といっても,〈点〉ではない，無限大の重力場が作る〈リング状〉の特異領域なのである．幸いなことに，この特異領域は，シュワルツシルド・ブラックホールの場合ほど危険ではない．リングの境界に存在する〈咽喉〉を通れば，この領域を避けて，時空の新しい領域へ行くことができる．新しい領域では，ブラックホールの重力効果が逆(引力ではなく斥力) になるので，リング状の特異領域の危険を避けることは容易である．距離が離れれば負の重力は (正の場合と同じように) 弱くなり，ついには無視できるようになる．

ここで丁寧に観察すれば，奇妙な現象を発見することができる．リング状の特異領域は，タイムマシンである空間的立体トーラスの外側の赤道になっている．ここでは，2 重になっている地平線の内側に存在する任意の過去へ行けるのである．異なる年齢のあなた自身を 4 人集めてブリッジをすることもできる．しかし，ジュリアス・シーザーやあなた自身の (探検に出発する前の) 幼年時代に会うことはできない．なぜなら，彼らは，2 重の地平線の外側に存在しているのである．

上記のような略説は，それなりに的を得ているのだが，もちろん，こまかい所は不完全である．カー・ブラックホール は，もっと大きく，より対称的である．上に述べた説明 (そして図 2.2 の図) では，地平線の外側での過去，負の重力部分での未来が欠けている．2 つの地平線にはさまれた部分の説明もない．この部分は，ニュートン宇宙的な，中心が同じ 2 つの球に時間軸，とは完全に異なっているのである．ここでは，空間と時間が完全に混交している．小石を投げ入れれば，有限時間のうちに消え，新しいモノが手品のように現れてくる．第 3 章で完全なカー時空のモデルを作成する．すなわち，2 つの地平線の間にさらに 2 つの地平線があり，それらの地平線が交わる空間的 2 次元球の周りに対称的にカー時空が構成されるのである．

第2章

カー時空序論

直感的にカー計量をとらえるために，中心を通る垂直軸の周りに回転している，球対称の孤立した星を考える．このような星の状況を記述するには，常識的には，R^3 の球座標 r, ϑ, φ と，時間座標として R^1 の t を使えばよい．ここに，r は星の中心からの距離，ϑ は余緯度，φ は経度であり，星は，φ の正の方向に回転しているものとする．なお，問題にするのは，星自身ではなく，星が作る重力場である．(ここでは〈星〉という語を大まかに使い，**ブラックホール**も含めている.)

この座標は，ニュートン力学的な表現にも使われるが，その場合には，星が回転しているかどうかは意味がなくなる．さらにこの座標は，2 種類の相対論のモデルにも (少なくとも理論展開の最初の段階で) 使われている．つまり，星が回転していない場合を記述するシュワルツシルド時空と，回転している場合を記述するカー時空である．カー時空を表すこの座標を，特に**ボイヤー－リンキスト座標** (Boyer-Lindquist coordinate) と言う．

本章の主な目的は，カー計量を定義する領域を拡張することである．これは，普通の星の場合には，その外側をモデル化するのだから，容易である．ブラックホールの場合は話が別となる．星の容積がなくなった場合には，遠方の常識的な場所から記述を始め，物理的に観測不可能な内部領域まで，時空を拡張しなければならない．ブラックホールが高速で回転しているときは，簡単に時空の構成ができる．しかしながら，主に問題となる回転が遅い場合には，複数の段階に分けて拡張しなければならない．そのような拡張を行うには，先ず，はじめの領域であるボイヤー－リンキスト領域に関する幾何学が必要となる．特に重要なのは，2 組の**主要零的測地線** (principal null geodesic) の族である．この段階でも，基本となる幾何学量であるリーマン曲率は計算できる．また，特別な部分多様体である**地平面**についても言及する．これは，はじめの領域を拡張すると，それに伴って大きくなっていく．これらを基にして，次の章において，(ゆっくり回転している) 最大カー・ブラックホールを完全に構成することになる．

2.1　カー計量

カー計量テンソルを表示する一番簡単な方法は，上に述べたように，$R^4 = R^3 \times R^1$ 上の球座標（t, r, ϑ, φ）を使うことである．ここに，r, ϑ, φ が R^3 の球座標で，R^1 の t を時間座標とする (第 1 章参照)．回転の影響でシュワルツシルド計量がカー計量に変わることを検討するため，両方の計量の成分 g_{ij} を (それに，比較対照に使うミンコフスキー時空の計量の成分も) この座標で表すことにする．

カー時空には 2 つのパラメータがある．**質量**の $\mathrm{M} > 0$ と，**単位質量あたりの角運動量**の $a(\neq 0)$ である．特に $a = 0$ として回転を止めると，カー時空はシュワルツシルド時空に帰着する．さらに，$\mathrm{M} = 0$ として質量を除くと，(空である) ミンコフスキー時空 となってしまう．

カー時空を研究するためには次の 2 式

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta$$
$$\Delta = r^2 - 2\mathrm{M}r + a^2$$

がよく使われる．シュワルツシルド時空の場合を見るには，この式で $a = 0$ とすればよい．すなわち，ρ は r^2 を一般化したものになっている．また，Δ は，

$$\frac{\Delta}{r^2} = 1 - \frac{2\mathrm{M}}{r} + \frac{a^2}{r^2}$$

と書けるから，シュワルツシルド時空の地平面関数 $h(r) = 1 - 2\mathrm{M}/r$ を一般化したものなのである．

表 2.1 は，3 つの計量の成分を，座標 $(t, r, \vartheta, \varphi)$ で記述したものである．この表から次のことが分かる．

1. カー計量は，$a = 0$ のときにシュワルツシルド計量に帰着する．
2. ボイヤー－リンキスト座標は，球座標なので，z 軸では ($\sin\vartheta = 0$ となるので) 定義されない．さらに，上記の公式から，$\rho^2 = 0$ または $\Delta = 0$ の所でカー計量は定義できないことが分かる．シュワルツシルド時空の場合と同じように，$\Delta = 0$ では**地平面**になっている．
3. 計量の式の中に座標 t, φ が現れないから，座標ベクトル場 $\partial_t, \partial_\varphi$ はキリング・ベクトル場 (1.3 節参照) である．∂_t の流れで作る変換 $t \to t + \Delta t$ は，他の座標を動かさない．おおまかに言うと，この等長変換で時間が不変であることを示している．∂_φ の流れでは座標の回転 $\varphi \to \varphi + \Delta\varphi$ となり，この等長変換は軸対称を示している．

ミンコフスキー計量 (1908)		シュワルツシルド計量 (1916)	ボイヤー–リンキスト座標 (1966)
g_{tt}	-1	$-1+2\mathrm{M}/r$	$-1+2\mathrm{M}r/\rho^2$
g_{rr}	$+1$	$[1-(2\mathrm{M}/r)]^{-1}=r/(r-2\mathrm{M})$	ρ^2/Δ
$g_{\vartheta\vartheta}$	r^2	r^2	$\rho^2=r^2+a^2\cos^2\vartheta$
$g_{\varphi\varphi}$	$r^2\sin^2\vartheta$	$r^2\sin^2\vartheta$	$\left[r^2+a^2+\dfrac{2\mathrm{M}ra^2\sin^2\vartheta}{\rho^2}\right]\sin^2\vartheta$
$g_{ij}(i\neq j)$	全てゼロ	全てゼロ	$g_{\varphi t}=g_{t\varphi}=-2\mathrm{M}ra\sin^2\vartheta/\rho^2$ 以外ゼロ

表 2.1

4. 計量の形から，$t\to -t, \varphi\to -\varphi$ と，両方の符号を変えると，これは等長変換であることが分かる．時間を戻せば回転は逆向きになるわけである．($g_{t\varphi}\neq 0$ であるから，t や φ の符号を単独に変えても等長変換にはならない.)
5. カー時空は**漸近的に平坦** (asymptotically flat) である．座標 r を大きくすることは,〈星から遠ざかる〉ことを意味している．これは，$r\to\infty$ にしたがってカー計量がミンコフスキー計量になることである．星から遠ざかれば，星の重力は弱まるのだから，この設定は当然のものといえる．一般に，漸近的平坦という概念は自明ではない (Wald 1984)．しかし，第 3 章で述べる r の特別な性質により，カー時空のモデルではこの概念が成立する (Ashtekar and Hansen 1978).

以上のような計量の成分がどのようにして構成されたのかについては，複雑なので省略する．これらの式の相互関係を調べていく．先ず，簡単のために

$$S=\sin\vartheta,\qquad C=\cos\vartheta$$

と置くことにする.

補題 2.1.1　計量の成分をボイヤー–リンキスト座標で表示したとき，次の**計量恒等式** (metric identity) が成立する.

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{m1}) && g_{\varphi\varphi}+aS^2g_{\varphi t}=(r^2+a^2)S^2,\\
&(\mathrm{m2}) && g_{t\varphi}+aS^2g_{tt}=-aS^2,\\
&(\mathrm{m3}) && ag_{\varphi\varphi}+(r^2+a^2)g_{t\varphi}=\Delta aS^2,\\
&(\mathrm{m4}) && ag_{t\varphi}+(r^2+a^2)g_{tt}=-\Delta.
\end{aligned}$$

$g_{\varphi\varphi}$ と $g_{\varphi t}$ は複雑な形をしているので，見やすくするため，できるだけ頻繁に計量

恒等式を使うことにする．先ず，$g_{ij} =< \partial_i, \partial_j >$ であるから，ベクトル場を与えてそれとのスカラー積で記述する．

定義 2.1.2　ベクトル場

$$V = (r^2 + a^2)\partial_t + a\partial_\varphi,$$
$$W = \partial_\varphi + aS^2\partial_t$$

を**標準カー・ベクトル場** (canonical Kerr vector field) という．

この V, W を使うと，計量恒等式は

$$< V, \partial_\varphi > = \Delta a S^2,$$
$$< W, \partial_\varphi > = (r^2 + a^2)S^2,$$
$$< V, \partial_t > = -\Delta,$$
$$< W, \partial_t > = -aS^2,$$

と簡単になる．

補題 2.1.3　次の式が成立する．

$$< V, V >= -\Delta\rho^2, \quad < W, W >= \rho^2 S^2, \quad < V, W >= 0$$

証明　簡単な計算である．例えば，

$$\begin{aligned} < V, V > &=< V, (r^2 + a^2)\partial_t + a\partial_\varphi >= (r^2 + a^2) < V, \partial_t > +a < V, \partial_\varphi > \\ &= (r^2 + a^2)(-\Delta) + a(\Delta a S^2) = -\Delta(r^2 + a^2 - a^2 S^2) = -\Delta\rho^2 \end{aligned}$$

となる．□

さて，上記の成分が，確かに，計量テンソルとなっていることを確認しておく．

補題 2.1.4　ボイヤー－リンキスト座標に関し，

$$(1) \quad g_{tt}g_{\varphi\varphi} - {g_{t\varphi}}^2 = -\Delta \sin^2\vartheta$$
$$(2) \quad \det(g_{ij}) = -\rho^4 \sin^2\vartheta$$

が成立する．

証明　先ず，g_{ij} の形から，(1) 式の左辺において $g_{t\varphi}^2$ と $g_{tt}g_{\varphi\varphi}$ の一部が引き算で消えることがすぐ分かり，

$$-g_{\varphi\varphi} + (2\mathrm{M}r\rho^{-2})(r^2 + a^2)S^2 = -g_{\varphi\varphi} - a^{-1}(r^2 + a^2)g_{t\varphi}$$

となる．しかるに，計量恒等式の $(m3)$ から，$-a^{-1}(\Delta a S^2) = -\Delta S^2$ となる．これから (2) 式も出る．□

(2) 式より，ρ^2, Δ, $\sin\varphi$ が全てゼロでない所では，ボイヤー－リンキストの式が，ローレンツ符号数 (プラスとマイナスが逆転する場合も含む) を持つ非退化の計量テンソルとなっていることが分かる．この座標ベクトル場の因果的特性は変わることもありうる．これについては次の節で述べる．

ボイヤー－リンキスト座標の順序は，固定しないことにする．シュワルツシルドの式と比較するときには，$(t, r, \vartheta, \varphi)$ の順序が見やすい．幾何学的には，計量成分に現れる変数 r と ϑ だけなので，$(r, \vartheta)(\varphi, t)$ のように分ける方がよい．しかし，位相的に考察するときには，$(r, t)(\vartheta, \varphi)$ の方が自然である (3.6 節).

電荷 e を持ったブラックホールを検討するときには，カー計量を修正する必要がある．前記の Δ を

$$\Delta = r^2 - 2\mathrm{M}r + a^2 + e^2$$

とすると，カー－ニューマン計量となる (Newman, et al, 1965). なお，Wald (1984) の 12.3 節も参照せよ．

2.2　ボイヤー－リンキスト・ブロック

カー計量テンソルは 2 つのパラメータ M と a を持っているので，カー時空は 2 パラメータによる**族** (family) を構成している．質量 $\mathrm{M} > 0$ を一定とし，パラメータ a (単位質量あたりの角運動量) を変化させると，極値 $a^2 = \mathrm{M}^2$ において重要な変化が生じる．ここでさらに 2 種類の族に分割されるのである．

いろいろな例外が出て煩雑になるのを避けるため，カー時空族にはシュワルツシルド時空を含めないことにする．もっとも，$a = 0$ としてシュワルツシルド時空を参照することは，これからも行う．符号の選択が必要なときには，$a \neq 0$ は正とする．次の用語を与えておく．

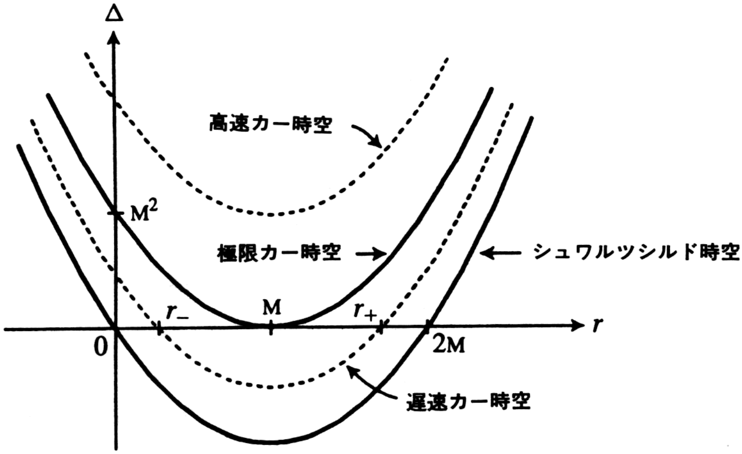


図 2.1　回転のタイプによる地平面関数の違い

$0 = a^2$　のときはシュワルツシルド時空

$0 < a^2 < M^2$　のときは**回転が遅いカー時空** (slowly rotating Kerr spacetime) (〈**遅速カー時空**〉)

$a^2 = M^2$ のときは**極限カー時空** (extreme Kerr spacetime)

$M^2 < a^2$ のときは**回転が速いカー時空** (rapidly rotating Kerr space time) (〈**高速カー時空**〉)

回転の種類の差違は，先ず，地平面関数 $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$ で与えられる (図 2.1 を見よ).

シュワルツシルド時空では，Δ の解は 0 と 2M である.

遅速カー時空では，Δ の解は $0 < r_\pm = M \pm (M^2 - a^2)^{1/2} < 2M$ となる.

極限カー時空では，$\Delta = (r - M)^2$ なので，重解 $r = M$ を持つ.

高速カー時空では，Δ は実数解を持たない.

前記のように，Δ のゼロ点は地平面を与える．相対論的重力理論で一番問題になるところである．しかし，計量をボイヤー－リンキストの式で与えたときには，定義域は $\Delta \neq 0$ の部分なので，この地平面は，時空を拡張するまでは現れない．ここでは先ず，現在与えられている計量が意味を持つ最大領域を検討する．

シュワルツシルド計量の場合とは大きく異なり，カー計量は，$r=0$ **でも意味を持つ**．普通の球座標が持つ条件 $r>0$ がなくなり，r は実数全体で定義されるのである．よって，r と t は平面 R^2 全体の直交座標となるので，2 次元球 S^2 上の球座標 (ϑ, φ) とともに，積多様体 $R^2\times S^2$ を考えることにする．ここにおいて，座標とそれにともなう計量が定義されない部分集合が，次の 3 種類存在する．なお，余緯度 ϑ は，φ が定義されない極 $(0,0,\pm1)$ も含めて，球全体で定義されているのであった (注意 1.7.2 を見よ).

1. **地平面** (horizon) $H{:}\,\Delta=0$ 上記から，高速カー時空では，地平面は存在しない．極限カー時空では，地平面は 1 つ $H{:}\,r=\mathrm{M}$ であり，遅速カー時空では，地平面は 2 つ $H_+{:}\,r=r_+$ と $H_-{:}\,r=r_-$ である．

2. **リング状特異領域** (ring singularity) $\Sigma{:}\,\rho^2=0$ この用語は，$\rho^2=0$ となる条件が $r=0$ かつ $\cos\vartheta=0$ であることに由来する．つまり，Σ は，半径 $r=0$ における S^2 の赤道円 $S^1{:}\,\vartheta=\pi/2$ と時間軸 $R^1(t)$ との直積になっている．この円自体をリング状特異領域と呼び，$\Sigma=S^1\times R^1$ をその時間経過による軌跡とすることもある．

3. **軸** (axis) $A{:}\,\sin\vartheta=0$ R^3 の球座標では $\sin\vartheta=0$ は z 軸を表すが，ここでは，r は負の値も取るので，軸は (時間全体を通して) 2 本存在する．球 S^2 において，$\sin\vartheta=0$ は北極 $p{:}\,\vartheta=0$ と南極 $-p{:}\,\vartheta=\pi$ なので，$R^2\times S^2$ では，各極は時間全体を通した $\pm p\times R^2(r,t)$, すなわち ⟨z 軸⟩ となる．

図 2.2 は，$R^2\times S^2$ において t を一定とした断片であり，上に述べた 3 種類の部分集合の位置関係を表したものである．ここで，これらの部分集合を越えてカー計量を拡張することはできるのであろうか，という質問が生じる．

先ず軸 A を考える．球座標は z 軸で定義されないが，これは重要なことではない．例えば，(シュワルツシルド時空のように) 球対称があれば，座標を回転させればよい．カー時空では軸対称が問題で，物理的にも幾何学的にも，A 軸が唯一のものである．いずれにせよ，カー計量は，A まで，解析的に拡張することが**可能**なのである．

線素をボイヤー－リンキストの式で表すと

$$ds^2=g_{tt}dt^2+g_{rr}dr^2+g_{\vartheta\vartheta}d\vartheta^2+g_{\varphi\varphi}d\varphi^2+2g_{\varphi t}d\varphi\,dt$$

である．2.1 節の式から，軸上における計量の成分は $\rho^2=r^2+a^2>0$ なので，ここで非特異になっていることが分かる．微分 dt, dr は，R^2 全体で定義できるので，$R^2\times S^2$ 全体で定義されている．また，$d\varphi$ と $d\vartheta$ は，2 次元球の極で特異なので，

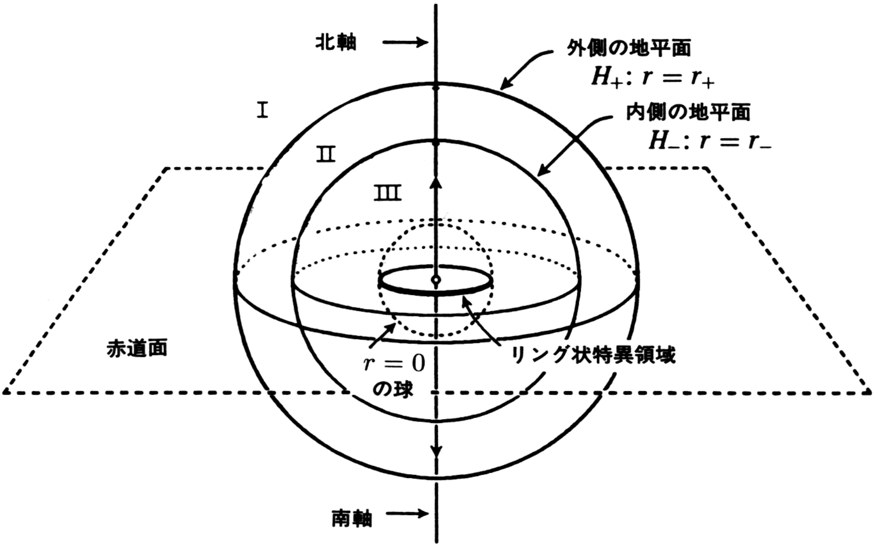


図 2.2　$R^2 \times S^2$ の $t =$(一定) による断片で，軸を指数化した図 (半径 r を e^r にし，図の球の中心が $r = -\infty$ となっている). 2 本の z 軸の範囲は $r = -\infty$ から $r = +\infty$ である．リング状特異領域 (で t を一定にした断片) Σ は，半径 $r = 0$ の 2 次元球の所に表れている．この特異領域を通らなくても，$r > 0$ から $r < 0$ へ行ける．この図では $r < 0$ の方が小さくなっているが，実際は $r > 0$ と同じ大きさである．
この図は遅速カー時空の場合で，$R^2 \times S^2$ が 3 つの領域 I, II, III に分かれている．地平面は全て $r > 0$ の側にあり，遠く離れた観測者からリング状特異領域を隠している．
注意：II の領域は〈空間〉ではない．ここでは，r が，距離ではなく，時間になっている．

$R^2 \times S^2$ の軸でも特異となる．だが，$S^2 d\varphi = \sin^2 \vartheta\varphi$ は，直交座標で $x\,dy - y\,dx$ となるので，軸でも非特異である．$d\vartheta$ については，2 次元球の線素 $d\sigma^2$ を使って拡張する．

補題 2.2.1　2 次元単位球から極 $(0, 0, \pm 1)$ を除いた所で，

$$\rho^2 d\vartheta^2 + g_{\varphi\varphi} d\varphi^2 = \rho^2 d\sigma^2 + (1 + 2\mathrm{M}r\rho^{-2})a^2(S^2 d\varphi)^2$$

が成立する．

証明　左辺の $g_{\varphi\varphi}$ に表 2.1 の式を代入して

$$\rho^2 d\vartheta^2 + (r^2 + a^2)S^2 d\varphi^2 + 2\mathrm{M}r\rho^{-2}a^2S^4 d\varphi^2$$

となる．これに，恒等式 $r^2 + a^2 = \rho^2 + a^2S^2$ を用いて

$$\rho^2(d\vartheta^2 + S^2 d\varphi^2) + a^2S^4(d\varphi^2 + 2\mathrm{M}r\rho^{-2}d\varphi^2),$$

となるが，$d\vartheta^2 + S^2 d\varphi^2$ は (単位) 2 次元球の線素 $d\sigma^2$ に他ならない．□

この式の右辺は，全て極まで拡張できるので，$R^2 \times S^2$ の軸まで拡張できることになる．

ボイヤー－リンキストの座標では軸が除かれていたが，カー計量は，軸を含めた所で定義できる．このことは次の式で示される．この式は，上で述べたように (地平面以外の) 軸においても成立する．

補題 2.2.2　領域 $R^2 \times S^2 - (H \cup \Sigma)$ において，カー計量の線素は

$$ds^2 = (\rho^2/\Delta)dr^2 + \rho^2 d\sigma^2 + a^2S^4 d\varphi^2 - dt^2 + 2\mathrm{M}r\rho^{-2}(dt - aS^2 d\varphi)^2$$

と表すことができる．

証明　先ず，$R^2 \times S^2 - (H \cup \Sigma \cup A)$ において，ds^2 をボイヤー－リンキストの式で表すと

$$[g_{\vartheta\vartheta}d\vartheta^2 + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2] + [g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2 + 2g_{\varphi t}d\varphi\, dt]$$

となる．補題 2.2.1 より，最初の項は

$$\rho^2 d\sigma^2 + (1 + 2\mathrm{M}r\rho^{-2})a^2S^4 d\varphi^2$$

である．2 番目の項は

$$\begin{aligned}(-1 + 2\mathrm{M}r\rho^{-2})\,dt^2 &+ (\rho^2/\Delta)\,dr^2 - 4\mathrm{M}r\rho^{-2}aS^2 d\varphi\, dt \\ &= -dt^2 + (\rho^2/\Delta)\,dr^2 + 2\mathrm{M}r\rho^{-2}[dt - 2\mathrm{M}r\rho^{-2}aS^2 d\varphi]\,dt\end{aligned}$$

となる．この 2 式を加えると，$(dt - aS^2 d\varphi)^2$ でまとまり，求める式が出る．これが，$A - H$ の点において (非退化の) 計量であることを確認する．軸では $S = 0, C = 1$ なので，

$$\begin{aligned}ds^2|_A &= (-1 + 2\mathrm{M}r\rho^{-2})dt^2 + \rho^2\Delta^{-1}dr^2 + \rho^2 d\sigma^2 \\ &= -(r^2 + a^2)^{-1}\Delta dt^2 + (r^2 + a^2)\Delta^{-1}dr^2 + (r^2 + a^2)\,d\sigma^2\end{aligned}$$

となる．これは，$\Delta \neq 0$ ならば非退化である．□

カー計量のボイヤー－リンキスト表示は，これ以上広げることができない．それで，(連結であることが定義に含まれている) **時空**という用語を用いるためには，$R^2 \times S^2 - (H \cup \Sigma)$ の連結成分に注目しなければならない．各連結成分は**地平面**によって分割されている．

定義 2.2.3　次のような $R^2 \times S^2 - \Sigma$ の開集合 I, II, III を**ボイヤー－リンキスト・ブロック** (Boyer–Lindquist bolck) と呼ぶ．

1. 遅速カー時空の場合：地平面が2つ $r = r_\pm$ 存在するので；

$$\text{I}: r > r_+,$$
$$\text{II}: r_- < r < r_+,$$
$$\text{III}: r < r_-$$

2. 極限カー時空の場合：地平面は1つ $r = \text{M}$ なので；

$$\text{I}: r > \text{M}$$
$$\text{III}: r < \text{M}$$

3. 高速カー時空の場合：地平面が存在しないので，$R^2 \times S^2 - \Sigma$ 自身が単一のブロック I=III である．

これらのブロックは連結な4次元ローレンツ多様体である．次の章では，**ボイヤー－リンキスト・ブロックを地平面に沿って張り合わせて最大に拡張されたカー時空を構成する**．これらは文字通り，カー時空を作るブロックなのである．

高速カー時空では，$R^2 \times S^2 - \Sigma$ 自身がすでに最大の時空なので，こまかく言及することはない．遅速カー時空については，拡張を詳しく述べる．そして，ブロック II を除いたものが極限カー時空となっているのである．

各ブロックの幾何学を展開するために，ボイヤー－リンキスト座標のベクトル場と標準カー・ベクトル場 V, W の因果的特性を検討する (図 2.3 を見よ).

図 2.1 で見たように，I ∪ III で $\Delta > 0$ となり，II で $\Delta < 0$ である．一方，ρ^2 はつねに正．補題 2.1.3 と $g_{ii} = < \partial_i, \partial_i >$ の式から次が分かる．

1. ∂_ϑ と W はつねに空間的である．
2. ∂_r は，I ∪ III で空間的，II で時間的である．

符号とブロック

	I	II	III
Δ, g_{rr}	+	−	+
$g_{\vartheta\vartheta}$	+	+	+
$g_{\varphi\varphi}$	(+)	(+)	•
g_{tt}	•	+	•
$\langle V, V\rangle$	−	+	−
$\langle W, W\rangle$	(+)	(+)	(+)

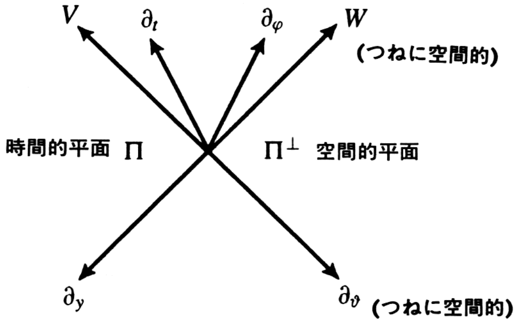


図 2.3　ベクトル場 V，W，∂_r，∂_v はお互い直交している．$\Pi = \mathrm{Span}\{w, \partial_\vartheta\}$ が常に空間的なので，$\Pi = \mathrm{Span}\{V, \partial_r\}$ は常に時間的である．表の符号で，(+) は，軸では∂_φ と w が消える (空間的ではある) のでゼロとなるが，それ以外は＋であることを示している．ベクトル場 V W は，∂_t と∂_φ で張られる平面と同じ平面を張っている．

3. V は，I ∪ III で時間的，II で空間的である．

4. ∂_φ は，$r > 0$ で，つまり I ∪ II において空間的である．III のブロックでは，因果的特性は変化する．$g_{\varphi\varphi}$ の式から分かるように，$r \ll -1$ ならば空間的である．

5. ∂_t は，∂_r(これは II で時間的) に直交するので，ブロック II では空間的である．I と III では，因果的特性は変化する．g_{tt} の式を変形すると $\rho^{-2}[-r(r-2\mathrm{M}) - a^2C^2]$ であるから，$r > 2\mathrm{M}$ あるいは $r < 0$ ならば時間的であることが分かる．$r = 0$ でも ∂_t は時間的であり，$C = 0$ ならリング状特異領域となる．

因果的特性の変化については 2.4 節で言及する．

座標ベクトル場の因果的特性から，ボイヤー－リンキスト・ブロックは，次のように解釈することができる．

ブロック I は，**カー外部** (Kerr exterior) と呼ばれるが，3 つのブロックのうちで一番常識的な，〈天文学的〉な場所である．r が極端に小さくなければ，重力場はニュートン物理学の中心力とほぼ同等になり，ボイヤー－リンキスト座標 $(t, r, \vartheta, \varphi)$ は，t を時間，r を中心からの距離，ϑ を余緯度，φ を緯度として，ニュートン力学の座標と同じように解釈することができる．r が十分に大きければ，t 座標のベクトル場 ∂_t は時間的なので，これを未来方向と指定して**時間的向き付け**を行うことができる．

ブロック II は，2 つの地平面に挟まれた領域で，完全に相対論的な場所である．ここでは，因果的特性 が変化しているので，直感的な座標の意味が失われている．r の

座標が時間的で，t は (他の 2 つと同様に) 空間的になっているのである．ここまで述べた限りでは，II はまだ時空とは言えない．時間的向き付け可能ではあるが，時間の向きを指定する自然な方法がないのである．(II を I に張り付けることが可能になれば，I の時間の向きを II へ拡張すればよいことになる.)

ブロック III は，$r \ll -1$ では，ブロック I と類似なことになり，ボイヤー－リンキスト座標の解釈も同じようにできる．ただしここでは，$-r$ が中心からの距離になる．また，後で見るように，重力が，引力でなく斥力となる．さらにブロック II の近くでは，リング状特異領域だけでなくタイムマシンも含むので，II 以上に奇妙なことになっている．

2.3　特別な部分多様体

本書の目的は，最大に拡張されたカー時空を効率的に構成することである．しかしながら順序として，簡単なカー時空の幾何学から話を始めなければならない．先ず，次のように用語を定義する．

定義 2.3.1　次の条件を満たす解析的時空を**カー時空** (Kerr spacetime) K と呼ぶ.

1. ボイヤー－リンキスト・ブロック (の標準的な等長コピー) の共通部分を持たない和は，K で稠密である．
2. K には，解析的関数 r と C が (それぞれ一意に) 存在し，それらを条件 1. のボイヤー－リンキスト・ブロックに制限したものは，それぞれ，ボイヤー－リンキストの関数 r と $C = \cos\vartheta$ になっている．
3. **赤道等長変換** (equatorial isometry) と呼ばれる等長変換 $\epsilon\colon K \to K$ が一意に存在し，それを各ボイヤー－リンキスト・ブロックに制限したものは，ϑ を $\pi - \vartheta$ に移し，他の座標を不変にする写像になっている．
4. K 上にキリング・ベクトル場 $\tilde{\partial}_t$ と $\tilde{\partial}_\varphi$ が (それぞれ一意に) 存在し，それらを各ブロックに制限したものは，それぞれ，ボイヤー－リンキストの座標ベクトル場 ∂_t と ∂_φ になっている．

もちろん，ボイヤー－リンキスト・ブロック自体は (時間的向き付けを与えて), そのままで一番シンプルなカー時空である．なお，K において，関数 ρ^2 と Δ, それに標準ベクトル場 V と W は矛盾なく定義できることを注意しておく．

この定義から，カー時空の幾何学と物理学の全体を通して重要となる部分多様体を取り出すことができる．

定義 2.3.2 カー時空 K において：

1. 定義 2.3.1 の条件で与えたキリング・ベクトル場 $\tilde{\partial}_\varphi$ の零点の集合を**軸** (axis) $A = Ax(K)$ と呼ぶ．

2. 赤道等長変換 ϵ の不動点の集合を**赤道平面** (equatorial plane) $Eq = Eq(K)$ と呼ぶ．(簡単に**赤道面** (equator) と呼ぶこともある.)

定理 1.7.12 より，軸は，2 次元の全測地的な閉部分多様体であり，ローレンツ符号数を持っている．$|r|$ が大きいときは，相対論的な星の回転軸とみなしてよい．時間全体を通しての空間的な軸なのである．カー時空が大きくなれば，それに比して軸も大きくなる．これは，常に 2 つの連結成分を持っている．北の軸 $\vartheta = 0$ と南の軸 $\vartheta = \pi$ である (図 2.2 を見よ)．この 2 つは赤道等長変換 ϵ によって等長に移される．軸についてのより詳しい幾何学は 2.5 節で述べる．その節で地平面との関連を検討する．

上記と定理 1.7.12 から，任意のカー時空 K において，赤道平面も全測地的閉部分多様体であることが分かる．これは，明らかに 3 次元ローレンツ多様体で，(少なくとも $|r|$ が十分大きいときには) 時間全体を通しての空間的な赤道平面 $\vartheta = \pi/2$ である (図 2.2 を見よ)．さらにこれは，対称的な位置にあるから，北極や南極に近い位置よりも回転で受ける影響が少ない．そのため，4 次元カー時空幾何学のいろいろな性質をテストする 3 次元の試験場として便利なものである．

ボイヤー－リンキスト座標を使い，全測地的曲面の族を，次のように与える．

定義 2.3.3 $R^2 \times S^2 - \Sigma$ において，$t = t_0$, $\varphi = \varphi_0$ で定義される曲面を**極曲面** (polar plane) $P = P(t_0, \varphi_0)$ と呼ぶ．

P において，条件 $0 < \vartheta < \pi/2$ を外し，(1.1 節のように) ϑ を円座標とする．これで，P は，単一の座標系 (r, ϑ) を持つことになる．もちろん，地平面が存在するときには，そこで不連結となる．極曲面は (非退化の) 線素 $ds^2 = \rho^2(\Delta^{-1}dr^2 + d\vartheta^2)$ を持つので，Δ の符号から，I $\cup$ III においてリーマン計量，II においてローレンツ計量であることが分かる．明らかに，φ による回転，t による変換で，極曲面は等長に移される (3.7 節，3.8 節を見よ)．

$|r|$ が十分大きいときには，P は，回転軸を通る平面である．なお，図 2.2 では，この形を正確に記すことができない．P の意外な実際の全体像は，第 3 章でカー時空を拡張したときに明らかになる．

$P(t_0, \varphi_0)$ は，写像

$$r \to r, \quad \vartheta \to \vartheta, \quad \varphi - \varphi_0 \to -\varphi + \varphi_0, \quad t - t_0 \to -t + t_0$$

の不動点の集合になっている．ボイヤー－リンキストの計量成分 g_{ij} には φ や t が含まれていないから，この写像は等長写像である．つまり，極曲面は，全測地的閉部分多様体なのである．

カー時空に自然に現れる，もう 1 つ別の曲面族について説明する．定義 2.3.1 より，K には，キリング・ベクトル場 ∂_t , ∂_φ を拡張した $X = \tilde{\partial}_t$ と $Y = \tilde{\partial}_\varphi$ が存在する．軸において，∂_φ, つまり Y はゼロとなるが，$\mathrm{Span}\{X, Y\}$ 自体は，任意の場所で 2 次元である．ボイヤー－リンキスト・ブロックにおいて，t と φ は座標関数であるから，リー括弧積 $[\partial_t, \partial_\varphi]$ はゼロになる．したがって，連続性から，K において，$[X, Y] = 0$ である．よってフロベニウスの定理 (1.7 節) から，$K - A$ は，X と Y で張られる平面による葉層構造になっている (この平面を**キリング軌跡** (killing orbit) と呼ぶ)．ボイヤー－リンキスト・ブロックにおいては，この軌跡 F は，座標で $r = r_0, \vartheta = \vartheta_0$ とした断片である．つまり，F は，円筒形 $R^1 \times S^1$ をしており，大域的な座標 (t, φ) (φ が円座標) をもっている．

ボイヤー－リンキスト計量を決定するのは r と ϑ であるから，これらを一定にしてキリング軌跡を求めると，各 F は，A と B を定数として，$ds^2 = A\,dt^2 + B\,d\varphi^2$ という形の線素を持つことになる．つまり，**キリング軌跡は平坦**なのである．なお，すぐ後で分かるように，全測地的ではない．

簡単にいうと，ボイヤー－リンキスト座標は，各ブロック (軸を除く) を，極曲面とキリング軌跡の積の形に表すものなのである．

もう 1 つ，図 2.2 で明らかなカー部分多様体としては，$r > 0$ と $r < 0$ で領域を分けている**咽喉** (throat) T がある．これは，ボイヤー－リンキスト・ブロック III において，$r = 0$ で与えられる超曲面である．つまり T は，時間全体を通る**中心球** $S^2\langle 0 \rangle = \{r = 0, t = 0\}$ であり，$T \approx S^2\langle 0 \rangle \times R$ なのである．ブラックホールに中心というものを考えるなら，これがそれに相当する．なお，$S^2\langle 0 \rangle$ は，位相的には 2 次元球ではない．図 2.2 から分かるように，リング状特異領域 $\{r = 0, \vartheta = \pi/2\}$ によって，北側と南側の 2 つに分割されているのである．

T の線素を求める．一般のボイヤー－リンキストの式において $r = 0$ と置くと，$d\sigma^2 = a^2C^2 d\vartheta^2 + a^2S^2 d\varphi^2 - dt^2$ となる．最初の 2 項は，球 $S^2\langle 0 \rangle$ の線素であり，

よく知られた関係式 (O'Neill 1966) からガウス曲率はゼロとなる．実際，T の 2 つの成分は，それぞれ 3 次元ミンコフスキー空間 $R_1^3 \approx R^2 \times R_1^1$ における半径 $r = a$ の円筒 $S^1 \times R^1$ の内側 $D \times R$ と等長である．この等長写像 ψ は

$$x = aS\cos\varphi, \qquad y = aS\sin\varphi, \qquad t = t$$

で与えられる．この咽喉は平坦であるが，カー時空内に対称的に置かれているわけではない (局所的な写像 $r \to -r$ は等長ではない)．また，4.15 で述べるが，全測地的部分多様体でもない．

2.4　エルゴ球とタイムマシン

ボイヤー－リンキスト座標のベクトル場は，各ブロックで因果的特性を保存している．ただし例外がある．ブロック I と III における ∂_t, ブロック III における ∂_φ である．これらを詳しく調べると興味深いことが分かる．∂_t と ∂_φ はキリング・ベクトル場であり，第 3 章で述べるように，任意のボイヤー－リンキスト・ブロック B において，全てのキリング・ベクトル場は，∂_t と ∂_φ の定数を係数とする 1 次結合で書けるのである．

∂_t の因果的特性 は物理学的に重要である．なぜなら，1.6 節で述べたように，キリング・ベクトル場 Z が時間的ならば，それに対応するオブザーバー・ベクトル場 $U = Z/|Z|$ は定常的になっている．このオブザーバーにとっては，時空は時間によって変化しない．さらに，U が唯一ならば，時空は絶対定常となる．

命題 2.4.1　時間的キリング・ベクトル場に関して：

(1) ボイヤー－リンキスト・ブロックは定常的ではない．すなわち，そのブロック全体で定義される時間的キリング・ベクトル場は存在しない．

(2) ブロック I と III の $|r| \gg 1$ である領域においては，∂_t の定数倍のみが時間的キリング・ベクトル場である．(よって，その領域は絶対定常である．)

証明　(1) 上に述べたことより，X がキリング・ベクトル場ならば，各点 p において，X_p は $\mathrm{Span}\{\partial_t, \partial_\varphi\}$ 上にある．ブロック II では，$\Delta < 0$ であるから，補題 2.1.4 よりこの平面は空間的である．よって，II (あるいはその一部の開集合) においては時間的

キリング・ベクトル場は存在しない．よって，求める時間的キリング・ベクトル場が存在するなら，それは，ブロックIあるいはⅢにおける ∂_t でなければならない．しかし，この両方のブロック全体で ∂_t が時間的にならないことは前に述べたとおりである．

(2) を示すため，$|r|$ が大きい所では時間的となるキリング・ベクトル場を X とする．ある $A \neq 0$ について $X = A\partial_t$ となることを示せばよい．前記より，定数 A, B について $X = A\partial_t + B\partial_\varphi$ とおける．軸において ∂_φ はゼロ (空間的！) だから，A はゼロではない．よって $A = 1$ としてよい．このとき

$$< X, X >= g_{tt} + 2Bg_{t\varphi} + B^2 g_{\varphi\varphi}$$

となる．補題 2.1.1 の計量恒等式から，$|r| \to \infty$ のとき

$$\begin{aligned} g_{tt} &\to -1, \\ g_{t\varphi} &\to 0, \\ g_{\varphi\varphi} &\to +\infty \ (\text{軸は除く}) \end{aligned}$$

となる．したがって，$B = 0$ でなければ $< X, X >\to +\infty$(軸を除く) となってしまう．
□

ブロックIでは，∂_t が時間的なので，それを未来向きとして，時間的向き付け可能である．よって，$U = \partial_t/|\partial_t|$ は，開集合 $\{g_{tt} < 0\}$ において，定常的オブザーバー場となる．このベクトル場の積分曲線を**カー定常オブザーバー** (Kerr stationary observer) と呼ぶ．$|r|$ が十分大きいときには，このオブザーバーは，自分が静止して周りを定常として眺める唯一のものである．しかし，次の結果から，カー・オブザーバーは静的ではない．

補題 2.4.2　座標ベクトル場 ∂_t は，カー時空の任意の開集合に対して超曲面直交型ではない．

証明　付録Bの補題を使って証明する．∂_t に双対な1形式を θ とする．つまり，任意のベクトル v に対して $\theta(v) =< v, \partial_t >$ である．さて，$\partial_t{}^\perp$ が積分可能であるための必要十分条件は $\theta \wedge d\theta = 0$ である．ボイヤー－リンキスト座標では

$$\theta = \Sigma\, \theta(\partial_i) dx^i = \Sigma\, g_{0i} dx^i = g_{tt} dt + g_{t\varphi} d\varphi$$

であり，$d\theta = dg_{tt} \wedge dt + dg_{t\varphi} \wedge d\varphi$ なので，

$$\theta \wedge d\theta = [g_{t\varphi} dg_{tt} - g_{tt} dg_{t\varphi}] \wedge d\varphi \wedge dt$$

となる．計量の成分は r と ϑ にのみ依存しているから，この式の大括弧内 (この 1 形式を β とする) は，dr と $d\vartheta$ の 1 次結合であり，$d\varphi$ と dt に独立である．よって，$\theta \wedge d\theta = 0$ となる条件は $\beta = 0$ である．しかるに，$\beta = (g_{t\varphi})^2 d(g_{tt}/g_{t\varphi})$ ゆえ，

$$(\partial/\partial r)(g_{tt}/g_{t\varphi}) \approx S^2(r^2 - a^2C^2)$$
$$(\partial/\partial\vartheta)(g_{tt}/g_{t\varphi}) \approx rSC\Delta$$

となる (ゼロにならない項は省略した). 明らかに，この 2 式が同時にゼロとなる開集合は存在しない． □

物理的に言えば，この結果は，カー時空が回転しているからである．シュワルツシルド時空では，$a = 0$ であり，ボイヤー－リンキスト座標が直交し，超曲面 $t =$(定数) は ∂_t に直交してしまう．

ボイヤー－リンキスト座標は，カー・オブザーバーが時空内で時間と空間を認識する手段である，とみなすことができる．星から十分離れれば，$|r| \to \infty$ になるほどカー幾何学は空の時空を表すミンコフスキー計量に近づくので，この座標は常識的なものとなる．逆に，$|r|$ が小さくなれば，それだけ常識から外れたものになるのである．実際，先ず，〈時間座標〉の t が時間を計測するのを中止し，次いで，〈動径的距離〉座標の r が距離を測るのを中止するのである．

補題 2.4.3　遅速カー時空において，**定常性限界面** (stationary limit) $L = \{g_{tt} = 0\}$ は，$\mathrm{I} \cup \mathrm{III}$ における (非連結の) 超曲面であり，定常領域 $\{g_{tt} < 0\colon \partial_t$ 時間的 $\}$ と領域 $\mathcal{D} = \{g_{tt} > 0\colon \partial_t$ 空間的 $\}$ を分けている．$\mathcal{D}$ は $r = 0$ と $r = 2\mathrm{M}$ の間にある．地平面も含み，L は時間的である．

証明　式 $g_{tt} = -1 + 2\mathrm{M}r\rho^{-2}$ を $\ell\rho^{-2}$ と書く．つまり $\ell = r(2\mathrm{M} - r) - a^2C^2$ である．前に述べたように，$r < 0$ あるいは $r > 2\mathrm{M}$ ならば，ℓ は (よって g_{tt} も) 負となる．

L が超曲面であることを証明するには，$L\colon \ell = 0$ の全ての点において $d\ell \neq 0$ であることを示せばよい．ところで，$d\ell = 2(r - \mathrm{M})\,dr - 2a^2SC\,d\vartheta$ であるから，もし $d\ell = 0$ ならば，ℓ は $\mathrm{M}^2 - a^2C^2$ となる．これは，遅速カー時空ではゼロにならな

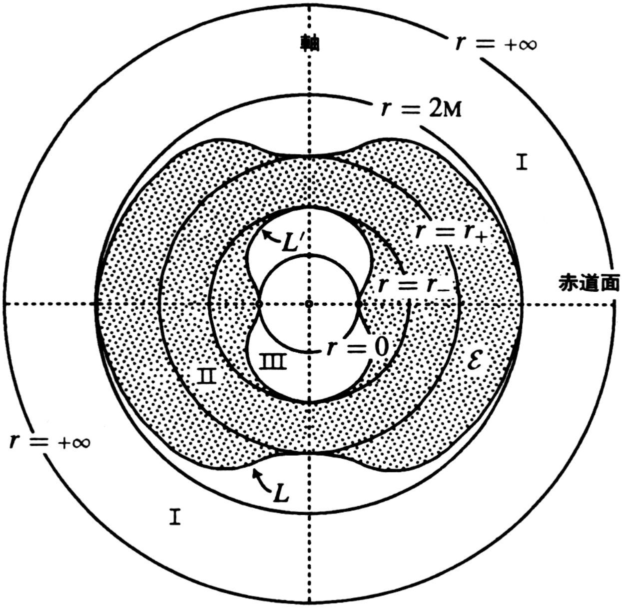


図 2.4　遅速カー・ブラックホールにおいて，∂_t が空間的となる領域 $\mathcal{D}$ を灰色で示した．(これを軸の周りに回転すれば，図 2.2 の，r を指数化し，t を一定にした断片の図となる.) $\mathcal{D}$ は，ブロックII 全体とエルゴ球 $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ を含んでいる．そこは，常識的なニュートン物理学から離れた，きわめて相対論的な領域なのである．

い．さらに，L において $d\ell \neq 0$ であることは，L の両側で符号が変わること，つまり境界になっていることを示している．

次に，L が時間的であること，つまりローレンツ符号数を持つことを示す．L では ℓ が $-\Delta$ なので，ボイヤー－リンキスト・ブロックにおいては，L は軸 A と交わらない．L の任意の点 p において，ベクトル $z = a^2 SC\partial_r + (r - \mathrm{M})\,\partial_\vartheta$ は，$d\ell(z) = 0$ なので，L に接している．$\mathrm{I} \cup \mathrm{III}$ において $\Delta > 0$ だから，z は空間的である．また，∂_t と ∂_φ は L に接していて，これらが張る 2 次元平面は時間的である (補題 2.1.4)．しかるに，明らかに z は ∂_t と ∂_φ に直交しているので，$T_p(L)$ は時間的となる．□

カー時空に地平面を組み込めば，図 2.4 のように，L は軸と交わる点において (零的) 地平面に接することになるので，そこで L は**零的** (null) となる．

ブロック I において ∂_t が空間的となる領域 $\mathcal{E}$ を**エルゴ球** (ergosphere) と呼ぶ．ブ

ロック III における同様な領域 $\mathcal{E}'$ にも同じ名前を付ける．エルゴ球は，ブロック II を囲む領域で，緯度が高くなるほど囲み方が薄くなり，極で接している (図 2.4 参照).

エルゴ球 (これは C. V. Vishveshwara 1968 で命名されたものである) も，回転による結果の 1 つであり，シュワルツシルド時空では存在しない (注意 2.5.8 参照). これは，ブラックホール理論に本質的な役割を果たすものであり，ブラックホールからエネルギーを取り出すことを可能にするものなのである (4.1 節参照).

補題 2.4.4 時間的曲線 α は次の性質を持つ.

(1) $\mathcal{E} \cup \mathcal{E}'$ における任意の時間的曲線 α に関し，座標 φ は狭義単調である.

(2) $\mathcal{E}$ において自然に時間的向き付けを与え，α は未来向きとする．このとき，φ は増加である.

(3) α が地平面と交わるならば，$t' \to \infty, \varphi' \to \infty$ である.

(2) で述べていることは，エルゴ球 $\mathcal{E}$ 内を航行している宇宙船は，どんなに強力なエンジンで制御しても，(カー・オブザーバーから見れば) ブラックホールの回転方向に回転してしまう，ということなのである.

証明 超曲面 $N: \varphi =$ (定数) は，r, ϑ, t を座標として持っている．つまり，各点 $p \in N$ において，お互いに直交しているベクトル場 $\partial_r, \partial_\vartheta, \partial_t$ が $T_p(N)$ を張っているのである．∂_r と ∂_ϑ は，ブロック I とブロック III で空間的である．∂_t は，領域 $\mathcal{E} \cup \mathcal{E}'$ において空間的なので，この領域では N は空間的である．よって，曲線 α は N に接していず，基本定理 (1.1 節) から，$d(\varphi \circ \alpha)/ds = \alpha'[\varphi]$ はゼロにならない．これで (1) が示された.

$d(\varphi \circ \alpha)/ds$ の符号は，時空の時間的向き付け (と α の符号) に依存する．これまでは，ブロック I に時間的向き付けを行うとき，$|r| \gg 1$ として ∂_t を時間的とした．点 $p \in \mathcal{E} \subset \mathrm{I}$ における非空間的ベクトルを v とし，$v = \Sigma v^i \partial_i$ と書く．ここに，添字 i は r, ϑ, φ, t を動くものとする．そこで

$$0 > < v, v > = \Sigma g_{ii} (v^i)^2 + g_{\varphi t} v^\varphi v^t$$

と置ける．対角成分を見ると，g_{rr}, $g_{\vartheta\vartheta}$ は全てのボイヤー－リンキスト・ブロックで正であり，ブロック I において $g_{\varphi\varphi} \geq 0$ で，$\mathcal{E}$ において $g_{tt} > 0$ である．したがって $g_{\varphi t} v^\varphi v^t < 0$ となる．ところが，$a > 0$ で，$\mathcal{E}$ は軸と交わらないから，

$g_{\varphi t} = -2\mathrm{M}r\rho^{-2}aS^2 < 0$ となる．よって $v^{\varphi}v^t > 0$ である．下記の命題 2.4.6 の証明から (ここでの証明とは独立に), v が未来向きならば，ブロック I の軸を除いた所で $v^t > 0$ であることが示される．それを使って $v^{\varphi} > 0$ となる．よって，$v = \alpha'(s)$ と置くと $d(\varphi \circ \alpha)/d\tau = v^{\varphi} > 0$ となる．

(3) を示すため，$s \to s_0$ のとき，α の r 座標が r_+ に近づき，かつ，r' は非ゼロの極限に近づく，とする (粒子は地平面を通る)．さて，$s \to s_0$ のとき，座標の形から，$g_{rr} \to +\infty$ であり，$g_{\vartheta\vartheta}$, それに $g_{\varphi\varphi}$ と $-g_{\varphi t}$(この 2 つでは軸を除くとする) の 3 つは正の有限の値に近づくことが分かる．よって $\varphi' t' \to +\infty$ である．さらに，φ' と t' の両方が $+\infty$ に行く．なぜなら，上式 $<v, v> = <\alpha', \alpha'>$ において，負の項は $g_{\varphi t}\varphi' t'$ だけであるので，もし，例えば $t' \to \infty$ だけとすると，正の項 $g_{tt}t'^2$ と合わせて，$<\alpha', \alpha'> < 0$ に反する．□

いま，$r > r_+$ の位置から小石を落とすと，(常識的には) 有限時間のうちに地平面 $r = r_+$ を通過するはずである．しかし，カー定常オブザーバーから見れば，小石は決して地平面に届かない．時間が $+\infty$ に行けば，$r \to r_+$ で $\varphi' \to \infty$ なので，小石は，回転速度を上げながらぐるぐる回ることになる．実際に r_+ には届かないのである．小石を航行制御可能な宇宙船に置き換えても，カー定常オブザーバーは同様な観察をする．これは，(ボイヤー－リンキスト座標で計測する) カー・オブザーバーが，地平面は通過できない，と〈間違えた〉のではない．地平面の近くでは，ボイヤー－リンキスト座標での計測は，局所的なオブザーバーの座標による計測と非常に異なっているからなのである．

一般相対性理論を展開する上で問題となる状況の 1 つが，**因果律の崩壊**である．もし時間的曲線 α が閉じているとすると，これは，1 つの事象 p から出発した質点が，ある固有時間を経過した後，同じ事象に戻ることを意味している．つまり，旅に出発した者が，出発の時点に戻り，出発しようとしている自分自身を止めることが可能となる．これでは因果関係のルールが無くなってしまう．物理学的には，因果律の崩壊を防ぐ一般的な原理は知られていないのである．ともかく，因果律の崩壊が混乱を招くものであることは間違いない．カー時空では，(ブロック I の十分外側とブロック II では正常だが) この崩壊が生じていることを以下で見る．

定義 2.4.5　時空 M において閉じた時間的曲線が存在しないとき，M は**年代的** (chronological) である，という．〈時間的〉を〈非空間的〉に変えたときには，**因果的** (causal) である，という．

明らかに，因果的時空は年代的時空である．逆は成立しない．なお，時空 $\widetilde{M}$ の連結開集合 M のみを時空と考え，そこで因果的，年代的を設定することもある ($\widetilde{M}$ 全体では設定できなくてもよいのである).

命題 2.4.6 ボイヤー－リンキスト・ブロックのⅠとⅡは因果的である．

証明 先ず，ブロックⅠにおいて，**超曲面** $N: t = t_0$ **が空間的である**ことを見る．(N は，t を定数として定義した，$R^2 \times S^2$ の超曲面だから，軸を含むことに注意.) 軸ではない点 $p \in N$ では，ベクトル ∂_r, ∂_ϑ, ∂_φ が $T_p(N)$ の基底となっている．これらのベクトルは空間的で互いに直交しているから，$T_p(N)$ は空間的である．点 $p = (t_0, r, q) \in N \subset R^2 \times S^2$ が軸上にあるとすると，$q = (0, 0, \pm 1)$ であり，∂_ϑ と ∂_φを，$T_q(S^2)$ の任意の基底と取り替えれば，やはり N は空間的となる．

非空間的曲線 α において，座標 t は狭義単調である．実際，もし

$$(d(t \circ \alpha)/ds)(s_0) = \alpha'(s_0)[t] = 0$$

ならば，$\alpha(s)$ は超曲面 $t = t(\alpha(s_1))$ に接することになるが，$\alpha'(s_1)$ は空間的ではないので，これは生じない．よって，α は閉じた曲線ではない．

ブロックⅡにおいては，**超曲面** $r = r_0$ **が空間的**なので，上記の議論の t を r に置き換えればよい．すなわち，軸ではない点 $N: r = r_0$ では，$T_p(N) = \mathrm{Span}\{\partial_\vartheta, \partial_\varphi, \partial_t\}$ で $\partial_r \perp T_p(N)$ となり，連続性から，これは軸上でも成立する．Ⅱ全体で ∂_r が時間的なので，$T_p(N)$ は空間的である．□

t は，ブロックⅠの全ての場所で時間を計測するわけではないが，未来向きの粒子に関して狭義単調増加にはなっている．これの符号を調べる．先ず，grad t は，それに直交する超曲面 $t =$ (定数) が空間的だから，カー外部では時間的である．そして，$< \mathrm{grad}\, t, \partial_t >= dt/dt = 1 > 0$ であり，∂_t は (時間的のとき) 未来向きなので，grad t は，ブロックⅠの全ての場所で過去向きである．よって，非空間的ベクトル v が未来向きならば，$v[t] =< v, \mathrm{grad}\ t >> 0$ となるから，$v = \alpha'$ として，$d(t \circ \alpha)/ds > 0$ となる．

ブロックⅢにおいては，ブロックⅠとⅡでの議論が全て通用しない．先ず，ボイヤー－リンキスト座標 φ を考える．ベクトル場 ∂_φ の積分曲線は，回転の軸の周りを回る閉曲線である (軸そのものは，∂_φ となるので，除く). ∂_φ は，ブロックⅠとⅡでは空間的であったが，ブロックⅢにおけるリング状特異領域の近くの領域 $\mathfrak{T}$ では時

間的になる．$\mathfrak{T} = \{g_{\varphi\varphi} < 0\}$ を**カーター・タイムマシン** (Carter time machine) と呼ぶ．この領域を使うと因果律が完全に破壊されてしまうのである．

ブロック III における時間的向き付けは，標準ベクトル場 V で与える (このベクトル場は III で時間的である). 次の証明では，点 (つまり事象) をそのボイヤー－リンキスト座標で表すことにする．

命題 2.4.7　ブロック III は**悪性** (vicious) である．すなわち，任意の 2 点 $p, q \in$ III に対し，p から q へ向かう未来向き時間的曲線が III 内に存在する．

したがって，p と q を逆にすれば，p から q へ向かう過去向き時間的曲線が存在することにもなるわけである．この命題の証明の準備として，先ず，$\vartheta = \pi/2$ **かつ** $r < 0$ **が十分小さい点は** $\mathfrak{T}$ **に含まれている**ことに注意しておく．実際，$\vartheta = \pi/2$ ならば，$S = 1$, $C = 0$, $\rho^2 = r^2$ である．よって，$g_{\varphi\varphi}$ は $r^2 + a^2 + 2\mathrm{M}a^2 r^{-1}$ となる．これは，r が十分小さいときには，負である．

次に，図 2.5 のように，ブロック III の住人は，タイムマシンで過去，未来へ自由に行けることを示す.

補題 2.4.8　点 $p = (r_0, \vartheta_0, \varphi_0, t_0) \in$ III が与えられたとき，次を満たすような数 $c > 0$ が存在する．すなわち，任意の数 $\Delta t \geq c$ と φ に対して；

1. p と $(r^*, \pi/2, \varphi, t_0 + \Delta t) \in \mathfrak{T}$ を結ぶ未来向き時間的曲線 α が存在する．
2. p と $(r^*, \pi/2, \varphi, t_0 - \Delta t) \in \mathfrak{T}$ を結ぶ過去向き時間的曲線 β が存在する．

証明　上記の注意から，r^* を十分小さくとり，全ての $(r^*, \pi/2, \varphi, t)$ が $\mathfrak{T}$ に含まれるようにすることができる．ブロック III 内の曲線で，p と $(r^*, \pi/2, \varphi_0, t_0)$ を結ぶものを $\alpha_1(s) = (r(s), \vartheta(s), \varphi_0, t_0)$ とする．ある数 $A > 0$ に対し，曲線

$$\alpha(s) = (r(s), \vartheta(s), \varphi_0 + Aas, t_0 + At(s)),$$

を考える．ここに $t(s)$ は $dt/ds = r^2 + a^2$ を満たすとする．これより

$$\alpha' = \alpha_1' + A[a\partial_\varphi + (r^2 + a^2)\partial_t] = \alpha_1' + AV,$$

となる．ここに，Vは，標準ベクトル場を α に制限したものとする．しかるに，$V \perp \alpha_1'$ であるから，

$$< \alpha', \alpha' > = < \alpha_1', \alpha_1' > + A^2 < V, V > = < \alpha_1', \alpha_1' > - A^2 \Delta\rho^2$$

となる．曲線 α は閉区間で定義されているから，$< \alpha_1', \alpha_1' >$ は上に有界であり，正値の関数 Δ と r^2 は，α 上でゼロより大である．したがって，A を十分大きくすれば α は時間的となる．また，Ⅲ において V は未来向きであり，$< \alpha', V >= A < V, V >< 0$ なので，α は未来向きである．

未来向き時間的ベクトル場 V の積分曲線や $-\partial_\varphi$(未来向き時間的である) を使って α を拡張し，α の最後の座標の t や座標 φ を任意の値にすることができる．したがって，求める数 c は存在する．□

命題 2.4.7 の証明　3 つの曲線をつなぎ合わせて，求める曲線を作ることにする．最初の曲線は，補題の曲線 α である．次に，定数 $B > 0$ に対し，曲線

$$\lambda(s) = (r^*, \pi/2, \bar{\varphi} - Bs, \bar{t} - s), s \geq 0$$

を考える．これは，α の終点 $(r^*, \pi/2, \bar{\varphi}, \bar{t})$ を始点とする曲線である．λ はタイムマシン内にあり，速度は $\lambda' = -B\partial_\varphi - \partial_t$ である．これより

$$< \lambda', \lambda' >= B^2 g_{\varphi\varphi} - 2Bg_{\varphi t} + g_{tt}$$

となる．計量の成分は r と ϑ の関数であるから，上式は，λ に沿って一定である．しかるに $g_{\varphi\varphi} < 0$ であるから，十分大きい B に対して，λ は時間的となる．さらに，計量恒等式を用いた簡単な計算から $< \lambda', V >= \Delta(1 - aB)$ となり，これは，Ⅲ において $\Delta > 0$ なので，$B > 1/a$ のときに負となるから，λ が未来向きであることが分かる．

曲線 λ において，$dt/ds = l'(s)[t] = -1$ なので，ここでタイムマシンが機能する．つまり，λ が未来に進むとき，ボイヤー－リンキスト座標の t は，確実に，**減少**しているのである．いま λ が点 $(r^*, \pi/2, \varphi_1, t_1)$ に到着したとする．この点と事象 q は，過去向き時間的曲線 β で結ぶことができる．そこで，β のパラメータを逆にすれば，曲線 $\alpha \cup \lambda \cup (-\beta)$ が求めるものとなる (図 2.5 を見よ). □

この結合した曲線において，p から $\mathfrak{T}$ まで，それに $\mathfrak{T}$ から q までの区間では，時間は未来へ向かって進行する．しかし，ブランドン・カーターが指摘したように，$\mathfrak{T}$ 内の部分では，過ぎ去りし時間を取り戻しているのである．

補題 2.4.9　タイムマシン $\mathfrak{T}$ は，領域 $-\max\{\mathrm{M}, a\} < r < 0$ に存在する．$\mathfrak{T}$ の t 断片は，外側の赤道部分がリング状特異領域である立体トーラスになっている．

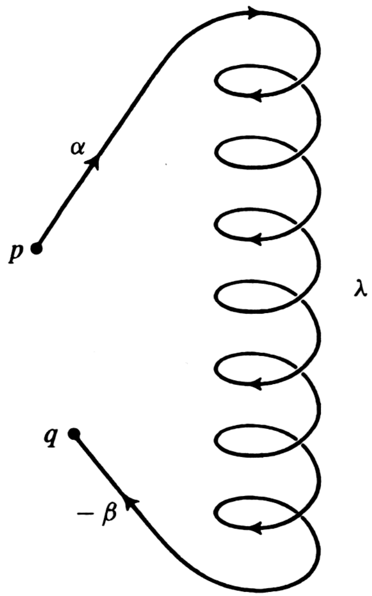


図 2.5　ブロック Ⅲ の住人は，タイムマシンを使い，任意の事象へ旅することができる．自分の過去へも行けるのである．

証明　∂_φ の因果的特性は

$$g_{\varphi\varphi} = [r^2 + a^2 + 2\mathrm{M}ra^2\rho^{-2}S^2]\,S^2$$

の符号で決定する．ここに，ρ^2 は正であるから，上式の符号は，関数

$$f(r,\vartheta) = \rho^2(r^2+a^2) + 2\mathrm{M}ra^2S^2 = r^4 + a^2(1+C^2)r^2 + 2\mathrm{M}a^2S^2r + a^4C^4$$

の符号で決定する．この式の各項は正であるから，$r \geq 0$ のとき，∂_φ は空間的である．また，直接の計算から，$r < -\max\{\mathrm{M}, a\}$ において $f(r,\vartheta) > 0$ であることが分かる．

赤道面 $\vartheta = \pi/2$ において，関数 $f(r,\vartheta)$ は $r(r^3 + a^2r + 2\mathrm{M}a^2)$ となる．これは，$k < r < 0$ において負である．ここに，k は，多項式 $r^3 + a^2r + 2\mathrm{M}a^2$ の解 (値は負) である．

r と $C = \cos\vartheta$ で表せば

$$f(r,C) = r^4 + a^2(1+C^2)r^2 + 2\mathrm{M}a^2r - 2\mathrm{M}a^2C^2r + a^4C^4$$

と書ける．(r, C) 平面において，$f(r, C) = 0$ は，r 軸上にある直径 $[k, 0]$ に関して対称な，卵形線となっている．($r = 0$, $C = 0$ である点は除く．この点はリング状特異領域内にある.) この卵形線の内部において ∂_φ は時間的であり，このことは，φ と t の任意の値の所で成立する．□

2.5 カー・スター時空

ここでは，**カー座標**を使って，カー計量を地平面まで拡張する．隣り合ったボイヤー－リンキスト・ブロックを，地平面に沿って結合するのである．その結果，地平面は，結合された時空の超曲面となる．

カー座標は，零的測地線の 2 組の族で構成される．この特別な零的測地線を**主要零的測地線** (principal null geodesic) と呼ぶ．これらは光線の筋道を表しており，1 つの族は星へ向かう方向，もう 1 つの族は星から離れる方向になっている．つまり，内向きの主要零的測地線とは，カー外部の遠く離れた所にいるオブザーバーから発射された光のビームなのである (外向きなら逆になる). これらの曲線をブロック I のボイヤー－リンキスト座標で表示すると

$$r' = \pm 1, \qquad \vartheta' = 0, \qquad \varphi' = a/\Delta, \qquad t' = (r^2 + a^2)/\Delta,$$

となる．ここに，**外向き**主要零的測地線のとき $+1$ の符号を，**内向き**のときは -1 の符号をとるものとする．これらの曲線が地平面に近づくと，$\Delta \to 0$ であるから，無限に回転して遅くなり，ボイヤー－リンキスト座標が適用できなくなることが分かる．

主要零的測地線は，カー時空の構造と深く結びついている．測地線の中でも特別なもの (第 4 章) というだけではなく，カー時空の曲率から直接導くこともできるもの (第 5 章) なのである．この曲線 γ が実際に測地線であることは，次の節で調べる．ここでは，γ が，未来向き零的曲線であり，$r \to \infty$ の極限において，直接星の方向を向いていることを示す．γ の接ベクトルは

$$\gamma' = \pm \partial_r + \Delta^{-1} a \partial_\varphi + \Delta^{-1}(r^2 + a^2)\partial_t = \pm \partial_r + \Delta^{-1} V$$

である．ここに，V は，定義 2.1.2 で定義した標準ベクトル場である．まず，$\Delta = r^2 - 2\mathrm{M}r + a^2$ であるから，$r \to \infty$ とすると，上式は $\pm\partial_r + \partial_t$ になることがすぐに分かる．これは，ブロック I の，ミンコフスキー時空に近い領域 $r \gg 1$ においては，星に対して直角であることを示している．次に，補題 2.1.3 と g_{rr} の式から

$$< \gamma', \gamma' > = g_{rr} + \Delta^{-2} < V, V > = 0$$

となり，γ が零的であることが分かる．最後に，ブロック I で r が大きい所では，∂_t が未来向きで，補題 2.1.1 の計量恒等式 $(m4)$ から

$$< \gamma', \partial_t >= \Delta^{-1}\left[a\, g_{t\varphi} + (r^2 + a^2)\, g_{tt}\right] = -1$$

となるから，γ は未来向きである．

主要零的測地線の 2 つの族に連動して，カー座標も 2 種類存在する．符号の混乱を避けるため，**内向線** (ingoer), つまり星に向かう方向の主要零的測地線が作るカー座標を先ず考えることにする．(符号を変えれば外向きのカー座標となる.)

物理学的な観点から見れば，地平面を通過する粒子の筋道の中で，直角に落下するものが内向線なのである．地平面を含む座標系を組み立てるため，内向線を座標曲線にしなければならない．そのために，φ の回転を戻し，t の速度を遅くし，内向線では，新しい φ と t が定数になるようにする．要するに結果として，3 つのブロックにおいて，**カー・スター座標関数** (Kerr-star coordinate function)

$$t^* = t + T(r), \qquad \varphi^* = \varphi + A(r),$$

を与えればよい．ここに，**時間関数** (time function) $T(r)$ と**角度関数** (angle function) $A(r)$ は,

$$dT/dr = (r^2 + a^2)/\Delta$$

と

$$dA/dr = a/\Delta$$

を満たす関数である．内向きの主要零的測地線 γ は，前に述べたように $r' = -1$, $\vartheta' = 0$ を満たすが，上式を使うと

$$(\varphi^*)' = \varphi' + dA/dr\ r' = 0, \qquad (t^*)' = t' + dT/dr\ r' = 0$$

となる．よって，下記の結果から，γ は，**減少**する r をパラメータとする r 座標曲線となる．

補題 2.5.1　各ボイヤー－リンキスト・ブロック $B = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}$ において，写像 $\xi^* = (r, \vartheta, \varphi^*, t^*)$ は，$B-$ (軸 A) における座標系となっている．この ξ^* を**カー・スター座標系** (Kerr-star coordinate system) と呼ぶ.

証明　ξ^* が 1 対 1 であることを示すため，$\xi^*(p) = \xi^*(q)$ とする．このとき，$r(p) = r(q)$, $\vartheta(p) = \vartheta(q)$ であり，

$$t^*(p) = t^*(q) \ \Rightarrow\ t(p) + T(r(p)) = t(q) + T(r(q)) \ \Rightarrow\ t(p) = t(q)$$

となる．(円座標として) φ^* についても同様．p と q は，同じボイヤー－リンキスト座標を持つから，$p = q$ である．

ヤコビアン $\partial(r, \vartheta, \varphi^*, t^*)/\partial(r, \vartheta, \varphi, t)$ がゼロでないことはすぐ分かる (計算すれば $+1$ である)．よって ξ^* は微分同相であり，座標系となる．□

滑らかな多様体としては，ボイヤー－リンキスト・ブロックをつなげたものは $R^2 \times S^2$ である．しかし，計量のボイヤー－リンキスト形式は，結合面で定義できない．実際，2.4 節で見たように，地平面に向かって落下するものは，無限の時間回転し続けるのである．関数 $T(r)$ と $A(r)$ は，分母に Δ があるから，r が地平面の値 $r_\pm$ に近づけば，無限大に近づく．ブロックどうしを**幾何学的**に結合するには，座標を大幅に変更しなければならないのである．

カー・スター座標 ξ^* の座標ベクトル場と，ボイヤー－リンキスト座標 ξ のベクトル場とは，どのように関連しているのであろうか．座標関数で変更したところは，r の関数を加えた所である．よって，**座標ベクトル場** ∂_t, ∂_ϑ, ∂_φ **は，どちらの座標系でも同じになる**．もちろん，地平面の部分は別に検討しなければならない．カー・スター座標における r の座標ベクトル場を ∂_r^* で表すことにする．このとき基本定理から

$$\partial_r = \partial_r^* + \Delta^{-1} a\, \partial_\varphi + \Delta^{-1}(r^2 + a^2)\, \partial_t = \partial_r^* + \Delta^{-1} V$$

となる．ここに，V は，いつも通り，標準ベクトル場を表す．したがって，$\partial_r^* = \partial_r + \Delta^{-1} V$ は (この各項は地平面で定義されないが)，地平面まで拡張される．

カー・スター座標に関するカー計量の成分 g_{ij}^* を求める．ボイヤー－リンキスト座標から変更した所は $\partial_r \to \partial_r{}^*$ だけである．これまでの作り方から，内向きの主要零的測地線は $-\partial_r{}^*$ の積分曲線であり，$g_{rr}^* = 0$ である．また，$g_{r\vartheta}^* =< \partial_r{}^*, \partial_\vartheta >=< \partial_r - \Delta^{-1} V, \partial_\vartheta >= 0$ となる．さらに，

$$g_{r\varphi}^* =< \partial_r{}^*, \partial_\varphi >=< \partial_r - \Delta^{-1} V, \partial_\varphi >= -\Delta^{-1} < V, \partial_\varphi >= -aS^2,$$
$$g_{rt}^* =< \partial_r{}^*, \partial_t >=< \partial_r - \Delta^{-1} V, \partial_t >= -\Delta^{-1} < V, \partial_t >= 1$$

である．

以上より，ds^2 について次の式を得る．

補題 2.5.2 カー・スター座標で表示したカー計量は線素

$$ds^2 = g_{tt} dt^{*2} + 2 g_{t\varphi}\, dt^* d\varphi^* + g_{\varphi\varphi}\, d\varphi^{*2} + \rho^2 d\vartheta^2 + 2 dt^* dr - 2aS^2 d\varphi^* dr$$

を持つ.

上式の 4 つの成分 g_{tt}, $g_{t\varphi}$, $g_{\varphi\varphi}$, $g_{\vartheta\vartheta}$ は，前と同じく，r と ϑ の関数である．ボイヤー－リンキストの成分と大きく変わったのは，$g_{rr} = \rho^2/\Delta$ が $2(dt^* - aS^2 d\varphi^*)\,dr$ になった部分である．ここに，$S = \sin\vartheta$ である．g_{rr} が，ボイヤー－リンキストの式で，$\Delta = 0$ で定義できない唯一の項であり，ds^2 の新しい式に登場した 2 項では，そこでも定義されている．このようにして，(軸を除いた)$\Delta = 0$ を含めてカー計量が定義された．なお，簡単な計算から $\det(g^*_{ij}) = -\rho^4 S^2$ となり，この領域で非退化であることも分かる．

軸については，前と同様に処理する．カー・スター座標は，軸 A で定義されないが，ボイヤー－リンキスト座標の場合 (補題 2.2.2) と同様にして，拡張することができる．

定義 2.5.3　次の条件を満たす多様体を**カー・スター時空** (Kerr-star spacetime) と呼び，K^* で表す．

1. 解析的多様体 $R^2(r, t^*) \times S^2(\vartheta, \varphi^*) - \Sigma$ である．ここで，Σ は，$r = 0, \vartheta = \pi/2$ により与えられるリング状特異領域である．

2. 補題 2.5.2 で与えられる計量テンソルを持つ (軸まで拡張する).

3. 大域的に定義される零的ベクトル場 $-\partial_r{}^*$ を未来向きとして時間的向き付けをする．

この時間的向き付けは，$< \partial_t, \partial_r{}^* >= g^*_{tr} < 0$ であるから，$r \gg 1$ における普通の未来向き ∂_t と矛盾しない．この符号は〈標準的〉な選択である．第 3 章で，最大に拡張されたカー時空を構成するときには，符号を変更することもある．そのような構成においては，カー・スター時空がどのようにボイヤー－リンキスト・ブロックを含んでいるか，が問題となる．

補題 2.5.4　任意のボイヤー－リンキスト・ブロック B において，座標関数 $(r, \vartheta, \varphi, t) \to (r, \vartheta, \varphi^*, t^*)$ は，B から K^* の開集合 B^* の上への等長写像 j^* へ，解析的に (唯一の方法で) 拡張できる．

証明　座標写像 j は，その構成からして等長であるが，定義域に B の軸は含まれていない．カー計量は軸まで拡張できるので，j も解析的に軸まで拡張されれば，連続性から，拡張した写像も等長となる．

任意の数 α に対し，S^2 の，z 軸に関する角度 α の回転を R_α と表す．行列表現から，$R \times S^2$ から S^2 への写像 $(\alpha, q) \to R_\alpha(q)$ は解析的であることが分かる．さて，各点 $(r, t, q) \in B \subset R^2 \times S^2$ を

$$(r, t^*, R_{A(r)}(q)) \in K^* \subset R^2 \times S^2$$

に写す写像を j^* と置く．これは解析的であり，j の拡張になっている．実際，$q \neq (0, 0, \pm 1)$ ならば，回転は余緯度 ϑ を不変にし，経度 φ は，$A(r)$ により φ^* へ増加している．□

このようにして，B を K^* に**標準的に埋め込んだ**ので，B を K^* の部分集合とみなすことにする．まとめると次のようになる．遅速カー時空では，地平面 $H_+ \colon r = r_+$ と $H_- \colon r = r_-$ を結合面として (図 2.7 参照) ボイヤー－リンキスト・ブロックを結合し，1 つの時空にする．極限カー時空では，$H \colon r = \mathrm{M}$ に沿って 2 つのブロック I と III を結合する．高速カー時空では，地平面が無いので，K は，1 つのブロック I=III の等長的なコピーである．

特に断らない限り，ボイヤー－リンキスト・ブロック I, II, III には，K^* の**部分集合として時間的向き付けを与える**ことにする．つまり，∂_t が時間的である場所 (つまり，図 2.4 のように，$r > 2\mathrm{M}$, $r \leq 0$ の所) では，これを未来向きとする．ブロック II では，∂_r が時間的であり，$< \partial_r, -\partial_r{}^* >> 0$ なので，これは過去向きとする．

これで，地平面が時空に組み込まれた．次に，これの幾何学的に興味深い性質を述べる．

命題 2.5.5 K^* において，地平面 H は，零的で連結な，全測地的閉超曲面になっている．なお，$-\partial_r{}^*$ の向きを未来円錐とする．標準ベクトル場 V を H に制限したものは，H に接する (よって H に垂直でもある) 唯一の零的ベクトル場となる．H における V の積分曲線は零的な原測地線である．この曲線 (これを**静止光子** (restphoton) と呼ぶ) が H を**生成する** (generate), と言うことにする．

証明 解析的な多様体として，K^* は $R^2 \times S^2 - \Sigma$ である．R^2 (を K^* に持上げたもの) の座標を r, t^* とする．ここで，r をゼロでない定数にすると，$R^1 \times S^2$ に微分同相な閉超曲面が作られる．特に $r = r_\pm$(極限カー時空のときは $r = \mathrm{M}$) とすると，各地平面は，時間全体を通して球となる (図 2.2 参照).

断片 $r =$ (定数) において，関数 ϑ, φ^*, t^* は，軸以外の所で座標系となっている．

この座標に対して，補題 2.1.4 より

$$\det\begin{bmatrix}\rho^2 & 0 & 0\\ 0 & g_{\varphi\varphi} & g_{\varphi t}\\ 0 & g_{t\varphi} & g_{tt}\end{bmatrix} = -\rho^2\Delta S^2$$

となる．したがって，$\Delta = 0$ ならば計量は退化となる．つまり，H は零的である．連続性から，軸においても零的となる．

各接空間 $T_p(H)$ は $T_p(K^*)$ の零的部分空間である．よって，補題1.5.11 から，$T_p(H)$ のベクトルは，零円錐が $T_p(H)$ に接している直線上のベクトルを除いて，すべて空間的である．(図 1.5(c) を見よ.) 零的ベクトル $-\partial_r^*$ は未来向きで H に接していないから，これが地平面の未来側を与えている．

標準ベクトル場 V は，∂_φ と ∂_t の 1 次結合であるから，H に接している．また，$< V,V >= -\Delta\rho^2$ であるから，地平面においては V は零的となる．つまり，H に接している零的直線上にのっているのである．ローレンツ・ベクトル空間の線形代数 (補題 1.5.11 参照) より，V は地平面に**垂直**でもある．実際，$V^\perp = T_p(H)$ である．

地平面が全測地的であることを示す．先ず，ベクトル場の $V = (r^2 + a^2)\partial_t + a\partial_\varphi$ と $V_\pm = ({r_\pm}^2 + a^2)\partial_t + a\partial_\varphi$ は，地平面 $r = r_\pm$ 上で一致する．V_+, V_- は，キリング・ベクトル場の ∂_φ と ∂_t の定数係数 1 次結合であるから，これらも，キリング・ベクトル場になる．

$H = H_\pm$ に接するベクトル場を X, Y とする．このとき，$\nabla_X Y$ も H に接していることを示せばよい (17 節を見よ). 部分多様体 H において，$V = V_\pm$ で $X, Y \perp V$ であるから

$$< \nabla_X Y, V >= X < Y, V > - < Y, \nabla_X V >= - < Y, \nabla_X (V_\pm) >$$

となる．$V_\pm$ がキリング・ベクトル場ゆえ，この式から $< \nabla_X Y, V >= - < \nabla_Y X, V >$ となる．括弧積 $[X,Y]$ は，H に接しているから，V に垂直である．しかるに，$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ なので，$< \nabla_X Y, V >=< \nabla_Y X, V >$ となる．これより $< \nabla_X Y, V >= 0$ となり，H が全測地的であることが分かる．

最後に，V の積分曲線が (適当にパラメータを与えて) 測地線になることを見る．点 $p \in H$ を取り，初期速度 V_p を持つ K^* の測地線を γ とする．H は閉で全測地的であるから，γ は常に H 上にある．また，γ は測地線であるから，因果的特性は不変である．最初が零的なので，つねに零的である．H に接する零的直線は 1 つしかないから，γ は V に 1 次従属となる．よって，p を始点とする V の積分曲線のパラメータを変更したものが γ になっている．すなわち，V の積分曲線は原測地線なのである．□

未来円錐が，つねに，地平面 H の $-\partial_r{}^*$ がある側に存在するから，地平面はいわば半透膜になっている．つまり，**H と交わる未来向き時間的曲線は，必ず，r が減少する方向に断横的に交わっている**のである．零的曲線についても (静止光子を除いて) 同様となる．よって，遅速カー時空 K^* では，質点や光子は，ブロック I から，H_+ を通り，ブロック II へ通過し，さらに，H_- を通ってブロック III へ進むのである．地平面がブロックを分けているので，粒子は，III から II, II から I, のような逆行はできない．(第 3 章では K^* を最大に拡張するが，そこでもこの性質は成立する.)

すぐ後で，静止光子は，**外向き**の主要零的測地線であることを示す．つまり，外向きに (光の速度で) 運動しているが，ブラックホールの重力のため半径 $r_\pm$ の場所に留まっている光子の軌跡が地平面 $H_\pm$ なのである (図 2.6 を見よ). この相対論的な現象は，シュワルツシルド時空でも見られるが，その原点はルイス・キャロルの想像の世界までさかのぼる．彼の本の中で，赤のクイーンは「ねえ，おまえもわかっただろうけど，この国じゃあね，おなじ場所にとどまってるのにも，ちからいっぱい走らなきゃだめなのよ」といっている．

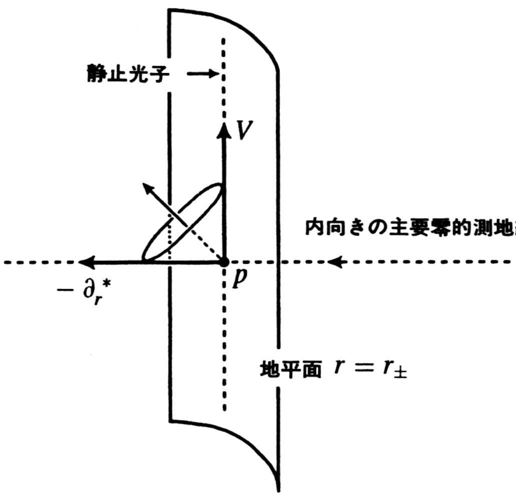


図 2.6　K^* **の地平面の各点** p **において，内向きの主要零的測地線は，**r **をパラメータとする** $-\partial_r{}^*$ **の積分曲線で点** p **を通るものである．点** p **を通る静止光子は，外向きの主要零的測地線であり，地平面に捕らわれているものである．その他の，**p **を通る未来向き非空間的曲線は，(** K^* **に標準的な時間的向き付けを与えたとして)** $-\partial_r{}^*$ **の方向に地平面を横切っている．**

静止光子は，次のような意味で，回転を行っている．$H_\pm$ において，$V = V_\pm = (r_\pm^2 + a^2)\partial_t + a\partial_\varphi$ である．ベクトル場 ∂_t(これは空間的) の流れは，$V_\pm$ の積分曲線を動かす．つまり，静止光子が静止光子へ移るのである．$V_\pm$ と ∂_t は，軸以外では一次独立なので，この回転で不変の静止光子は，$H_\pm \cap A$ に適当にパラメータを与えたものである．

ここまでは内向きの主要零的測地線について述べてきた．次に，K^* における外向きのものを検討する．**外向線** (outgoer) は，方程式

$$r' = +1, \qquad \vartheta' = 0, \qquad \varphi' = a/\Delta, \qquad t' = (r^2 + a^2)/\Delta$$

で与えられる．カー・スター座標では

$$r' = +1, \qquad \vartheta' = 0, \qquad \varphi^{*\prime} = 2a/\Delta, \qquad t^{*\prime} = 2(r^2 + a^2)/\Delta$$

である．この式から分かるように，この曲線は，地平面 $\Delta = 0$ において定義されていない．外向線と内向線は対称的な概念であるから，外向線も，K^* 全体で定義されるべきである．これは，測地線としてのパラメータを無視すれば，容易である．上の式から，外向線は，ベクトル場

$$\partial_r{}^* + 2a/\Delta\partial_\varphi + 2(r^2 + a^2)/\Delta\,\partial_t = \partial_r{}^* + (2/\Delta)\,V$$

の積分曲線になっている．これにスカラー $\Delta/2$ を掛けると，ベクトル場 $N^* = (\Delta/2)\,\partial_r{}^* + V$ を得る．これは，軸を含めて，K^* 全体で定義されている．また，N^* は，ブロック I においてもとの外向線と同じ方向を向いているので，常に未来向きである．そこで，K^* の**外向き主要零的測地線** (outgoing principal null geodesic) とは，N^* の積分曲線のパラメータを変更して測地線にしたものである，と定義する．これで，カー・スター時空の各点において，外向線と内向線が (パラメータを除いて)1 本づつ存在することになる．

パラメータの変更は，別に，計算の都合だけのことではない．2 つの重要な結果が含まれているのである．

1. 外向きの主要零的測地線で，地平面 H と交わるものができた．この新しい外向線は，H に含まれる静止光子である．実際，静止光子は，V の積分曲線で，パラメータを変更して測地線にしたものであるが，$\Delta = 0$ のとき，N^* は V に一致している．
2. 2 つの地平面の間 (つまりブロック II で，ここでは $\Delta < 0$ である) では，外向きの主要零的測地線は，最初のパラメータでは過去向きになってしまう．これは，粒子はつねに未来向きである，という要請に反する．パラメータを変更し，ブロック II

では，**外向き**の主要零的測地線の r 座標が**減少**するようにする．これで，光子は未来方向へ進む，という因果的な必要性を満足することになる．なぜなら，2 つの地平面の間では，r は，距離ではなく，時間を計測しており，$-\partial_r{}^*$ が未来向きなのである．

地平面を含めて外向きに進む場合ではパラメータの変更を必要としたが，これは，内向線や外向線はパラメータで設定された曲線の族ではない，ということを示している．むしろ，K^* 上の 2 つの**叢**なのである (1.7 節参照)．全測地的な 1 次元部分多様体で作られる叢なのである．K^* の各点において，叢に含まれる積分曲線が一意に存在している．その曲線は，必要なら，パラメータ変換して測地線にすることができる．

第 3 章で構成に使うために，主要零的測地線上で r がどのように変化するのかを知る必要がある．内向線は簡単である．$r = +\infty$ から $r = -\infty$ へと変化する．外向線では，静止光子の場合には，$r_\pm$ で，r は一定である．ブロック I では，$dr/ds = +1$ から $r(s) = r_0 + s$ となり，外向線は，極限値 r_- から $r = +\infty$ へ変化することが分かる．ブロック II では，先に述べたようにパラメータを逆転して $r(s) = r_0 + s$ なので，極限値 r_+ から極限値 r_- へ変化することになる．ブロック III では，$r(s) = r_0 - s$ となり，$-\infty$ から r_- へ変化する (図 2.7 を見よ)．特にブロック III の場合，**外向線**が，$r \ll -1$ から $r = r_-$ へと**内向き**に移動することになる．このような用語の混乱は，常識的なブロック I で用語を設定したことに由来するもので，よく見かけることになる．

粒子がブロック I から外側の地平面 $H_+ \colon r = r_+$ を横切ると，それは元へ戻れないことを示した．では，H_+ にかなり近づいた宇宙飛行士は，$r = \infty$ へ脱出できないのであろうか．この質問の答えが「イエス」であることから，H_+ は**事象の地平面** (event horizon) (K^* の領域の境界で，そこから無限大へ脱出可能なもの) と呼ばれているのである．

補題 2.5.6 遅速カー・スター時空の 1 点を p_0 とする．この点がブロック I 内に存在するための必要十分条件は，p_0 を始点とする質点 α (つまり，未来向き時間的曲線) で $r(\alpha(\tau)) \to +\infty$ となるものが存在することである．

証明 ブロック I 以外の K^* からスタートした粒子は地平面 $r = r_+$ を横断しない．脱出に近い状態のものとしては，H_+ の静止光子があるだけである (少なくとも，それ以上ブラックホールに落ち込まない)．それで，主要零的測地線を元にして，脱出する質点 α を

$$dr/d\tau = \lambda, \qquad d\vartheta/d\tau = 0, \qquad d\varphi/d\tau = a/\Delta, \qquad dt/d\tau = (r^2 + a^2)/\Delta$$

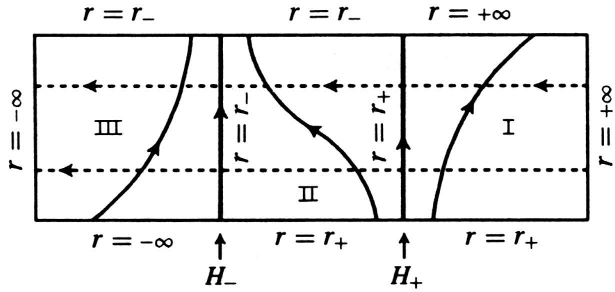


図 2.7　カー・スター時空 K^* の模式図．内向きの主要零的測地線は，水平の点線で示してあるとおり，地平面を横切っている．外向きの主要零的測地線は，曲線で示してあるとおり，地平面を横切らない．(地平面 H_+ 上にある静止光子も外向きである.)

と定義する．ここに，λ は $0 < \lambda < 1$ を満たす定数である．この曲線 α は，$p_0 \in I$ を始点とし，全ての $\tau > 0$ について定義され，$r \to \infty$ となっている．あとは，これが $\lambda < 1$ で時間的であることを示せばよい．実際，$\alpha' = \lambda\partial_r + \Delta^{-1}V$ であり，I で $\Delta > 0$ なので，

$$< \alpha', \alpha' >= \lambda^2 g_{rr} + \Delta^{-2} < V, V >= (\lambda^2 - 1)\rho^2/\Delta < 0$$

となる．□

次に，カー・スター時空の (北と南の) 軸 A の幾何学を調べる (図 2.2 を見よ)．カー・スター座標において，ϑ をゼロ，あるいは π とし，φ^* を除けば A の座標となる．つまり，$A \approx R^2(t^*, r)$ で，線素は

$$dS^2 = g_{tt}dt^{*2} + 2dt^*dr = dt^*\theta$$

となる．ここに，θ は 1 形式 $-\Delta/(r^2 + a^2)\,dt^* + 2dr$ である．

A は，ローレンツ計量を持った全測地的閉曲面である (時間軸全体を通して空間直線が存在する)．方程式 $dt^* = 0$ と $\theta = 0$ が，A における 2 組の零的曲線を表している．つまり，t^* が定数である直線と，方程式 $dt^*/dr = 2\Delta/(r^2 + a^2)$ の解曲線である．**これらの曲線が，それぞれ，内向き，外向きの主要零的測地線になっている**．実際，各々，$-\partial_r{}^*$ と $N^*|_A = (\Delta/2)\partial_r{}^* + (r^2 + a^2)\partial_t$ の積分曲線である．

K^* の軸では，他の場所の場合と同じように，内向線は，$r = \infty$ から $r = -\infty$ まで〈まっすぐに〉進んでゆく．外向線は，$A \cap \mathrm{I}$ において，$r = \infty$ へ向かって〈普通

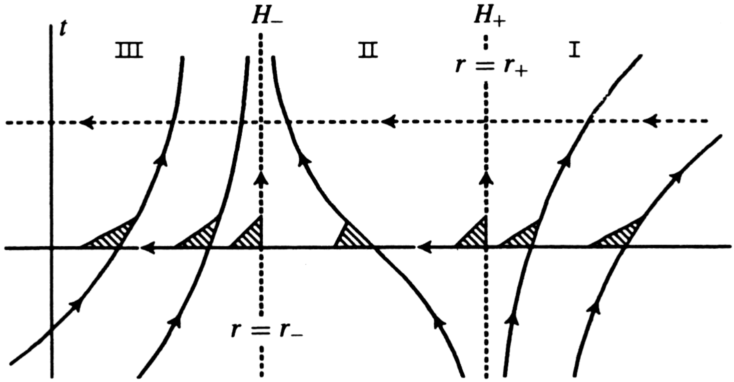


図 2.8 K^* **の北・南軸** A **上の主要零的測地線．水平の直線が内向きであり，(**t **軸を除く) 他の曲線・直線が外向きである．斜線部分が未来円錐を表す．曲線** $H_\pm \cap A$ **のパラメータは，(外向きである) 静止光子のみである．**t **方向への変換は等長写像であり，未来円錐と主要零的測地線を保存する．**

通り〉進行する．しかし，$A \cap$ III においては，様子が全然異なっている．この測地線は，軸に沿って，ブラックホールに**向かって**進んでいる光子を表すことになる．軸上で，ブロック III からブラックホールへ真っ直ぐ向かう光のビームなのである．だが，微分方程式から分かるように，進み具合はだんだん遅くなり，$r = r_-$ に到達することはない．つまり，カー重力場により，引力ではなくて**斥力**が働いているのである．ブロック III は，ブロック I とは異なり，重力が逆になっていて，質量 M > 0 がマイナスに感じられる**ホワイトホール**なのである．

主要零的測地線に接するベクトルを**主要零的ベクトル** (principal null vector) と呼び，そのベクトルの方向を**主要零的方向** (principal null direction) と呼ぶ．K^* の各点 p において，2 つの主要零的方向で定義される平面 Π(必然的に時間的である) を，点 p における**主要平面** (principal plane) と呼ぶ．すなわち，$\Pi = \mathrm{Span}\{\partial_r, V\}$ は，K^* の 2 次元分布である．これの直交分布 $\Pi^\perp = \mathrm{Span}\{\partial_\vartheta, W\}$ は空間的である (図 2.3 を見よ)．下の注意 2.5.8 で述べるように，シュワルツシルド時空の場合には，この 2 つの分布は積分可能になっているが，カー時空の場合にはそうならない．

補題 2.5.7 K^* の任意の開集合において，Π と $\Pi^\perp$ は積分可能ではない．

証明　Π において，

$$[\partial_r{}^*, V] = [\partial_r, V] = [\partial_r, (r^2 + a^2)\partial_t + a\partial_\varphi] = 2r\partial_t$$

である．ボイヤー－リンキスト・ブロックの軸を除いた所では，∂_t, ∂_r, ∂_φ, は独立なので，∂_t は Π に入らない．よって，K^* の開集合において Π は積分可能ではない．

同様にして，$\Pi^\perp$ では，$[\partial_\vartheta, W] = 2aSC\partial_t$ となるので，積分可能ではない．□

軸 A の点では，主要零的方向は両方とも A に接している．よって，A は Π の積分平面になっている．上記の証明を見れば，K^* の他の場所では積分可能にならないことが分かる．(次の章では，$\Pi^\perp$ の例外的な積分曲面が登場する．)

注意 2.5.8(シュワルツシルド時空の場合)　カー時空の結果の多くはシュワルツシルド時空の場合にも成立する．a をゼロとするだけの話である．しかし，2 つの項目については，幾何学的に大きな差違がある．2.1 節で見たように，カー計量において $a = 0$ とすると

$$ds^2 = -h\,dt^2 + h^{-1}dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + S^2 d\varphi^2)$$

となる．ここに

$$h = h(r) = 1 - 2\mathrm{M}/r$$

である．これは，積多様体 $R(t) \times R^3$ 内の**シュワルツシルド・ブロック** (Schwarzschild block) I : $r > 2\mathrm{M}$ と II : $0 < r < 2\mathrm{M}$ において，非退化な計量となっている．カー・スター座標を ($a = 0$ として) 使えば，地平面 H: $r = 2\mathrm{M}$ を含めた座標系が作れる．これで，H に沿って 2 つのブロックを結合することができる．カー時空の場合と同じように，地平面は零的超曲面になっていて，粒子は，(∂_t を未来向きとして)I から II へ向かうことはできるが，逆方向へ行くことはできない．‖

$h > 0$ において，つまり $r > 2\mathrm{M}$ の所で，∂_t は時間的なので，エルゴ球は存在しない．2.7 節で述べるが，シュワルツシルド時空の原点 $r = 0$ は真の特異点なのである．カー時空のようにこれを拡張する，というわけにはいかない．ブロック III は存在しないのである．

$a = 0$ として，シュワルツシルド時空での主要零的測地線は

$$r' = \pm 1, \quad \vartheta' = 0, \quad \varphi' = 0, \quad t' = 1/h$$

で与えられる．これは，R^3 の原点 $r=0$ から出る (あるいはそこへ向かう) 光の直線に時空としてのパラメータを与えたものである．よって，先に定義した分布 Π と $\Pi^\perp$ は，積多様体 $R^2(t, r>0)\times S^2$ の，それぞれ，水平および垂直な接平面となる (よって明らかに積分可能). 幾何学的な言葉でいえば，シュワルツシルド時空は，**歪曲積構造** (warped product structure) を持った多様体なのである (O'Neill 1983). ここが，カー時空とは異なる単純な所である．

次に，カー時空の曲率を計算する．これにより，リング状特異領域 Σ が (軸や地平面とは異なり) カー時空の部分集合ではないことが分かる．

2.6　接続形式

ボイヤー－リンキスト座標から，ボイヤー－リンキスト・ブロックにおいて，標構場を自然に定義することができる．第 1 章で述べたカルタン流の方法を使い，標構場の接続形式を計算し，関係するベクトル場の共変微分を求めることにする．**曲率**に関しては次の節で述べる．

これまでのように標準ベクトル場を V, W で記す (定義 2.1.2) ことにすると，ベクトル場 $\partial_r, \partial_\vartheta, V, W$ がそれぞれ直交していることは分かっている．スカラー積を取ると

$$g_{rr}=\rho^2/\Delta, \qquad g_{\vartheta\vartheta}=\rho^2,$$
$$<V,V>=-\Delta\rho^2, \qquad <W,W>=\rho^2S^2,$$

となる．ここに，$S=\sin\vartheta$, $C=\cos\vartheta$ である．関係式 $|\partial_r|=|g_{rr}|^{1/2}=(\rho^2/|\Delta|)^{1/2}$ などを使い，この式を正規化する．Δ はブロックによって符号が変わるので，$|\Delta|=\varepsilon\Delta$ と書くことにする．この記号は，$\mathrm{I}\cup\mathrm{III}$ では $\varepsilon=\mathrm{sgn}\,\Delta$ は $+1$, II では -1 とする．また，ρ は，$\rho^2=r^2+a^2C^2$ の正の平方根を表すとする．したがって上の式の場合は $|\partial_r|=\rho/\sqrt{\varepsilon\Delta}$ となる．

定義 2.6.1　$\mathrm{I}\cup\mathrm{II}\cup\mathrm{III}$ における**ボイヤー－リンキスト標構場** (Boyer–Lindquist frame field) を

$$E_1=\frac{\sqrt{\varepsilon\Delta}}{\rho}\partial_r, \qquad E_3=\frac{W}{|W|}=\frac{1}{\rho S}(\partial_\varphi+aS^2\partial_t),$$
$$E_2=\frac{1}{\rho}\partial_\vartheta, \qquad E_0=\frac{V}{|V|}=\frac{1}{\rho\sqrt{\varepsilon\Delta}}\big((r^2+a^2)\partial_t+a\partial_\varphi\big),$$

で定義する．

直接計算すれば，これらが正規直交基底になっていることが確認できる．なお，擬リーマン計量の符号 $\varepsilon_i =< E_i, E_i >$ を見ると，今の場合，I ∪ III での時間的ベクトル場は E_0, II での時間的ベクトル場は E_1 であるから，

$$\varepsilon_0 = -\varepsilon, \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon, \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = +1,$$

となっている．

これに対応する余標構場 $\{\omega^i\}$ は，$\omega^i(E_j) = \delta^i_j$ を満たす1形式であるから，次の式を得る．

補題 2.6.2　I ∪ II ∪ III における**ボイヤー－リンキスト余標構場** (Boyer–Lindquist coframe field) は

$$\omega^1 = \frac{\rho}{\sqrt{\varepsilon\Delta}}\, dr, \qquad \omega^3 = \frac{S}{\rho}\big((r^2 + a^2)\, d\varphi - a dt\big),$$
$$\omega^2 = \rho\, d\vartheta, \qquad \omega^0 = \frac{\sqrt{\varepsilon\Delta}}{\rho}(dt - aS^2 d\varphi),$$

で与えられる．

これらの1形式を

$$ds^2 = -\varepsilon(\omega^0)^2 + \varepsilon(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2$$

に代入して，線素の新しい表現として次の式を得ることができる．

系 2.6.3　カー時空の線素をボイヤー－リンキスト座標で表示すると

$$\begin{aligned} ds^2 = &- (\Delta/\rho^2)\big[dt - aS^2 d\varphi\big]^2 + (\rho^2/\Delta)\, dr^2 \\ &+ \rho^2 d\vartheta^2 + (S^2/\rho^2)\big[(r^2 + a^2)\, d\varphi - a\, dt\big]^2 \end{aligned}$$

と書くことができる．(質量 M は Δ に含まれている.)

補題 2.6.2 の式を逆に解けば，ボイヤー－リンキスト座標の式を余標構場で表現した式

$$dr = \frac{\sqrt{\varepsilon\Delta}}{\rho}\omega^1, \qquad d\varphi = \frac{1}{\rho S}\omega^3 + \frac{a}{\rho\sqrt{\varepsilon\Delta}}\omega^0,$$
$$d\vartheta = \frac{1}{\rho}\omega^2, \qquad dt = \frac{aS}{\rho}\omega^3 + \frac{r^2 + a^2}{\rho\sqrt{\varepsilon\Delta}}\omega^0,$$

を得る．

ボイヤー－リンキスト標構場の式から接続形式を計算するには，双対1形式 ω^i の外微分 $d\omega^i$ を ω^i **で表す**ことができればよい．そのため，偏微分の関係式を作っておくことにする．上記の記号の下で

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho}{\partial r} &= \frac{r}{\rho}, \quad \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\rho} = \frac{-r}{\rho^3}, \quad \frac{\partial\rho}{\partial\vartheta} = \frac{-a^2SC}{\rho}, \quad \frac{\partial}{\partial\vartheta}\frac{1}{\rho} = \frac{a^2SC}{\rho^3},\\ \frac{\partial\Delta}{\partial r} &= 2(r-\mathrm{M}), \quad \frac{\partial}{\partial r}\sqrt{\varepsilon\Delta} = \varepsilon\frac{r-\mathrm{M}}{\sqrt{\varepsilon\Delta}}, \quad \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\Delta}} = -\frac{r-\mathrm{M}}{\Delta\sqrt{\varepsilon\Delta}},\end{aligned}$$

となる．よって，外微分の関係式

$$d\omega^1 = \frac{a^2SC}{\rho^3}\omega^1\wedge\omega^2, \qquad d\omega^2 = \frac{r\sqrt{\varepsilon\Delta}}{\rho^3}\omega^1\wedge\omega^2,$$
$$d\omega^3 = \frac{C}{S}\frac{r^2+a^2}{\rho^3}\omega^2\wedge\omega^3 - \frac{r\sqrt{\varepsilon\Delta}}{\rho^3}\omega^3\wedge\omega^1 + \frac{2arS}{\rho^3}\omega^1\wedge\omega^0,$$
$$d\omega^0 = F\omega^1\wedge\omega^0 - \frac{2aC\sqrt{\varepsilon\Delta}}{\rho^3}\omega^2\wedge\omega^3 - \frac{a^2SC}{\rho^3}\omega^2\wedge\omega^0,$$

を得る．ここに，

$$F = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\sqrt{\varepsilon\Delta}}{\rho} = \varepsilon\frac{(r-\mathrm{M})\rho^2 - r\Delta}{\rho^3\sqrt{\varepsilon\Delta}},$$

である．

接続形式は擬歪対称であるから，$i<j$ で ω^i_j を求めればよい．なお，〈添字の交換〉では

$$\omega^i{}_j = \varepsilon_i\,\omega_{ij} = -\varepsilon_i\,\omega_{ji} = -\varepsilon_i\varepsilon_j\,\omega^j{}_i = \pm\omega^j{}_i$$

となるので符号に注意しなければならない．前記のように，$\varepsilon_i =< E_i, E_i >$ と $\varepsilon = \mathrm{sgn}\Delta$ は

$$\varepsilon_0 = -\varepsilon, \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon, \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = +1,$$

という関係にあるので，プラス・マイナスが逆になることがある．(この規則は，後出の曲率形式にもあてはまる.)

命題 2.6.4　ボイヤー－リンキスト標構場による接続形式は

$$
\begin{aligned}
-\varepsilon\omega^2{}_1 &= \omega^1{}_2 = -a^2SC\rho^{-3}\omega^1 - \varepsilon r\sqrt{\varepsilon\Delta}\rho^{-3}\omega^2,\\
\varepsilon\omega^3{}_0 &= \omega^0{}_3 = -\varepsilon arS\rho^{-3}\omega^1 + aC\sqrt{\varepsilon\Delta}\rho^{-3}\omega^2,\\
\omega^1{}_0 &= \omega^0{}_1 = -\varepsilon arS\rho^{-3}\omega^3 + F\omega^0,\\
\varepsilon\omega^2{}_0 &= \omega^0{}_2 = -aC\sqrt{\varepsilon\Delta}\rho^{-3}\omega^3 - a^2SC\rho^{-3}\omega^0,\\
-\varepsilon\omega^1{}_3 &= \omega^3{}_1 = r\sqrt{\varepsilon\Delta}\rho^{-3}\omega^3 + arS\rho^{-3}\omega^0,\\
-\omega^3{}_2 &= \omega^2{}_3 = -(C/S)(r^2+a^2)\rho^{-3}\omega^3 - \varepsilon aC\sqrt{\varepsilon\Delta}\rho^{-3}\omega^0,
\end{aligned}
$$

となる．(関数 F は，外微分の所で定義したものである.)

証明　系 1.8.5 から，上記の式が第 1 構造方程式を満たすことを確認すればよい (そして，計算から，命題の式が正しいことが分かる). 実際の計算には，系 1.8.5 の証明に出てきた式を使う必要がある．例えば，$\omega^3{}_1$ を計算してみる．

いま $i = k$ と置くと，$\omega^i{}_j(E_i) = d\omega^i(E_j, E_i)$ である．これは，2 つの回転の成分を表している．まず，$\omega^3{}_1(E_3) = d\omega^3(E_1, E_3)$ ．前出の $d\omega^3$ の式から，これは $r\sqrt{\varepsilon\Delta}\,\rho^{-3}$ である．次は，$\omega^3{}_1(E_1) = \pm\,\omega^1{}_3(E_1) = \pm\,d\omega^1(E_3, E_1)$ であるが，やはり前出の $d\omega^1$ から，これはゼロになる．

$\omega^3{}_1(E_k)$ で $k = 0, 2$ の場合には，一般式を使う．$\varepsilon_3 = +1, \varepsilon_1 = \varepsilon$，であるから，

$$\omega^3{}_1(E_k) = \tfrac{1}{2}\left[d\omega^3(E_1, E_k) + \varepsilon\, d\omega^1(E_k, E_3) - \varepsilon_k d\omega^k(E_k, E_3)\right]$$

である．ここで $k = 0$ とすると，$d\omega^3(E_1, E_0) = 2arS\rho^{-3}$ であり，他の 2 項はゼロとなる．よって $\omega^3{}_1(E_k) = arS\rho^{-3}$ である．$k = 2$ のときは，3 項ともゼロとなり，$\omega^3{}_1(E_k) = 0$ になる．以上より

$$\omega^3{}_1 = \Sigma\omega^3{}_1(E_m)\omega^m = r\sqrt{\varepsilon\Delta}\rho^{-3}\omega^3 + arS\rho^{-3}\omega^0$$

である．他の式も同様にして出る．□

注意 2.6.5(シュワルツシルド時空の場合)　シュワルツシルド時空の線素は

$$ds^2 = -h\,dt^2 + (1/h)\,dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2), \quad h = 1 - (2\mathrm{M}/r)$$

であるから，座標 t, r, ϑ, φ は直交している．したがって，ds^2 より直ちに，**シュワルツシルド余標構場** (Schwarzschild coframe field)

$$\omega^0 = \sqrt{h}\,dt, \quad \omega^1 = (1/\sqrt{h})\,dr, \quad \omega^2 = r\,d\vartheta, \quad \omega^3 = rS\,d\varphi,$$

を得る．なおここでは，簡単のため，$h > 0$ である外側 $r > 2\mathrm{M}$ の部分のみを考えることにする．これらを外微分して，

$$d\omega^0 = \mathrm{M}/(r^2\sqrt{h})dr \wedge dt, \quad d\omega^1 = 0, \quad d\omega^2 = dr \wedge d\vartheta,$$
$$d\omega^3 = S\,dr \wedge d\varphi + rC\,d\vartheta \wedge d\varphi,$$

を得る．余標構場で表すと，

$$d\omega^0 = -\mathrm{M}/(r^2\sqrt{h})\omega^0 \wedge \omega^1, \quad d\omega^1 = 0, \quad d\omega^2 = -(\sqrt{h}/r)\omega^2 \wedge \omega^1,$$
$$d\omega^3 = -(\sqrt{h}/(r))\omega^3 \wedge \omega^1 - C/(rS)\omega^3 \wedge \omega^2,$$

となる．これから，前述の証明と同様にして，接続形式

$$\omega^0{}_1 = (\mathrm{M}/r^2\sqrt{h})\omega^0,\ \omega^2{}_1 = (\sqrt{h}/r)\omega^2,$$
$$\omega^3{}_1 = (\sqrt{h}/r)\omega^3,\ \omega^3{}_2 = (C/(Sr)\omega^3,$$

を得る．これら (それに，添字を逆にしたもの) 以外の式はゼロとなる (補題 1.8.4 参照). 一方，命題 2.6.4 の式の右辺の 12 個の項において $a = 0, \varepsilon = 1$ と置けば，8 個の項がゼロになる．また，$\rho^2 \to r^2$, $\Delta \to r(r-2\mathrm{M}) = r^2h$ であるから，複雑な形をした関数 F は $\mathrm{M}/(r^2\sqrt{h})$ に帰着する．結局，上記のシュワルツシルド余標構場から求めた接続形式に一致することが分かる．‖

命題 2.6.4 でまとめた式を確認しておく．6 個の式があり，次元は 4 であるから，回転の成分 $\omega^i{}_j(E_k)$ は 24 個であるが，対称性と定数倍を考慮すれば，本質的に異なるものは 6 個なのである．このように接続形式がシンプルにまとまることは，(同じことではあるが) ボイヤー－リンキスト・ブロックにおける共変微分からも調べることができる．

補題 2.6.6　ボイヤー－リンキスト標構場に関して，共変微分 $\nabla_{E_i}E_j$ は次のようになる．

1. $i, j \in \{1, 2\}$ または $i, j \in \{3, 0\}$ ならば，$\nabla_{E_i}E_j$ は $\mathrm{Span}\{E_1, E_2\}$ に含まれる．
2. $i \in \{1, 2\}$ かつ $j \in \{3, 0\}$, あるいはこの逆ならば，$\nabla_{E_i}E_j$ は $\mathrm{Span}\{E_3, E_0\}$ に含まれる．

証明　ボイヤー－リンキスト・ブロックは，極曲面 P と キリング・ファイバー F の両座標の積であった．極曲面は全測地的であるから，ベクトル場 X と Y が P に接

しているとき，$\nabla_X Y$ も P に接している．Z が曲面 P に垂直ならば，$\nabla_X Z$ も垂直となる．P と F は直交しているから，P に垂直であることは，F に接していることを意味する．

E_1 と E_2 が極曲面に接していて，E_3 と E_0 がファイバーに接しているので，上記のことから，(1), (2) の条件の前半を仮定するときに，命題は成立する．

キリング・ファイバー F の座標系 (φ, t) では，計量の係数は定数であるから，(F に接している) ベクトル場 E_3 , E_0 は，F に関して平行である．よって，$i, j \in \{3, 0\}$ のとき，共変微分 $\nabla_{E_i} E_j$ は F 方向の成分を持たない．つまり，$\mathrm{Span}\{E_1, E_2\}$ に含まれている．□

これまでのカルタン流の計算から導かれる副産物として，次の結果を得ることができる．命題 2.6.4 で得た回転の成分の式を共変微分の式 $\nabla_{E_i} E_j = \Sigma \omega^m{}_j(E_i) E_m$ に代入して，次の式を得るのである．

系 2.6.7　ボイヤー－リンキスト・ベクトル場 E_1, E_2, E_3, E_0 の共変微分は

$$\nabla_{E_1} E_1 = \varepsilon a^2 SC\rho^{-3} E_2, \qquad \nabla_{E_1} E_2 = -a^2 SC\rho^{-3} E_1,$$
$$\nabla_{E_2} E_1 = r\sqrt{\varepsilon\Delta}\,\rho^{-3} E_2, \qquad \nabla_{E_2} E_2 = -\varepsilon r\sqrt{\varepsilon\Delta}\,\rho^{-3} E_1,$$
$$\nabla_{E_0} E_0 = FE_1 - \varepsilon a^2 SC\rho^{-3} E_2,$$
$$\nabla_{E_0} E_3 = \nabla_{E_3} E_0 = -\varepsilon arS\rho^{-3} E_1 - \varepsilon aC\sqrt{\varepsilon\Delta}\,\rho^{-3} E_2,$$
$$\nabla_{E_3} E_3 = -\varepsilon r\sqrt{\varepsilon\Delta}\,\rho^{-3} E_1 - (C/S)(r^2 + a^2)\rho^{-3} E_2,$$
$$\nabla_{E_0} E_1 = FE_0 + arS\,\rho^{-3} E_3,$$
$$\nabla_{E_0} E_2 = -a^2 SC\,\rho^{-3} E_0 + \varepsilon\, aC\sqrt{\varepsilon\Delta}\,\rho^{-3} E_3,$$
$$\nabla_{E_3} E_1 = -\varepsilon arS\,\rho^{-3} E_0 + r\sqrt{\varepsilon\Delta}\,\rho^{-3} E_3,$$
$$\nabla_{E_3} E_2 = -aC\sqrt{\varepsilon\Delta}\,\rho^{-3} E_0 + (C/S)(r^2 + a^2)\rho^{-3} E_3,$$
$$\nabla_{E_1} E_0 = -arS\,\rho^{-3} E_3, \qquad \nabla_{E_1} E_3 = -\varepsilon arS\,\rho^{-3} E_0,$$
$$\nabla_{E_2} E_0 = \varepsilon aC\sqrt{\varepsilon\Delta}\,\rho^{-3} E_3, \qquad \nabla_{E_2} E_3 = aC\sqrt{\varepsilon\Delta}\,\rho^{-3} E_0$$

で与えられる．

これらの式から，主要零的曲線が測地線であることを，直接に確認することができる (なお，第 4 章では，もっと簡単な方法で示す)．実際，主要零的曲線は，ベクトル場 $N_\pm = \pm\partial_r + \Delta^{-1} V$ の積分曲線であるが，このベクトル場をボイヤー－リンキス

ト標構場で表すと $(r/\sqrt{\varepsilon\Delta})[E_0 \pm E_1]$ となる．上式から，

$$\begin{aligned}\nabla_{E_0 \pm E_1}(E_0 \pm E_1) &= \nabla_{E_0} E_0 + \nabla_{E_1} E_1 \pm [\nabla_{E_0} E_1 + \nabla_{E_1} E_0] \\ &= FE_1 \pm FE_0 = \pm F(E_0 \pm E_1)\end{aligned}$$

である．なお，これまでと同様に，$F = \partial_r(\sqrt{\varepsilon\Delta}/r)$ である．よって，

$$\begin{aligned}\nabla_{N\pm}(N_\pm) =&(\rho^2/\Delta)\nabla_{E_0 \pm E_1}(E_0 \pm E_1) \\ &+ (\rho/\sqrt{\varepsilon\Delta})(E_0 \pm E_1)\left[r/\sqrt{\varepsilon\Delta}\right](E_0 \pm E_1)\end{aligned}$$

となる．右辺の最初の項は $\pm(\rho^2/\varepsilon\Delta)F(E_0 \pm E_1)$ となる．次の項は，$E_0\left[\rho/\sqrt{\varepsilon\Delta}\right] = 0$ であり，

$$\begin{aligned}E_1\left[\rho/\sqrt{\varepsilon\Delta}\right] &= (\sqrt{\varepsilon\Delta}/\rho)\partial_r(\rho/\sqrt{\varepsilon\Delta}) \\ &= -(\rho/\sqrt{\varepsilon\Delta})\partial_r(\sqrt{\varepsilon\Delta}/\rho) \\ &= -(\rho/\sqrt{\varepsilon\Delta})F\end{aligned}$$

である．よって，第 2 項は $\mp(\rho^2/\varepsilon\Delta)F(E_0 \pm E_1)$ となり，第 1 項と合わせて右辺はゼロになるのである．

括弧積については，$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ の関係から，共変微分の式を用いて次の結果を得る．

系 2.6.8 ボイヤー－リンキスト・ベクトル場の括弧積は

$$\begin{aligned}&[E_0, E_1] = FE_0 + 2arS\rho^{-3}E_3, && [E_1, E_2] = -\, a^2SC\rho^{-3}E_1 - r\sqrt{\varepsilon\Delta}\,\rho^{-3}E_2, \\ &[E_0, E_2] = -a^2SC\rho^{-3}E_0, && [E_1, E_3] = -\, r\sqrt{\varepsilon\Delta}\,\rho^3 E_3, \\ &[E_0, E_3] = 0, && [E_2, E_3] = 2aC\sqrt{\varepsilon\Delta}\,\rho^{-3}E_0 \\ &&& \qquad - (C/S)(r^2 + a^2)\rho^{-3}E_3\end{aligned}$$

で与えられる．

2.7 カルタン流によるカー曲率の計算

ここでは，前節の結果を使い，ボイヤー－リンキスト標構場を用いて，カー時空のリーマン曲率を計算する．カルタン流の方法では，曲率形式

$$\Omega^i{}_j = d\omega^i{}_j + \Sigma\omega^i{}_m \wedge \omega^m{}_j$$

を計算すればよい.

(下記の注意 2.7.3 で示すように) シュワルツシルド時空の場合には，この計算は容易であるが，カー時空の場合には複雑になる．しかしそれでも，古典的にクリストッフェルの記号を使って座標で計算するのに比べれば，はるかに簡単である．この計算を全て記すのはページの無駄であるので，ここでは，計算の流れを述べ，一番複雑な $\Omega^0{}_1$ の計算を詳述することにする.

先ず，$\Sigma\omega^i{}_m\wedge\omega^m{}_j$ は 2 項の和となっている．また，命題 2.6.4 より，各接続形式は，適当な係数 A, B により，$\omega^i{}_j = A\omega^r + B\omega^s$ と表示できる．そこで，接続形式の 2 形式を

$$\Omega^0{}_1 = \begin{cases} d\omega^0{}_1 \\ + \\ \sum \omega^0{}_m \wedge \omega^m{}_1 \end{cases} = \begin{cases} dA\wedge\omega^0 + dB\wedge\omega^3 & \text{(タイプ 1)} \\ +A\,d\omega^0 + B\,d\omega^3 & \text{(タイプ 2)} \\ +\omega^0{}_2\wedge\omega^2{}_1 + \omega^0{}_3\wedge\omega^3{}_1 & \text{(タイプ 3)} \end{cases}$$

として，3 つの**タイプ**に分けて計算する．各々を，外積の形 $\omega^i\wedge\omega^j$ にするのである．タイプ 3 の所は，命題 2.6.4 の式の外積を作ればよい．タイプ 2 は，命題 2.6.4 の直前にある $d\omega^i$ の式を使う．タイプ 1 については，回転の成分 (どれも $N\rho^{-3}$ という形をしている) の微分を用意しておかなければならない.

補題 2.7.1　関数 $A = N\rho^{-3}$ を微分して $dA = C_1(A)\omega^1 + C_2(A)\omega^2$ とすると

$$C_1(A) = \frac{\sqrt{\varepsilon\Delta}}{\rho^6}\left[\rho^2\frac{\partial N}{\partial r} - 3rN\right], \quad C_2(A) = \frac{1}{\rho^6}\left[\rho^2\frac{\partial N}{\partial\vartheta} + 3a^2SC\,N\right]$$

となる.

さて，$\Omega^0{}_1$ を求めるため，上の補題を $\omega^0{}_1 = F\omega^0 - \varepsilon\, arS\,\rho^{-3}\omega^3$ に適用する．2.6 節で計算した偏微分の式を使って

$$C_1(F) = \varepsilon\rho^{-6}[\rho^2(\rho^2 - \Delta - 2r^2 + 2\mathrm{M}r) - \Delta^{-1}\rho^4(r-\mathrm{M})^2 + 3r^2\Delta],$$
$$C_2(F) = \varepsilon\frac{a^2SC}{\rho^6\sqrt{\varepsilon\Delta}}[\rho^2(r-\mathrm{M}) - 3r\Delta]$$

となる．この係数 F の計算が，$\Omega^0{}_1$ の計算の中で一番ややこしい所である．$B = -\varepsilon\, arS\,\rho^{-3}$ の計算は，これに比べると簡単で

$$C_1(B) = -\varepsilon\, aS\sqrt{\varepsilon\Delta}\,\rho^{-6}(-2r^2 + a^2C^2), \quad C_2(B) = -\varepsilon\, arC\,\rho^{-6}(\rho^2 + 3a^2S^2)$$

となる．以上をまとめて $\Omega^0{}_1$ を求める．先ず，タイプ 1 の所は

$$C_1(F)\omega^1 \wedge \omega^0 + C_2(F)\omega^2 \wedge \omega^0 + C_1(B)\omega^1 \wedge \omega^3 + C_2(B)\omega^2 \wedge \omega^3$$

となる．残りの所も同様に書き下せばよいのだが，ここでは，$\omega^0 \wedge \omega^1$ の項に注目する．これも，煩雑な項なのである．各タイプの計算から

$$\begin{aligned}
&\text{タイプ 1} \quad C_1(F)\omega^1 \wedge \omega^0 \\
&\text{タイプ 2} \quad + F(F\omega^1 \wedge \omega^0) - \varepsilon\, arS\,\rho^{-3}(2arS\,\rho^{-3})\omega^1 \wedge \omega^0 \\
&\text{タイプ 3} \quad + (-a^2SC\rho^{-3}\omega^0) \wedge (\varepsilon\, a^2SC\,\rho^{-3}\omega^1) \\
&\qquad\qquad + (-\varepsilon\, arS\,\rho^{-3}\omega^1) \wedge (arS\,\rho^{-3}\omega^0)
\end{aligned}$$

を得る．しかるに，$F = \varepsilon\rho^{-6}\Delta^{-1/2}[\rho^2(r-\mathrm{M}) - r\Delta]^2$ であるから，$\varepsilon\rho^{-6}\omega^0 \wedge \omega^1$ でまとめると，

$$\begin{aligned}
&-\rho^2[\rho^2 - \Delta - 2r^2 + 2\mathrm{M}r] + \underline{\Delta^{-1}\rho^4(r-\mathrm{M})^2} - 3r^2\Delta \\
&\quad - \Delta^{-1}[\underline{\rho^4(r-\mathrm{M})^2} - 2r\Delta(r-\mathrm{M})\rho^2 + r^2\Delta^2] + 3a^2r^2S^2 - a^4S^2C^2
\end{aligned}$$

が残る．うまい具合に下線部分が消えて，

$$-\rho^2(\rho^2 - \Delta - 4r^2 + 4\mathrm{M}r) - 4r^2\Delta + 3a^2r^2S^2 - a^4S^2C^2$$

と整理できる．定義から，ρ^2 を $r^2 + a^2C^2$ へ，Δ を $r^2 - 2\mathrm{M}r + a^2$ へ置き換えると，

$$-(r^2 + a^2C^2)(6\mathrm{M}r - 4r^2 - a^2S^2) - 4r^2(r^2 + a^2 - 2\mathrm{M}r) + 3a^2r^2S^2 - a^4S^2C^2$$

であるが，正弦・余弦をまとめて $2\mathrm{M}r(r^2 - 3a^2C^2)$ となる．よって，$\Omega^0{}_1$ の $\omega^0 \wedge \omega^1$ の項は $\varepsilon\, 2\mathrm{M}r\rho^{-6}(r^2 - 3a^2C^2)$ になる．

これ以外の項 $\omega^i \wedge \omega^j$ は，$\omega^2 \wedge \omega^3$ 以外はゼロである．$\omega^2 \wedge \omega^3$ については，上記と同様にして

$$\begin{aligned}
&\text{タイプ 1} \quad -\varepsilon\, 2aC\rho^{-6}[\rho^2(r-\mathrm{M}) - r\Delta] - \varepsilon\, arC\,\rho^{-6}(r^2 + a^2) \\
&\text{タイプ 2} \quad -\varepsilon\, arC\rho^{-6}(\rho^2 + 3a^2S^2) \\
&\text{タイプ 3} \quad +\varepsilon\, 2arC\Delta\rho^{-6}
\end{aligned}$$

を得る．$\varepsilon aC\rho^{-6}$ でまとめて，

$$-2\rho^2(r-\mathrm{M}) + 2r\Delta - r(r^2 + a^2) - r(\rho^2 + 3a^2S^2) + 2r\Delta$$

が残る．ρ^2 を $r^2+a^2C^2$ へ，Δ を $r^2-2\mathrm{M}r+a^2$ へ置き換え，整理すると $-2\mathrm{M}(3r^2-a^2C^2)$ となる．以上より

$$\Omega^0{}_1=\varepsilon\frac{2\mathrm{M}r}{\rho^6}(r^2-3a^2C^2)\,\omega^0\wedge\omega^1-\varepsilon\frac{2\mathrm{M}aC}{\rho^6}(3r^2-a^2C^2)\,\omega^2\wedge\omega^3$$

を得る．このきれいな式の形から，**他の式**の形も類推することができ，確かにそのようになっている．実際の計算には，コンピュータを使って労力を省いた．

定理 2.7.2　カー時空のボイヤー－リンキスト標構場に関して，$\varepsilon=\mathrm{sgn}\Delta$ とし，

$$\mathbf{I}=\frac{\mathrm{M}r}{\rho^6}(r^2-3a^2C^2),\qquad \mathbf{J}=\frac{\mathrm{M}aC}{\rho^6}(3r^2-a^2C^2)$$

とおくと，曲率形式は

$$\begin{aligned}
\Omega^0{}_1&=\varepsilon\,2\mathbf{I}\,\omega^0\wedge\omega^1-\varepsilon\,2\mathbf{J}\,\omega^2\wedge\omega^3, &\qquad \Omega^2{}_3&=2\mathbf{J}\,\omega^0\wedge\omega^1+2\mathbf{I}\,\omega^2\wedge\omega^3,\\
\Omega^0{}_2&=-\mathbf{J}\,\omega^0\wedge\omega^2+\varepsilon\,\mathbf{J}\,\omega^3\wedge\omega^1, &\qquad \Omega^3{}_1&=-\mathbf{J}\,\omega^0\wedge\omega^2-\varepsilon\,\mathbf{I}\,\omega^3\wedge\omega^1,\\
\Omega^0{}_3&=-\mathbf{I}\,\omega^0\wedge\omega^3-\varepsilon\,\mathbf{J}\,\omega^1\wedge\omega^2, &\qquad \Omega^1{}_2&=-\varepsilon\mathbf{J}\,\omega^0\wedge\omega^3-\mathbf{I}\,\omega^1\wedge\omega^2,
\end{aligned}$$

となる．

(添字の上下による符号の変化は，命題 2.6.4 と同じである．添字の並べ方は，第5章で使用するときの都合に合わせてある.)

注意 2.7.3(シュワルツシルド時空の場合)　シュワルツシルド時空の接続形式は，注意 2.6.5 で述べたように，簡単な形をしているから，第2構造方程式から容易に，シュワルツシルド時空の曲率形式は

$$\begin{aligned}
\Omega^0{}_1&=2\mathrm{M}r^{-3}\omega^0\wedge\omega^1, &\qquad \Omega^2{}_3&=2\mathrm{M}r^{-3}\omega^2\wedge\omega^3,\\
\Omega^0{}_2&=-\mathrm{M}r^{-3}\omega^0\wedge\omega^2, &\qquad \Omega^3{}_1&=-\mathrm{M}r^{-3}\omega^3\wedge\omega^1,\\
\Omega^0{}_3&=-\mathrm{M}r^{-3}\omega^0\wedge\omega^3, &\qquad \Omega^1{}_2&=-\mathrm{M}r^{-3}\omega^1\wedge\omega^2,
\end{aligned}$$

となることが分かる．カー時空の式で $a=0,\ \varepsilon=+1$ と置けば，$\mathbf{I}=\mathrm{M}r^{-3},\ \mathbf{J}=0$ となり，上式に帰着する．さらに，シュワルツシルド座標で作られる平面 (すなわち，$\partial_t,\ \partial_r,\ \partial_\vartheta,\ \partial_\varphi$ のうちの2つで作られる接平面) で定義される断面曲率が $\pm\mathrm{M}r^{-3}$ あるいは $\pm2\mathrm{M}r^{-3}$ になることも，簡単な計算で分かる．‖

この2つの曲率形式の差違は回転の効果にあり，それが，非対角成分の部分なのである．第5章において，上の定理で与えたカー曲率の式が一番簡単な形であることを

確認する．座標を使わずカルタン流の計算を行うのは，計算の簡易化のためだけではない．回転するブラックホールでは，ボイヤー－リンキスト余標構場の元になる，各々直交しているベクトル場 $\partial_r, \partial_\vartheta, V, W$ が，幾何学的にも意味のあるものなのである．座標ベクトル場の $\partial_r, \partial_\vartheta, \partial_\varphi, \partial_t$ がそうでないことは，$R_{ijk\ell}$ を機械的に計算してみれば分かる．(標構場のベクトル場やそのスカラー倍を座標ベクトル場にすることはできない．なぜならば，2.5 節で見たように，例えば $\Pi^\perp = \mathrm{Span}\{\partial_\vartheta, W\}$ は積分可能ではないのである.)

定理 2.7.2 の式の成分は，曲率テンソルの成分 $R^i{}_{jk\ell} = \omega^i{}_j(E_k, E_\ell)$ である．つまり，$R^0{}_{123} = -\varepsilon 2\mathbf{J}$ のような関係がある．これから，$\{i, j, k, \ell\}$ の中で 3 個のみが異なるときには $R^i_{jk\ell} = 0$ であることが分かる．標構場においては，添字 i の上げ下げには $\varepsilon_i = < E_i, E_i >$ を掛ける必要があった．$\varepsilon = +1$ のときは E_0 が時間的，$\varepsilon = -1$ のときには E_1 が時間的であるから

$$\varepsilon_0 = -\varepsilon, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = +1$$

である．

曲率は重要な幾何学上の不変量であり，カー時空の曲率も，幾何学的にも物理学的にも深い意味を持っている．

系 2.7.4 カー時空はリッチ平坦である．

証明 リッチ・テンソルは $\mathrm{Ric}(E_i, E_j) = \Sigma R^m{}_{imj}$ で与えられる．$i \neq j$ とすると，3 個の添字が異なるときには曲率の成分はゼロであるから，$\mathrm{Ric}(E_i, E_j) = 0$ となる．

$i = j$ のとき，先ず，定理 2.7.2 の式が使いやすいように，添字を並べ替えることにする．例えば $i = j = 1$ のときは

$$\mathrm{Ric}(E_1, E_1) = R^0{}_{101} + R^2{}_{121} + R^3{}_{131}$$

とする．しかるに，

$$R^2{}_{121} = R_{2121} = R_{1212} = \varepsilon R^1{}_{212}$$

となる．$R^3{}_{131}$ も同様．よって，

$$\mathrm{Ric}(E_1, E_1) = R^0{}_{101} + \varepsilon R^1{}_{212} + \varepsilon R^1{}_{313} = \varepsilon 2\mathbf{I} + \varepsilon(-\mathbf{I}) + \varepsilon(-\mathbf{I}) = 0$$

となる．□

この事実は，第 1 章で述べたように，カー時空が**真空**であることを示している．つまり，K 内にある質量は，重力源としては無視してよいのである．

系 2.7.5　カー時空においては，クレッチマンの曲率不変量 $k =< R, R >$ は $48(\mathbf{I}^2 - \mathbf{J}^2)$ となる．

証明　1.8 節でみたように，正規直交基底では $k = \Sigma\varepsilon_i\varepsilon_j\varepsilon_k\varepsilon_\ell(R_{ijk\ell})^2$ となる．曲率の成分は全て 2 乗の形になっているから，定理 2.7.2 を直接使うため，$R_{ijk\ell}$ を $\pm R^i{}_{jk\ell}$ に置き換えてもよい．曲率テンソルの対称性から，$i < j$, $k < \ell$, である場合を調べればよい．さらに，これらは次のように分けられる．

- 6 個の対角成分の項：　0101, 0202, 0303, 1212, 2323, このときは $\varepsilon_i\varepsilon_j\varepsilon_k\varepsilon_\ell = +1$ である．
- 6 個の非対角成分の項：　0123, 0213, 0312, 1203, 1302, 2301, このときは $\varepsilon_i\varepsilon_j\varepsilon_k\varepsilon_\ell = -1$ である．

よって定理 2.7.2 から，

$$k = 4\big[\{4\mathbf{I}^2 + 4(\mathbf{I}^2) + 4\mathbf{I}^2\} - \{4\mathbf{J}^2 + 4(\mathbf{J}^2) + 4\mathbf{J}^2\}\big] = 48(\mathbf{I}^2 - \mathbf{J}^2)$$

となる．□

カー計量の検討を始めたときには，問題となる部分集合が 3 個あった．軸 A, 地平面 H , リング状特異領域 Σ である．以上のことから，A と H までカー計量を拡張した．では，Σ までも拡張できるのであろうか．曲率の式には ρ^{-6} が含まれているので，(式の定義域に入らないということから) ＜答えは**不可**である＞，ということになる．もちろん，これは証明になっていない．ある標構場の式で ρ^{-6} が出たといっても，他の標構場を使えば，曲率形式がもっと簡単な式になるかもしれないのである．確乎とした答えを得るためには，特定の標構場や座標によらない，幾何学的に不変な証明をしなければならない．

先験的に言えば，リング状特異領域 ρ^{-6} が実際に〈無限大〉の位置にあるならば，つまり，(ユークリッド平面でいえば $r = \infty$ のように) 測地線が Σ に到達するためにはパラメータが無限大になる必要があるならば，Σ まで拡張する必要はないのである．これを念頭において次のように定義する．

定義 2.7.6　カー時空において，測地線 γ が，(アファイン・パラメータに関して)$s \to b$ のとき $\rho^2(\gamma(s)) \to 0$ となるようなパラメータの有限の値 b が存在する，という条件

を満たすとき，γ はリング状特異領域 Σ に**到達する** (hit) (あるいは**遭遇する** (meet)), と定義する．これは，$s \to b$ のとき r と $\cos\vartheta$ がゼロに近づくことと同値である．

例えば，前に述べたように，内向きの主要零的測地線は，r 座標として $r(s) = r_0 - s$ を持っている．よって赤道面 $\vartheta = \pi/2$ においては，この測地線はリング状特異領域に到達する．よって，ブロック Ⅲ においては，リング状特異領域は〈無限大の所〉にあるわけではないのである．

さらに，カー計量は (どのような納得ゆく方法を使っても) Σ まで拡張することはできない．もし**拡張できる**とするならば，次のような時空 $\widetilde{M}$ が存在することになる．すなわち，$\widetilde{M}$ は，ブロック Ⅲ のコピーを含み，測地線 $\gamma: [s_0, s_1) \to \text{Ⅲ} \subset \widetilde{M}$ で Σ に到達するものは，より広い区間 $[s_0, s_1 + \delta)$ で定義される測地線へと拡張される．(さらに，点 $\tilde{\gamma}(s_1)$ の全体が $\widetilde{M}$ で曲面となり，それが微分同相 $\Sigma \approx S^1 \times R^1$ となるはずである.) しかしながら，このようなことは成立しない．

系 2.7.7　Σ に到達する赤道測地線 $\gamma: [s_0, s_1) \to \text{Ⅲ}$ に関し，Ⅲ の拡張 $\widetilde{M}$ において，s_1 より先へ測地線として拡張できるものは存在しない．

証明　$\widetilde{M}$ を Ⅲ の拡張，$\gamma: [s_0, s_1) \to \text{Ⅲ}$ を，Σ に到達する赤道測地線とする．つまり，$s \to s_1$ のとき $r \to 0$ である．γ は赤道面にあるので，$C = 0$, $\rho^2 = r^2$ である．よって，系 2.7.5 より，$k = 48\mathrm{M}^2/r^6$ となる．したがって，$s \to s_1$ のとき $k(\gamma(s)) \to \infty$ である．

γ が，$\widetilde{M}$ において，s_1 より先に拡張され，$\gamma_{\widetilde{M}}$ になるとする．幾何学量 k は等長写像で不変だから，$k_{\widetilde{M}}$ を等長コピー Ⅲ へ制限したものは k に一致する．それゆえ，$s \to s_1$ で $k_{\widetilde{M}}(\gamma(s)) \to \infty$ である．$\tilde{\gamma}$ は $\widetilde{M}$ で定義された測地線で，定義域は広くなっているから，$\tilde{\gamma}(s_1)$ は，$\widetilde{M}$ における普通の点である．よって，$k_{\widetilde{M}}(\gamma(s)) = k_{\widetilde{M}}(\tilde{\gamma}(s))$ は有限の値 $k_{\widetilde{M}}(\tilde{\gamma}(s_1)) < \infty$ へ近づく．これは矛盾である．□

このように，リング状特異領域 Σ は，文字通り，時空の特異領域と呼ぶべき場所なのである．上のことから，**曲率特異領域** (curvature singularity) というわけである (Ellis and Schmidt 1977, Tipler, Clark and Ellis 1980). 第 4 章においてカー測地線の知識を増やした後では，上記の〈赤道〉という語を〈非空間的〉に置き換えることになる．(なお，シュワルツシルド時空の場合には，$\mathbf{I} = \mathrm{M}/r^3$, $\mathbf{J} = 0$ なので，曲率不変量 k は $48\mathrm{M}^2/r^6$ となる．よって $r = 0$ が曲率特異領域となる.)

カー測地線で Σ に到達するものが存在するから，系 2.7.7 より，次のことが分かる．

系 2.7.8　ブロック III を含むカー時空 (最大に拡張されたものは全て III を含んでいる) は測地的に完備ではない．

次の章で最大カー時空を定義するが，この時空においては，Σ に到達する測地線のみが完備ではないのである．

リング状特異領域の近くで曲率がいくらでも大きくなる，ということを物理学の言葉で言えば，そこに近づく質量をもった物質は破壊する，ということになる．だが，シュワルツシルド時空に比べれば，カー時空はおとなしいものである．シュワルツシルド時空の場合，外から地平面を通過するものは**全て**，中心特異領域 $r = 0$ において (そこまではどうにか壊れなかったとしても) 崩壊してしまうのである．ところがカー時空においては，リング状特異領域は，$r = 0$ における赤道面上の 2 次元球になっている．これまで検討した範囲に限っても，ほとんど全ての内向き主要零的測地線 (つまり，内側に進む光子) は Σ を通らない．穏やかなブロック III から $r = 0$ を通り，$r = -\infty$ へと進むのである．

注意 2.7.9

1. ボイヤー－リンキスト標構場に関して，平面 $P_{ij} = \mathrm{Span}\{E_i, E_j\}$ の断面曲率を k_{ij} とおく．式 $K_{ij} = \varepsilon_i\varepsilon_j R_{ijij} = \varepsilon_j R^i{}_{jij}$(1.8 節参照) に定理 2.7.2 の結果を使って

$$K_{01} = K_{23} = 2\mathbf{I}, \quad K_{02} = K_{03} = K_{12} = K_{13} = -\mathbf{I}$$

となる．

2. M の全測地的部分曲面 S において，S のガウス曲率 K_S は，S の接平面に関する M の断面曲率に等しい (O'Neill 1983). この事実を，カー時空の極曲面 P と軸 A に適用する．

a. P の接平面は $\mathrm{Span}\{\partial_r, \partial_\vartheta\} = \mathrm{Span}\{E_1, E_2\}$ である．よって，前記のことから

$$K_P = K_{12} = -\mathbf{I} = -\mathrm{M}r\rho^{-6}(r^2 - 3a^2C^2)$$

となる．

b. A の接平面は平面 $\mathrm{Span}\{V, \partial_r\} = \mathrm{Span}\{E_0, E_1\}$ の極限である．よって

$$K_A = \lim_{C^2\to 1} K_{01} = K_{01}|_{C^2=1} = 2\mathbf{I}|_{C^2=1} = 2\mathrm{M}r(r^2 - 3a^2)/(r^2 + a^2)^3$$

となる．

P, A ともに，曲率は，無限大ではゼロになることを注意しておく．‖

さて，カー時空は (少なくともブロック I では) 次の条件を満たしていることを見てきた．

(1) 軸対称である．
(2) ($r \geq 2$M において) 定常である．
(3) リッチ平坦である．
(4) 漸近的に平坦である．
(5) (高速カー時空を除いて) 事象の地平面があり，それがリング状特異領域を囲んでいる．
(6) 2 つのパラメータ M, a で決定される ($a = 0$ としたものがシュワルツシルド時空である).

これらの性質から，カー時空は，半径が $r > 2$M である回転する星の外側の領域を記述する時空モデルとなりうるのである．例えば，次の通りである．(1) は回転していることを示す．(2) は，星が，膨張も崩壊もしないことを示している．(3) は，星が孤立しており，星だけが重力源であることを表している．(4) は，十分離れた所では重力を無視できることを意味する．

このような星が，$r = 2$M ということで崩壊すると，地平面が現れ，(1), (3), (4) の性質は保存され，崩壊してブラックホールが形成されると，また (2) が成立することになる (Hawking and Ellis 1973, Misner, Thorne and Wheeler 1973).

ワーナー・イスラエル，ブランドン・カーター，スティーブン・ホーキング，デビッド・ロビンソンらの一連の研究により，〈ブラックホールには毛がない〉ということが分かった．いろいろな性質を持つ星が崩壊しても，最後の状態は，**質量と角運動量だけで決定してしまう**のである (Hawking and Ellis 1973). カー・ブラックホールはこれら 2 つのパラメータを持っているから，これこそが研究対象とすべきものといえる．

ブロック I における $r \gg$ M の部分では，カー時空のモデルが物理学的事実と一致しているから，地平面の近く，さらにはその中でも，このモデルが事実に近い，と考えられる．宇宙にブラックホールが存在することは一般に認められている．しかし，どこでそれを見つけるか，さらには，それとカー・モデルとの差異はどのくらいあるか，については解決されていない．宇宙の神秘を探索する研究は，端緒に付いたばかりなのである．

第3章
最大への拡張

前の章において，カー計量を導入し，その領域をカー・スター時空 K^* まで拡張した．この時空は，回転の軸と (存在するなら) 地平面を含んでいる．しかし，リング状特異領域は含まない．そこでは曲率が無限大になるのである．

K^* は，解析的に最大まで拡張された時空であろうか．高速の場合，つまり $a^2 > \mathrm{M}^2$ のときはイエスである．しかし，肯定の答えはこの場合だけである．(シュワルツシルド時空からの類推以外に) 疑問として生じることに，K^* を構成する際の不均衡がある．これまでは，**内向き**の主要零的測地線を中心にそえて構成した．そこで本章では，外向きの主要零的測地線を中心にそえて，構成を繰り返すことにする．K^* の場合と同じようにして (もちろん構成の仕方は異なっている)，ボイヤー－リンキスト・ブロックから**スター・カー時空** $^*K$ を作り上げる．このようにして 2 つの時空 $^*K$ と K^* を用意し，同じ番号のブロックどうしを結合して，さらに拡張した時空にするのである．この，主要零的測地線を縦糸・横糸に使った紡織により，極限カー時空 $a^2 = \mathrm{M}^2$ の場合では，最大まで拡張することになる．遅速カー時空の場合では，もっと華麗である．最大に拡張するには，地平面の自己交差が必要となる．

最大カー時空が構成されれば，次は，その大域的性質を調べることになる．

ボイヤー－リンキスト・ブロックの等長写像を組み合わせて，カー等長写像を構成する (時空の構成と似たようなものである)．そして，高速カー時空，極限カー時空，遅速カー時空の 3 つの場合それぞれにつき，等長写像の群を調べる．

最大カー・ブラックホールの位相は，単純なものではない (特に遅速カー時空の場合)．だが，M のブロック III にリング状特異領域を持ったまま，M の北軸 (あるいは南軸) A 上の 2 次元球バンドルとして滑らかな多様体 $\widetilde{M}$ を作ることができる．つまり，積多様体 $A \times S^2$ である．これから，M 自身の位相，特にホモトピー型を調べることができるのである．

相対性理論における**年代律** (chronology) とは，時間的曲線で結ぶことのできる事象を意味している．同様に，**因果律** (causality) とは，非空間的曲線で結ぶ事象のことである．第 2 章において，ボイヤー－リンキスト・ブロック III では，閉じた時間的曲線

が存在するから，年代律が成立しないことを示した．3.10 節において，カー・ブラックホールの大域的な年代律を調べる．この場合にも，他の場合と同じように，遅速カー時空の場合が最も興味深いものになっている．

3 種類の最大カー時空は，静的に安定したものではない．例えば，幾何学的に簡単にするため〈ほんの少し〉変形しただけで，年代律が壊れてしまうこともあるのである．

3.1　スター・カー時空

ボイヤー－リンキスト座標において，主要零的測地線は

$$r' = \pm 1, \qquad \vartheta' = 0, \qquad \varphi' = a/\Delta, \qquad t' = (r^2 + a^2)/\Delta,$$

で与えられた．そして，カー・スター時空は，この中の内向線，つまり $r' = -1$ を座標曲線として構成された．ここでは内向線を外向線に置き換えるため，$r' = +1$ を採用し，関数 $A(r) = \int a/\Delta\, dr$, $T(r) = \int (r^2 + a^2)/\Delta\, dr$を使う．そこで

$${}^*\varphi = \varphi - A(r), \qquad {}^*t = t - T(r)$$

とする．φ^*, t^* の場合の和を差にしたのである．補題 2.5.1 の証明において符号を変えれば，軸を除いたボイヤー－リンキスト・ブロックにおける座標系 ${}^*\xi = (r, \vartheta, {}^*\varphi, {}^*t)$ を得ることができる．この ${}^*\xi$ を**スター・カー座標系** (star-Kerr coordinate system) と呼ぶことにする．

この座標系に関して外向きの主要零的測地線を表すと，$r' = +1, \vartheta' = 0$, で,

$${}^*\varphi' = \varphi' - dA/dr\, r' = 0$$

および

$${}^*t' = t' - dA/dr\, r' = 0$$

を満たすことが分かる．これにより，$r(s) = r_0 + s$ をパラメータとして，外向線が新しい r 座標曲線となるのである．

補題 3.1.1　スター・カー座標で表示したカー計量は線素

$$ds^2 = g_{tt} d({}^*t)^2 + 2g_{t\varphi} d({}^*t) d({}^*\varphi) + g_{\varphi\varphi} d({}^*\varphi)^2 + \rho^2 d\vartheta^2 \\ - 2d({}^*t)\, dr + 2a \sin^2 \vartheta d({}^*\varphi)\, dr$$

を持つ.

ここに，g の成分は 2.1 節のものである．カー・スター線素 (2.5 節) と比較すれば，最後の 2 項の符号が逆になっていることが分かる．K^* の場合と同じように，座標を拡張 (第 1 章) して地平面を含むようにし，極へ拡張 (第 2 章) して軸を含むようにすることができる．つまり，計量を，$R^2 \times S^2$ からリング状特異領域 Σ を除いた部分まで拡張することができるのである．

定義 3.1.2 次の条件を満たす多様体を**スター・カー時空** (Star-Kerr spacetime) と呼ぶ.

1. 解析的多様体 $R^2({}^*t, r) \times S^2(\vartheta, {}^*\varphi) - \Sigma$ である.
2. 補題 3.1.1 で与えられる計量テンソルを持つ.
3. 零的ベクトル場 ${}^*\partial_r$ を未来向きとして時間的向き付けをする.

ここに，${}^*\partial_r$ はスター・カー座標の r 座標ベクトル場を表す．これが大域的に存在するから ${}^*K$ は時間的向き付け可能なのである．カー・スター時空の場合と同様に，各ボイヤー－リンキスト・ブロック B の，${}^*K$ への自然の埋め込みを ${}^*j$ で表す.

半径を表す関数 r は，ボイヤー－リンキスト座標系，カー・スター座標系，スター・カー座標系の 3 つの場合に使われている．それぞれの場合における座標ベクトル場は $\partial_r, \partial_r^*, {}^*\partial_r$ という記号で区別して表している．第 2 章で $\partial_r^* = \partial_r - \Delta^{-1}V$ となることを見たが，同様な計算から，${}^*\partial_r = \partial_r + \Delta^{-1}V$ となる．他の 3 つの座標ベクトル場，∂_ϑ, ∂_φ, ∂_t は 3 つの座標系で同一である.

${}^*K$ の時間的向き付けは，$<{}^*\partial_r, \partial_t> = -1$ ゆえ，$r \gg 1$ において ∂_t が未来向きであることから選択した.

${}^*K$ における外向き主要零的測地線は，作り方から，$r = -\infty$ から $r = +\infty$ まで妨害なく進行する．遅速カー時空と極限カー時空の場合には，地平面を〈外向き〉に横切っている．ありえないことに，ブラックホールから**出て**いるのである！ この矛盾が生じた理由は，${}^*K$ が K^* と同じものではない，という所にある.

K^* の場合と同様な計算から，${}^*K$ における内向線は，ベクトル場 ${}^*N = -(\Delta/2){}^*\partial_r + V$ の積分曲線であることが分かる．ここに，いつも通り，主要零的測地線のパラメータは未来向きにとってある．前と同様に，パラメータを考慮しなければ，軸を含む ${}^*K$ の任意の点において，内向線と外向線がそれぞれ 1 つずつ存在するのである．そして，それらの接線が，${}^*K$ の主要平面 Π となっている.

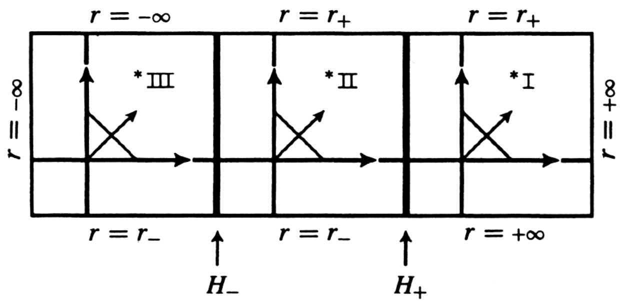


図 3.1　遅速スター・カー時空 $^*K$ の図．外向線は，水平の線で表してあるように，$r=-\infty$ から $r=+\infty$ までで定義されている．内向線は，上向きの線で表してあるように，極限値を持つ．

図 3.1 は，時空 $^*K$ の図である．第 2 章で検討した K^* の図 2.7 よりも，より模式的になっている．

時空の K^* と $^*K$ は，ボイヤー−リンキスト・ブロックから，別々な方法で構成したものである．そこで，K^* でのブロックと，$^*K$ での同じ番号のブロックとの関係が問題となる．いま，$B=$ I, II, III に対して，j^* で K^* への部分多様体として埋め込んだものを B^*, $^*j$ で $^*K$ へ埋め込んだものを $^*B$, と表すことにする．むろん，等長写像 $\mu={}^*j\circ(j^*)^{-1}$ で B^* と $^*B$ は同一視される．

補題 3.1.3

(1) 等長写像 $\mu\colon B^*\to{}^*B$ で，座標の間には

$$r=r,\quad \vartheta=\vartheta,\quad {}^*\varphi=\varphi^*-2A(r),\quad {}^*t=t^*-2T(r),$$

という関係がある．ここに，$A(r)$ と $T(R)$ は前述のものである．

(2) μ により，$B=$ I,III では時間的向き付けが保存される．$B=$ II では逆になる．

(3) μ により，外向線は外向線に，内向線は内向線に移される．ただし，$B=$ II では，像曲線は，過去向きのパラメータを持つ．

証明　(1) カー座標とボイヤー−リンキスト座標では r, ϑは同一である．定義より，$\varphi^*=\varphi+A(r)$, $^*\varphi=\varphi-A(r)$ であるから $^*\varphi=\varphi^*-2A(r)$ となる．$^*t$ と t^* についても同様．

(2) μ の微分写像により B^* の ∂_t が $^*B$ の ∂_t へ移されることがすぐに分かる．∂_ϑ と ∂_φ についても同様．$|r|$ が十分大きいところでは ∂_t は未来向きであるから，I と III では，μ が時間的向き付けを保存することが分かる．ブロック II については，次の (3) から示される．

(3) 主要零的測地線は，それぞれ，

K^*:　内向線　$-\partial_r^*$,　　外向線　$\partial_r^* + (2/\Delta)V$,

$^*K$:　内向線　$-^*\partial_r + (2/\Delta)V$　　外向線　$^*\partial_r$

の積分曲線であった．これらは，II* の外向線と *II の内向線を除いて，未来向きである．

μ を座標で表して

$$
\begin{aligned}
d\mu(\partial_r^*) &= \Sigma\partial(x^i \circ \mu)/\partial r\partial_i = {}^*\partial_r - 2\,dA/dr\partial_\varphi - 2dT/dr\partial_t \\
&= {}^*\partial_r - 2(a/\Delta)\partial_\varphi - 2[(r^2+a^2)/\Delta]\partial_t = {}^*\partial_r - (2/\Delta)V
\end{aligned}
$$

となる．この式から (符号を逆にして), μ で内向線が内向線に移ることが分かる．ただし，ブロック *II では，パラメータが過去向きになっている．μ は，II* の時間的向き付けを逆にする (I* と III* では保存している). $d\mu$ は ∂_t と ∂_φ を保存しているので，V も保存される．外向線について同様な計算をすると

$$
d\mu(\partial_r^* + (2/\Delta)V) = {}^*\partial_r - (2/\Delta)V + (2/\Delta)V = {}^*\partial_r
$$

となる．□

μ は，定義から，ボイヤー－リンキスト座標で表示すると恒等写像になっている．カー時空の時間的向き付けは，$r \gg 1$ における自然な向き付けを元にしているから，ブロック I の時間的向き付けが保存されるのは当然なことである．ブロック II では向きが逆になる (これが，これからの議論のカギになる) が，これの原因は，K^* と $^*K$ の構成の仕方にある (図 3.2 を見よ).

注意 3.1.4　高速カー時空の場合には，地平面が存在しないから，埋め込み写像 j^* は，1 つだけのボイヤー－リンキスト・ブロック B を K^* に埋め込むことになる．$^*j$ で $^*K$ に埋め込む場合も同様である．これで作られた時空 M_f を**最大高速カー時空** (maximal fast Kerr spacetime) と呼ぶ．‖

地平面が存在するときには，ブロックを結合して K^* と $^*K$ を構成する仕方が異なっているので，この 2 つの時空が等長であるかどうかが問題となる．しかしながら，

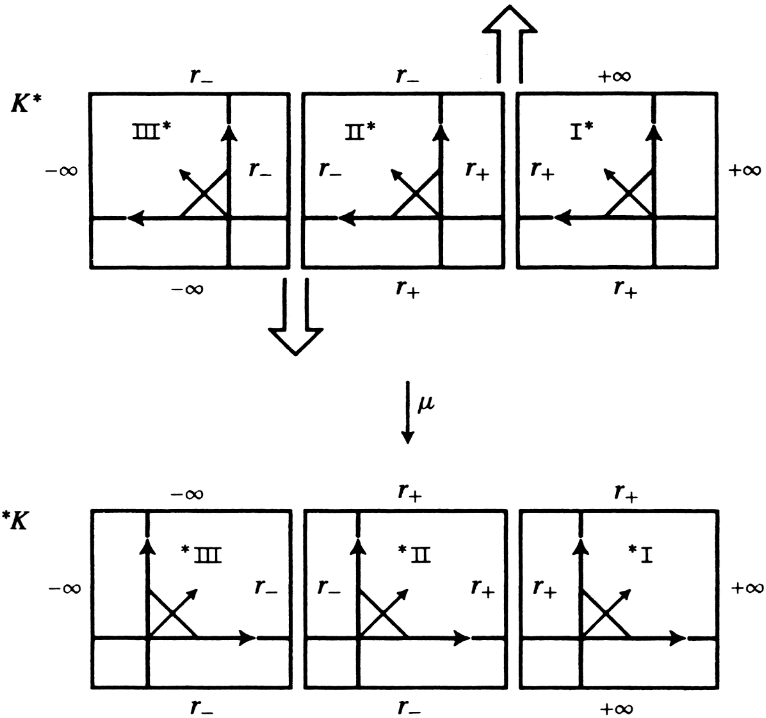


図 3.2　K^* と $^*K$ におけるボイヤー－リンキスト・ブロックの比較．等長写像 μ は，地平面を境にし，太い矢印が示すように，ブロック I* と III* を－ 90 度回転し，ブロック II* を＋ 90 度回転している．内向線は内向線に，外向線は外向線に移っている．ただし，ブロック II* において，像曲線は過去向きになっている．

補題 3.1.1 で与えた $^*K$ の線素と，補題 2.5.2 の K^* の線素を比べれば，記号の差違を無視すれば，$d\varphi\, dr$ と $dt\, dr$ の項の符号だけが異なっていることが分かる．他の項は 2 乗の形なので，座標間の写像

$$r = r, \qquad \vartheta = \vartheta, \qquad {}^*\varphi = -\varphi^*, \qquad {}^*t = -t^*$$

は等長写像である．この写像を軸まで拡張することは容易なので，等長写像 $\beta\colon K^* \to {}^*K$ を得ることができる．

β をボイヤー－リンキスト座標で表すと $(r, \vartheta, \varphi, t) \to (r, \vartheta, -\varphi, -t)$ であるから，これは，第 2 章の最初に述べたような，〈逆向き〉の等長写像になっている．時間と回

転が逆になるのである．つまり，K^* と $^*K$ は，逆向きの運動をしている同じ時空である，とみることができる．

3.2　最大極限カー時空

高速カー時空の場合には，K^* と $^*K$ は同一の時空 M_f になる．もちろん，より興味深いのは，地平面が存在する場合の方である．この節では，極限カー時空の場合について，解析的に最大までの拡張を構成する．つまり，K^* および $^*K$ のどちらも，地平面 $r = \mathrm{M}$ によって 2 つのボイヤー－リンキスト・ブロック I と III が分かれている場合である．(本章における拡張が最大になっていることは 4.15 節で証明する.)

多様体を拡張することのヒントは，その中を測地線が動き回る所にある．例えば，ボイヤー－リンキスト・ブロックを K^* や $^*K$ に拡張したときには，K^* では外向き主要零的測地線が自由に動き，$^*K$ では内向き主要零的測地線が自由に動くようになっていた．次はこの 2 つを拡張して 1 つにするのであるが，そこでは，(下記の例外を除いて) 内向線も外向線も $r = \pm\infty$ から $r = \mp\infty$ まで動くようにするのである．

測地線 γ は，未来向きに $|r| \to \infty$ となるとき，**未来完備** (future complete) である，という．過去向きに $|r| \to \infty$ のときは，**過去完備** (past complete) という．この両方を満たすときには**完備** (complete) である，という．$|r|$ が大きいときには，カー時空は漸近的にミンコフスキー時空となるから，この意味で完備となる，つまり測地的完備となることは，納得のいく推測である (次の章で証明する).

もちろん，リング状特異領域に到達する主要零的測地線は，地平面上にあるため r が一定となっているものと同様，除いて考えることにする．これら以外の零的測地線を，**通常** (ordinary) と呼ぶことにする．この節で行う構成は，全ての通常の主要零的測地線を完備にすることを目的としている．高速カー時空の場合には (注意 3.1.4 参照)，この目的は達成している．実際，M_f のモデル K^* では通常の内向線が完備であり，モデル $^*K$ では外向線について同様なことが成立しているのである．

さて，未来向きに関して K^* から構成を行うことにする (過去向きについても同様である). K^* の通常な主要零的測地線で未来完備でないものは，ブロック III の外向線である．一方，$^*K$ では，全ての外向線は完備である．そこで，等長写像 $\mu\colon \mathrm{III}^* \to {}^*\mathrm{III}$ をはり合わせ写像として，$^*K$ を K^* へはり合わせるのである (図 3.3, 図 3.4 を見よ).

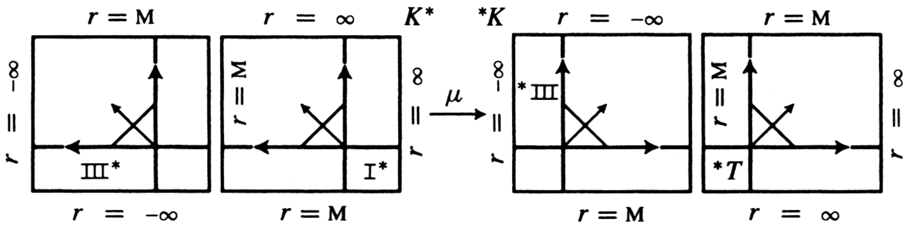


図 3.3　極限カー時空の K^* と $^*K$ におけるボイヤー－リンキスト・ブロックの比較．等長写像 μ により，*Ⅰ と *Ⅲ は－90 度回転する．内向線は内向線へ，外向線は外向線へ移される．また，時間的向き付けも保存される．

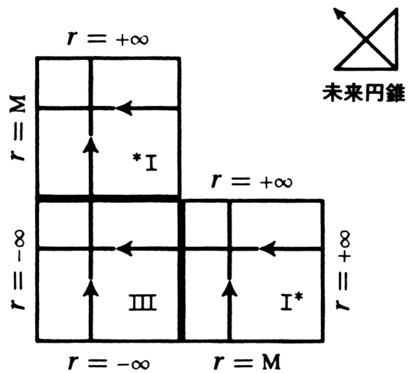


図 3.4　第 1 段階 K_1．写像 μ により，$^*K$ を＋90 度回転して，*Ⅲ = Ⅲ* とする．K_1 では，Ⅲ* の外向線は完備となる．

補題 3.2.1　上記の構成 $K_1 = K^* \cup_\mu {}^*K$, $\mu = \mu|$Ⅲ* においてハウスドルフ条件 (定義 1.4.4) が成立する．

証明　Ⅲ* 内にある点列 $\{p_n\}$ が $p \in K^* -$ Ⅲ* に収束するとする．このとき，p は K^* の地平面 $H: r = \mathrm{M}$ 上にあり，$n \to \infty$ のとき，$t^*(p_n)$ は有限の値に近づく．補題 3.1.3 より，点列 $\mu(p_n)$ の $^*t$ 座標は $t^*(p_n) - 2T(r)$ である．しかるに，$n \to \infty$ のとき $T(r) \to \infty$ なので，$\mu(p_n)$ は，$n \to \infty$ のとき発散する．□

このようなはり合わせでできたものも，節 2.3 で定義した条件に適合し，カー時空

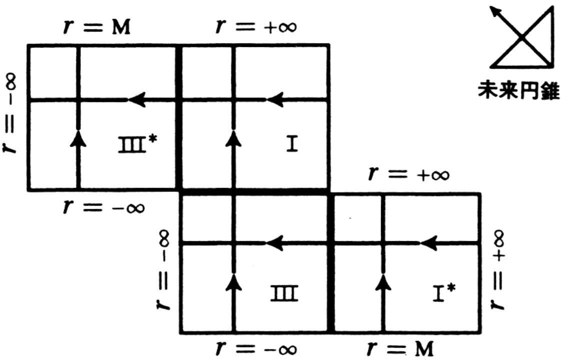


図 3.5 第 2 段階 K_2．K^* を K_1 へはり合わせると，*I の内向線は完備になる．太い線分が地平面 $r = \mathrm{M}$ を表している．

になっている．このことを証明する．つまり，K^* と $^*K$ 上の幾何学量で μ で保存されるものは，$K^* \cup_\mu {}^*K$ においても矛盾なく定義できることを示すのである．

補題 3.2.2 $K_1 = K^* \cup_\mu {}^*K$ はカー時空である．

証明 先ず，はり合わせ写像 μ: III* → *III は等長写像であるから，K_1 は連結した 4 次元ローレンツ多様体であることが分かる．μ は時間的向き付けを保存するから，K_1 は時間的向き付け可能であり，それゆえ時空である．次に，定義 2.3.1 で与えたカー時空となるための条件をチェックする．

条件 1. 構成から，ボイヤー－リンキスト・ブロックが稠密であることが分かる．なお，ブロック I と III の，K_1 への標準埋め込みを示さなければならない．はり合わせから，標準埋め込み $^*i$: $K^* \to K_1$, i^*:$^*K \to K_1$ があり， $i^* = {}^*i \circ \mu$ を満たすことが分かる (1.4 節).

座標を拡張して作った K^* と $^*K$ の定義から，B = I, III として，標準埋め込み j^*: $B \to B^* \subset K^*$, $^*j$: $B \to {}^*B \subset^* K$ を得る．したがって，ブロック I については，写像を組み合わせて，I → I* ⊂ $K^* \to K_1$, あるいは I → *I ⊂* $K \to K_1$ により，K_1 へ標準的に埋め込むことができる (図 3.4 を見よ).

ブロック III については，はり合わせ写像 μ は $^*j \circ (j^*)^{-1}$ であるから，$i^* = {}^*i \circ \mu$ から $i^* \circ j^* = {}^*i \circ {}^*j$: III → K_1 となる．この写像 j が，III の K_1 への標準埋め込み

となり，よって $\kappa_+/\kappa_- = -r_-/r_+$ が成立する．∥

時間の関数 $T(r)$ と角度の関数 $A(r)$ は，それぞれ，$(r^2+a^2)/\Delta$ と a/Δ の不定積分であった．そこで，この2つの関数を次で与える．

補題 3.4.2　$T(r)$ と $A(r)$ を

$$\begin{aligned} T(r) &= r + \frac{1}{2\kappa_+}\ln|r-r_+| + \frac{1}{2\kappa_-}\ln|r-r_-|, \\ A(r) &= \frac{a}{r_+-r_-}\ln\left|\frac{r-r_+}{r-r_-}\right|, \end{aligned}$$

で与えることができる．

この補題の証明は，実際に微分して確かめればよい．(Misner, Thorne and Wheeler 1973 では，もっと優雅な形で T と A を与えている．0, M, 2M の各点でゼロになるようにしているのである．しかしそのため式が複雑になっている.) A と T の個々のものは r_- と r_+ で定義されないが，組み合わせたものは都合よくなっている．

系 3.4.3　上記の記号の下に

$$A(r) - \frac{a}{{r_\pm}^2+a^2}T(r) = \left(\frac{-a}{{r_\pm}^2+a^2}\right)[r + (r_\pm + r_\mp)\ln|r-r_\mp|$$

が成立する．

これから，$A - aT/({r_+}^2+a^2)$ は $r \neq r_-$ において r の解析関数であり，$A - aT/({r_-}^2+a^2)$ は $r \neq r_+$ において r の解析関数であることが分かる．これらは，すぐに必要となる性質である．

系 3.4.4　関係式

$$\exp(2\kappa_\pm T(r)) = \exp(2\kappa_\pm r)\left|r-r_+\right|^{\kappa_\pm/\kappa_+}\left|r-r_-\right|^{\kappa_\pm/\kappa_-}$$

が成立する．

証明　左辺を計算して

から，第 2 段階の $K_2 = K_1 \cup_\mu K^*$ もカー時空となる (図 3.5 を見よ).

しかるに，K_2 では，新しいブロック Ⅲ* の外向線が完備ではない．そこでもう一度，完備にするため，K^* をはり合わせる．この操作を無限に続けていけば，全ての通常主要零的測地線を未来完備にすることができる．

次は過去方向である．最初の，K^* のブロック I を観察すれば，外向線が過去完備になっていないことが分かる．$\mu{:}\,\mathrm{I}^* \to {}^*\mathrm{I}$ によって ${}^*K$ とはり合わせれば過去完備となるが，新しいブロック Ⅲ*の内向線が完備にならない．そこで，未来向きの場合と同様な操作をし，これを無限に繰り返していけばよい．こうしてできたものを**最大極限カー時空** (maximal extreme Kerr spacetime) と呼び，M_e と表す．ここでは，Σ を通らない主要零的測地線は全て完備になっている (図 3.7 を見よ).

なお，地平面 $H{:}\, r = \mathrm{M}$ は 1 つのカー細片に含まれるが，ボイヤー－リンキスト・ブロックは，2 つのカー細片 K^* と ${}^*K$ に含まれている．

別な方法で M_e を構成することもできる．これは，1 つづつ〈ジッパー〉ではり合わせる方法で，後のためには便利なものである．いま，K^* のコピーを $K^i(-\infty < i < +\infty)$ とし，それを集めたものを M^* とする．K^i の中のブロック I^i と III^i を集めたものを $\mathcal{U}^*$ とする (つまり，$\mathcal{U}^*$ は，K^* から地平面を除いたものである). 同様にしてスター・カー時空から ${}^*M$ と ${}^*\mathcal{U}$ を作る．そして，図 3.7 から分かるように，補題 3.1.3 の等長写像 $\mu{:}\,\mathrm{III}^i \to \mathrm{III}^i$, $\mu{:}\,\mathrm{I}^i \to \mathrm{I}^{i+1}$ を繰り返して，はり合わせ写像 $\mu{:}\,\mathcal{U}^* \to {}^*\mathcal{U}$ を作るのである．このようにして作られた $M_e = M^* \cup_\mu {}^*M$ は，上記のものと一致する．

この作り方から，M_e の通常主要零的測地線は $r = \pm\infty$ から $r = \mp\infty$ まで動くこと (つまり完備) が分かる．次に，リング状特異領域に到達するものは完備ではないが，M_e の地平面上にあるものは**完備**となることを示す．遅速カー時空の場合を見れば分かるように，この結果は自明なものではない．

補題 3.2.3 K^* と ${}^*K$ の地平面 $r = r_\pm$ においては，標準ベクトル場 V は $\nabla_V V = \frac{1}{2}(r_\pm - r_\mp)V$ を満たす．よって，極限カー時空の場合には $r_+ = r_- = \mathrm{M}$ だから，$\nabla_V V = 0$ となる．

証明 先ず，ボイヤー－リンキスト・ブロック I, Ⅲ において $\nabla_V V = 0$ を計算する．この場合 $\varepsilon = \operatorname{sgn}\Delta = +1$ である．そして，極限 $r \to r_\pm$ をとる．

ボイヤー－リンキスト標構場で $V = \rho\sqrt{\Delta}E_0$ である．V は ∂_φ と∂_t の 1 次結合であり，r と Δ は r と ϑ のみを含むから，

$$\nabla_V V = \rho\sqrt{\Delta}\nabla_{E_0}(\rho\sqrt{\Delta}E_0) = \Delta\rho^2\nabla_{E_0}E_0 = \Delta\rho^2[FE_1 - a^2SC\rho^{-3}E_2]$$

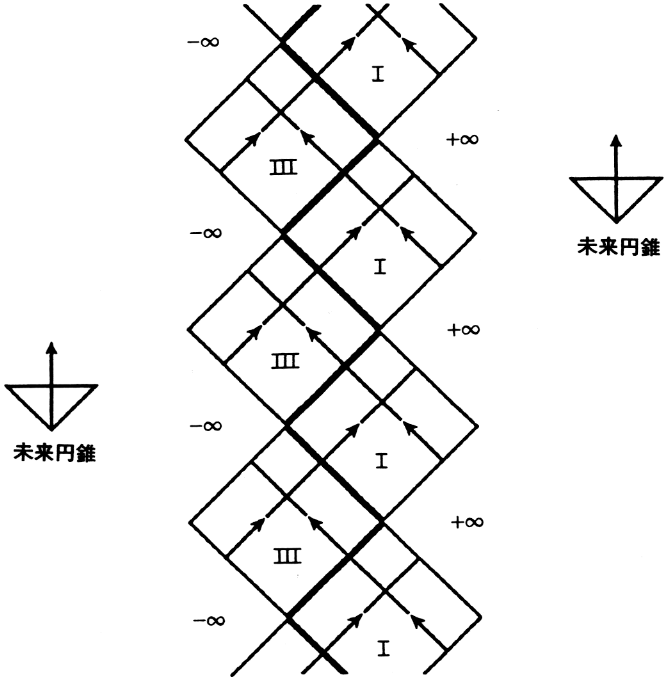


図 3.7　最大極限カー時空 M_e は，K^* と $^*K$ を交互にはり合わせて作られる (上を未来向きにして描いてある)．左上がりの I − III が　K^*，右上がりの III − I が $^*K$ である．全ての通常主要零的測地線は完備になる．

となる．ここに，右辺の変形は系 2.6.7 による．

ここで $r \to r_\pm$ とすると，$\Delta \to 0$ であり，$E_2 = \partial_\vartheta/\rho$ は地平面上でも定義されているから，E_2 の項はゼロとなる．残りの項 $\Delta\rho^2 F E_1$ を計算するため，カー・スター座標を用いると

$$E_1 = \rho^{-1}\sqrt{\Delta}\partial_r = \rho^{-1}\sqrt{\Delta}(\partial_r^* + \Delta^{-1}V)$$

である．そこで $r \to r_\pm$ として極限値を求めると

$$\nabla_V V = \lim \nabla_V V = \lim \Delta\rho^{-2}[\rho^2(r - \mathrm{M}) - \Delta r](\partial_r^* + \Delta^{-1}V)$$

である．∂_r^* の項は Δ により消えるので，残りから

$$\begin{aligned}\nabla_V V &= \lim \Delta\rho^{-2}[\rho^2(r-\mathrm{M}) - \Delta r]\Delta^{-1}V \\ &= \lim(r-\mathrm{M})V = (r_\pm - \mathrm{M})V = \tfrac{1}{2}(r_\pm - r_\mp)V\end{aligned}$$

となる．□

系 3.2.4 極限カー時空では，K^* と $^*K$ の地平面上の主要零的測地線 は完備である．よって，M_e でも完備である．

証明 地平面上の主要零的曲線は，標準ベクトル場 V の積分曲線 α である．上の補題より $\alpha'' = \nabla_V V = 0$ となり，α は測地線であることが分かる．地平面上において，$V = (r_\pm^2 + a^2)\partial_t + a\partial_\varphi$ であり，∂_φ と ∂_t の**定数係数**の 1 次結合になっている．よって，α は，実数全体で定義されている．□

3.3 遅速カー時空の拡張

前節で述べた極限カー時空の場合をまねて，遅速カー時空を拡張する．しかしこの場合の構成には，もう少し工夫が必要となり，拡張した結果も異なるものになる．

この構成に用いるのは，カー・スター時空 K^* とスター・カー時空 $^*K$ である．K^* では**内向線**が完備，$^*K$ では**外向線**が完備になっている．K^* と $^*K$ において同じ番号を持つボイヤー－リンキスト・ブロックどうしは，標準等長写像 $\mu = {}^*j \circ (j^*)^{-1}\colon B^* \to {}^*B$ により結びつき，補題 3.1.3 の性質がある．

前節と同様に，K^* からスタートし，未来向きに構成することにする．K^* のブロック Ⅱ*, Ⅲ* における外向線は未来向きに非完備である．Ⅱ* を完備にするため，先ず，$^*K$ をはり合わせる．ここで，これまでになかった新しい現象が生じる．はり合わせの等長写像 μ: Ⅱ* → *Ⅱ では，時間的向き付けが**逆になってしまう**のである．もちろん，拡張した多様体においても時間的向き付け がなければならない (このことが時空の定義に入っている). μ は，時間的向き付けを**保存しなければならない**のである．そこで，はり合わせの前に，時空 $^*K$ 全体の時間的向き付けを逆にする．(時空 N に対して，その時間的向き付けを逆にしたものを N' で表すことにする.)

Ⅲ* については，μ: Ⅲ* → *Ⅲ で時間的向き付けが保存されるので，これをはり合わせるときには $^*K$ の時間的向き付けを逆にする必要はない．

極限カー時空の場合と同様に，B^* と $^*B$ をはり合わせた後では，各ブロックのアス

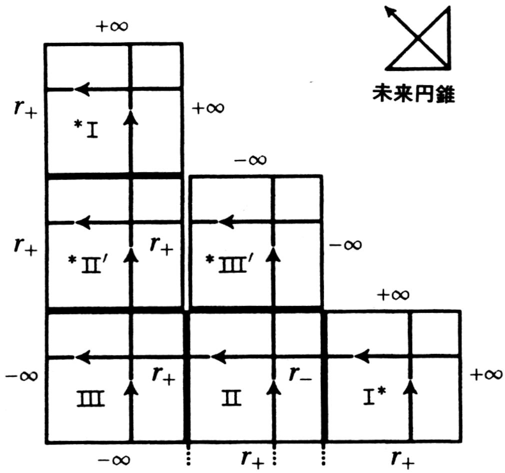


図 3.8　K^* (水平方向の長方形) に，$^*K'$ と $^*K$ (垂直方向の長方形) をはり合わせて K_1 を作る．K^* における通常外向線が未来完備になる．*II′ と *III′ の間に隙間がある事に注意．

タリスク (∗) を取り，$B=$I, II, III と記すことにする．時間的向き付けは K^* から (標準等長写像を通して) 得たものとする．つまり，B が I や III の場合には，$^*B \approx B^* \to B$ となる．だが，*II′ $\approx$ II* $\to$ II なので，*II $\approx$ II$^{*\prime}$ $\to$ II′ と書く．

この約束の下に，次のはり合わせを続けて行う．

1. μ:*II′ $\approx$ II* により $^*K'$ を K^* にはり合わせる．
2. μ:*III $\approx$ III* により $^*K$ を K^* にはり合わせる．

この結果が図 3.8 の時空 K_1 である．

極限カー時空の場合と同様に，このはり合わせでハウスドルフ条件は成立し，K_1 はカー時空となる．特に，K_1 の各ボイヤー－リンキスト・ブロックに関して，標準埋め込み $j\colon B \to K$ が存在する．

主要零主的測地線は未来向きなので，時間的向き付けを逆にすると，これらの測地線のパラメータも逆になる．**内向線**と**外向線**の言葉の表現が逆になってしまうのである．例えば，$^*K$ の外向線 γ は $r=-\infty$ から $r=+\infty$ まで動く．しかし $^*K'$ では，逆になった $\bar{\gamma}$ は，$r=+\infty$ から $r=-\infty$ までの方向で動いている．そこでこの $\bar{\gamma}$ を使い，図 3.8 のように，II$^* \subset K^*$ の非完備な内向線を完備にするのである．

K_1 におけるブロック *II と *III′ においては，外向線は，未来向きに対し，完備に

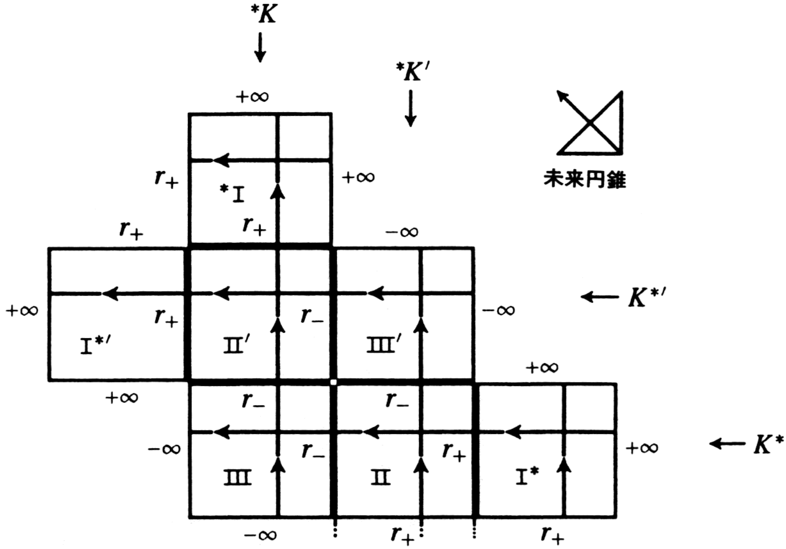


図 3.9　図 3.8 の時空 K_1 に $K^{*\prime}$ をはり合わせて K_2 を作る．これで，ブロック II′ と III′ の通常外向線が未来完備になった．

なっていない (図 3.8 において，右から左へ水平に進行する直線である)．この欠点を除くため (そして，この 2 つのブロックを融合するため)，K_1 に K^* をはり合わせることにする．今度は，K^* の時間的向き付けを逆にしなければならない．そして，写像

$$\mu: \quad \mathrm{I}^{*\prime} \cup \mathrm{II}^{*\prime} \to {}^*\mathrm{I} \cup {}^*\mathrm{II}$$

によって $K^{*\prime}$ を K_1 へはり合わせるのである．これにより**時間的向き付けが保存される**．これでできた時空 K_2 が図 3.9 に示してある．

未来へ向けては，以上の操作を繰り返して行けばよい．過去に向けては，最初の K^* からはじめて，上記と対称的な操作を過去へ向けて繰り返していくのである．このようにして作られた時空 M_0 を，遅速カー時空の**基本的拡張** (basic extension) と呼ぶ (図 3.10 を見よ)．

図 3.10 の M_0 を見ると，次に検討すべきポイントが 2 つあることが分かる．その 1 つは，M_0 が，それぞれ 3 つのブロックから作られている長方形を，縦横に積み重ねてできている，という所である．これは，4 つのブロックから作られる 2 種類の正方形をつなぎ合わせる，と解釈すればより簡単になる．この正方形 (図 3.11) はカー時空 M_0

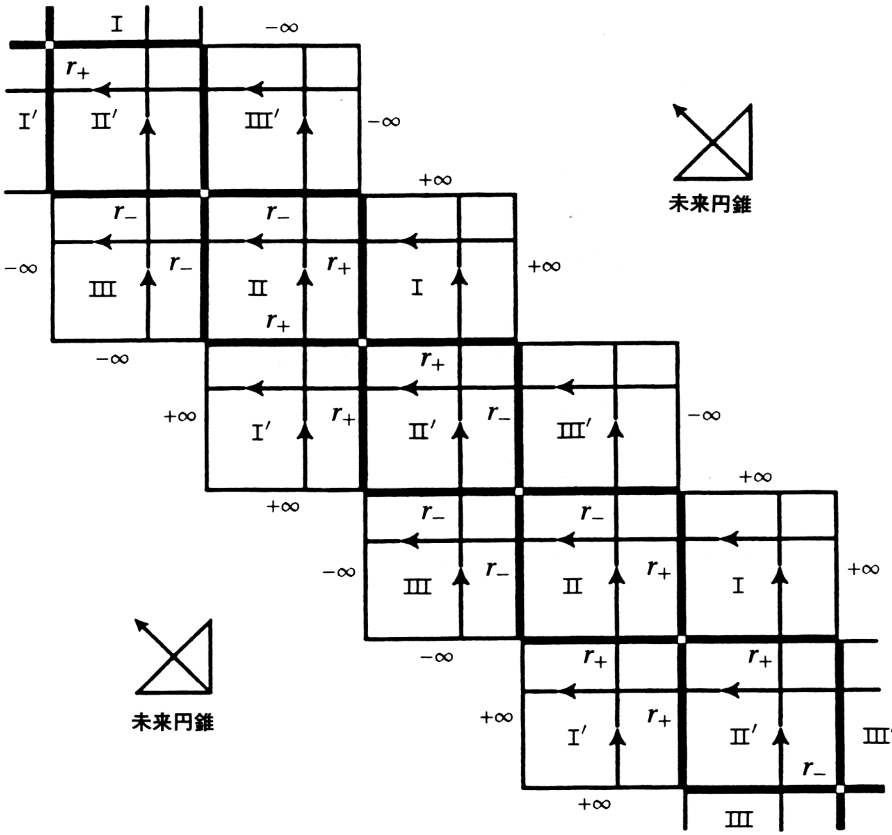


図 3.10　遅速カー時空の基本的拡張．水平方向の長方形が K^*，垂直方向の長方形が $^*K$ である．通常の主要零主的測地線は，全て，完備になっている．時間的向き付けが無限に繰り返されている構図を，図 3.7 で示した極限カー時空の場合と比較せよ．

の開部分多様体であり，**クルスカル領域** (Kurskal domain) $\mathcal{D}_0(r_\pm)$ と呼ばれている．

2つめのポイントは，$\mathcal{D}_0(r_\pm)$ の中心にある穴である．ここは，4つのカー地平面が集まっている場所である．M_0 は，K^* と $^*K$ を細片として集めたものであり，このような穴は考慮していない．この新しい集合 $\boldsymbol{S}$ は，4つの地平面が自然につながっている場所でなければならない．K^* や $^*K$ の地平面とは，$S^2 \times R^1$ に微分同相な超曲面であった．つまり時間軸全体で定義された2次元球なのである．$\boldsymbol{S}$ において，これら

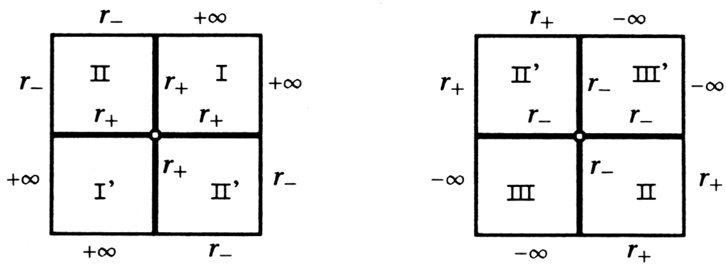


図 3.11　クルスカル領域.

の〈短い地平面〉Hをつなげて,〈長い地平面〉$\mathbb{H}$ を作る. そして, $\mathcal{D}_0(r_\pm)$ の長い地平面どうしが $\boldsymbol{S}$ で交わるのである. この 2 次元球を**交叉球** (crossing sphere) と呼ぶ.

幾何学的にいえば, これは問題なく自然なものである. しかし, 物理学的にいえば, 交叉球のまわりの時空は奇妙なものとなっている. $\mathcal{D}_0(r_\pm)$ の中にいる観察者が地平面の球を見たとすると (もちろん, 見えるものと仮定してだが), r_- あるいは r_+ の同じ半径の球が, 各々通り抜けるのを観察することになる. R^3 内の 2 次元球でいえば, 中心が同じ球で, 1 つの球は拡大し, もう 1 つの球は縮小し, この 2 つが交叉するという現象である.

長い地平面の概念は, リング状特異領域を通らない主要零的測地線を全て完備にするために必要となる. 極限カー時空 M_e の場合, K^* と $^*K$ の短い地平面を構成する静止光子は完備であった. 遅速カー時空の場合では, 静止光子は完備になっていない (それで, 交叉球を使って完備にするのである).

カー地平面の静止光子は標準ベクトル場 V の積分曲線である (パラメータは変わっていることがある). 補題 3.2.3 によれば, 極限カー時空の場合には, 測地線のパラメータになっている. このことも, 遅速カー時空の場合には成立していない. 地平面 $r = r_\pm$ において, ベクトル場 V は, K^* の座標でも $^*K$ の座標でも, 同じ式 $(r_\pm^2 + a^2)\partial_t + a\partial_\varphi$ で与えられる. t^* と$^*t$ の両方で成立する式においては $^*t^*$ と書くことにし, $^*\varphi^*$ も同様とする. 各地平面において, V の積分曲線 α の 1 つを調べればよい. なぜなら, 軸対称と時間対称があるので, $^*t^*$ と $^*\varphi^*$ に初期値を与えることで, 全ての場合に対応することができるのである. **標準的な場合**として, $u \to \alpha(u)$ を, 一番簡単な座標

$$r = r_\pm, \quad \vartheta = \vartheta_0, \quad {}^*\varphi^* = au, \quad {}^*t^* = ({r_\pm}^2 + a^2)u$$

で考えることにする. α を測地線 γ にするため, $\gamma(s) = \alpha(f(s))$ と置く. これに補

題 3.2.3 を用いて，

$$\begin{aligned}\gamma'' &= f'^2\alpha''(f) + f''\alpha'(f)\\ &= f'^2\nabla_V V + f''V = \big[(r_\pm - r_\mp)/2f'^2 + f''\big]V\end{aligned}$$

となる．したがって，γ が測地線となる条件は，$f(s)$ が微分方程式 $f'' + (r_\pm - r_\mp)/2f'^2 = 0$ の解となることである．簡単のため，主要零的曲線は未来向きで，V は，K^* と $^*K$ の地平面で未来向きである，とする．そこで $f' > 0$ となることが要求される．よって，標準的な零的測地線は

$$f(s) = k_\pm{}^{-1}\ln\,(k_\pm s), \quad k_\pm = (r_\pm - r_\mp)/2$$

となる．ここに $r = r_+$ なら領域 $\{s > 0\}$ を，$r = r_-$ なら領域 $\{s < 0\}$ をとるとする．

K^* と $^*K$ の時間的向き付けが逆ならば，γ を未来向きにし，領域を逆にするため $f' < 0$ とする．したがって，次の結果を得る．

補題 3.3.1　遅速カー時空 K^* と $^*K$ の地平面 $r = r_\pm$ 上の標準的な (未来向き) 主要零的曲線γ の座標は

$$r = r_\pm, \quad \vartheta = \vartheta_0, \quad {}^*\varphi^* = af(s), \quad {}^*t^* = (r_\pm{}^2 + a^2)f(s)$$

で与えられる．ここに $f(s)$ は次のように定める．

1. K^* と $^*K$ の $r = r_+$ では $s > 0$ で $k_+{}^{-1}\ln k_+ s$.
2. $K^{*\prime}$ と $^*K'$ の $r = r_+$ では $s < 0$ で $k_+{}^{-1}\ln(-k_+ s)$.
3. K^* と $^*K$ の $r = r_-$ では $s < 0$ で $k_+{}^{-1}\ln k_- s$.
4. $K^{*\prime}$ と $^*K'$ の $r = r_-$ では $s > 0$ で $k_+{}^{-1}\ln(-k_- s)$.

いずれの場合にも，$s \to 0$ で完備ではなく，このとき $\gamma(s)$ は $\mathcal{D}_0(r_\pm)$ の中心へ近づく．

3.4　交叉球の構成

この節では，長い地平面が交わる球を構成して，クリスカル領域 $\mathcal{D}_0(r_\pm)$ を解析的多様体 $\mathcal{D}(r_\pm)$ へ拡張する．次の節で，この球までカー計量を拡張する．そして，図 3.10 のように $\mathcal{D}(r_+)$ と $\mathcal{D}(r_-)$ をつなげて，最大遅速カー時空を得るのである．

交叉球は，$\mathcal{D}(r_\pm)-$ (軸) の座標系 $\eta^\pm$ を拡張して構成される．この座標系は，発見者の R. H. ボイヤー，R. W. リンキストにより〈クルスカル的座標系〉と呼ばれたので，ここでは KBL 座標と呼ぶことにする．(ボイヤーとリンキストは，現在彼らの名前が付いている座標を〈シュワルツシルド的座標〉と呼んでいた.) 今までの座標系で使ってきた，大域的に定義された半径の関数 r は，KBL 座標の関数には使えない．なぜなら，交叉球 $\boldsymbol{S}$ の各点 p は r の危点になっているのである．実際，$\boldsymbol{S}$ の各点 p において，接空間は地平面に接するベクトルで張られている．そして，地平面では r は定数なので，p で $dr = 0$ となる．

では，r を何に置き換えればよいのであろうか．各ボイヤー－リンキスト・ブロックは 2 つのカー細片に含まれている．K^* と $^*K$ である．そこで (1920 年代のアーサー・エディントンをまねて)，ボイヤー－リンキスト座標の r と t を，2 つのカー時間座標 t^* と $^*t$ で置き換えることが考えられる．座標 t は地平面で定義されないが，しかし，t^* は，K^* の地平面まで拡張できるのである ($^*K$ の地平面では駄目であるが). $^*t$ についても同様である．このように都合が悪いところがまだ半分残っているし，$\mathcal{D}(r_\pm)$ のボイヤー－リンキスト・ブロックでは，t^* と $^*t$ を区別することができない．しかしながら，これが目的に向かっての拡張第一歩なのである．

注意 3.4.1

1. 地平面の半径 r_+ と r_- は，方程式 $\Delta = r^2 - 2\mathrm{M}r + a^2$ の解であるから，

$$\begin{aligned} r_+ + r_- &= 2\mathrm{M}, \\ r_+ r_- &= a^2, \\ {r_\pm}^2 + a^2 &= r_\pm(r_\pm + r_\mp) = 2\mathrm{M}r_\pm, \end{aligned}$$

が成立する．この最後の式から

$$\frac{{r_-}^2 + a^2}{{r_+}^2 + a^2} = \frac{r_-}{r_+}$$

となる．

2. 遅速カー時空において，定数 κ_+ と κ_- を

$$\kappa_\pm = \frac{r_\pm - r_\mp}{2({r_\pm}^2 + a^2)}$$

によって定義する．この定数は $\kappa_- < 0 < \kappa_+$ を満たし，上の恒等式から

$$2\kappa_+ r_+ = \frac{r_+ - r_-}{r_+ + r_-} = -2\kappa_- r_-$$

となり，よって $\kappa_+/\kappa_- = -r_-/r_+$ が成立する．‖

時間の関数 $T(r)$ と角度の関数 $A(r)$ は，それぞれ，$(r^2+a^2)/\Delta$ と a/Δ の不定積分であった．そこで，この 2 つの関数を次で与える．

補題 3.4.2　$T(r)$ と $A(r)$ を

$$
\begin{aligned}
T(r) &= r + \frac{1}{2\kappa_+}\ln|r-r_+| + \frac{1}{2\kappa_-}\ln|r-r_-|,\\
A(r) &= \frac{a}{r_+-r_-}\ln\left|\frac{r-r_+}{r-r_-}\right|,
\end{aligned}
$$

で与えることができる．

この補題の証明は，実際に微分して確かめればよい．(Misner, Thorne and Wheeler 1973 では，もっと優雅な形で T と A を与えている．0, M, 2M の各点でゼロになるようにしているのである．しかしそのため式が複雑になっている.) A と T の個々のものは r_- と r_+ で定義されないが，組み合わせたものは都合よくなっている．

系 3.4.3　上記の記号の下に

$$
A(r) - \frac{a}{{r_\pm}^2+a^2}T(r) = \left(\frac{-a}{{r_\pm}^2+a^2}\right)[r + (r_\pm + r_\mp)\ln|r-r_\mp|
$$

が成立する．

これから，$A - aT/({r_+}^2+a^2)$ は $r \neq r_-$ において r の解析関数であり，$A - aT/({r_-}^2+a^2)$ は $r \neq r_+$ において r の解析関数であることが分かる．これらは，すぐに必要となる性質である．

系 3.4.4　関係式

$$
\exp(2\kappa_\pm T(r)) = \exp(2\kappa_\pm r)\left|r-r_+\right|^{\kappa_\pm/\kappa_+}\left|r-r_-\right|^{\kappa_\pm/\kappa_-}
$$

が成立する．

証明　左辺を計算して

$$\exp(2\kappa_\pm T(r)) = \exp\left[\kappa_\pm(2r + {\kappa_+}^{-1}\ln|r - r_+| + {\kappa_-}^{-1}\ln|r - r_-|)\right]$$
$$= \exp\left[2\kappa_\pm r + (\kappa_\pm/\kappa_+)\ln|r - r_+| + (\kappa_\pm/\kappa_-)\ln|r - r_-|\right]$$

となる．□

上式において，$\kappa_+/\kappa_- = -r_-/r_+$ であることに注意せよ．

上に述べた t^* と $^*t$ の欠点を除くには，$(x, y) \to (e^x, e^y)$ という形の写像で，t^* と $^*t$ が作る平面を，平面の 1 つの象限に縮めればよい．(図 3.12 を見よ.)

定義 3.4.5　$\mathcal{D}_0(r_+)$ のボイヤー－リンキスト・ブロックにおいて，実数値関数 U^+, V^+ を

$$\begin{aligned}
&\text{I において:} && U^+ = \exp(-{\kappa_+}^*t), && V^+ = \exp(\kappa_+ t^*)\\
&\text{II において:} && U^+ = -\exp(-{\kappa_+}^*t), && V^+ = \exp(\kappa_+ t^*)\\
&\text{I}'\text{において:} && U^+ = -\exp(-{\kappa_+}^*t), && V^+ = -\exp(\kappa_+ t^*)\\
&\text{II}'\text{において:} && U^+ = \exp(-{\kappa_+}^*t), && V^+ = -\exp(\kappa_+ t^*)
\end{aligned}$$

で定める．$\mathcal{D}_0(r_-)$ の場合には，上式の，上付と下付のプラスをマイナスに換え，ブロックの番号を I→III'，II→II'，I'→III, II'→II と変更する．

これ以外の符号の決め方でも座標を作り上げることはできる．しかし，このように符号を決めると，$U^\pm$ と $V^\pm$ が作る平面の象限が図 3.11 と一致する，という利点がある ($\mathcal{D}_0(r_+)$ の場合は図 3.12 も参照せよ). 特別な定数 $\kappa_\pm$ は，補題 3.4.10 で必要となる．(積 U^+V^+ が r だけの関数になるように $\kappa_\pm$ の符号を決めたのである.)

$U^\pm$ と $V^\pm$ では，r と t を置き換えて，余緯度関数ϑ はそのままになっている．次は，てきとうな経度関数 $\varphi^\#$ を作らなければならない．KBL 座標を導入する目的は，長い地平面が交わる所に交叉球を作ることである．そのため，ボイヤーとリンキストは，**長い地平面の主要零的測地線が** KBL **座標の座標曲線になる**ように $\varphi^\#$ を導入した．(主要零的曲線を座標曲線にするというアイデアは，本書でもすでに，カー・スター座標系やスター・カー座標系を構成する所で用いている.) クルスカル領域が 2 種類あるため，$\varphi^\#$ も 2 種類，φ^+ と φ^- を作らなければならない．

K^* と $^*K$ のどちらにおいても，地平面 $r = r_\pm$ 上の主要零的曲線は，標準ベクトル場 V を $r = r_\pm$ に制限したもの，つまり $V_\pm = ({r_\pm}^2 + a^2)\partial_t + a\partial_\varphi$ の積分曲線である．先ず，K^* で，$\varphi^\pm$ がカー・スター座標 $r, \vartheta, \varphi^*, t^*$ の関数である場合を考える．

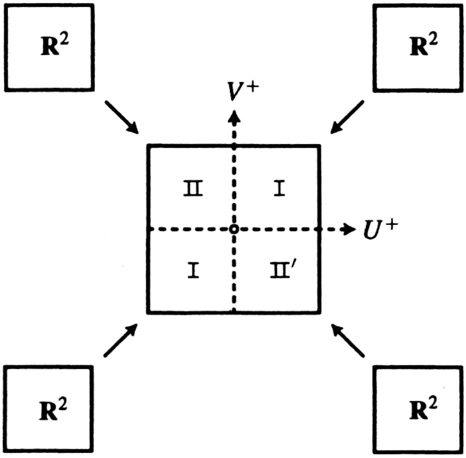


図 3.12　$t^*, {}^*t$ **平面を，** U^+V^+ **平面の 1 つの象限へ移す．**

このとき，$\varphi^\pm$ は $V_\pm$ の積分曲線上で定数なので

$$0 = d(\varphi^\pm \circ \alpha)/ds = \alpha'[\varphi^\pm] = V_\pm[\varphi^\pm]$$
$$= ({r_\pm}^2 + a^2)\partial\varphi^\pm/\partial t^* + a\partial\varphi^\pm/\partial\varphi^*$$

となる．これより，$\varphi^\pm$ は $\varphi^* - [a/({r_\pm}^2 + a^2)]t^*$ となる．${}^*K$ についても同様にして，$\varphi^\pm = {}^*\varphi - [a/({r_\pm}^2 + a^2)]{}^*t$ となる．この 2 つの式は $K^* \cap {}^*K$ で一致しないので，平均を作ることにする．

定義 3.4.6　　$\mathcal{D}_0(r_\pm)$ の各ボイヤー－リンキスト・ブロックにおいて，KBL 経度関数 $\varphi^\pm$ を

$$\varphi^\pm = \frac{1}{2}\left[\varphi^* + {}^*\varphi - \frac{a}{{r_\pm}^2 + a^2}(t^* + {}^*t)\right]$$

で定義する．

さて，KBL 座標が大域的に与えられることを示す．

命題 3.4.7

A. $\mathcal{D}_0(r_\pm)-$(軸) の各ボイヤー－リンキスト・ブロック上の関数 $U^\pm$, $V^\pm$, ϑ, $\varphi^\pm$ は，$\mathcal{D}_0(r_\pm)-$(軸) へ，解析的に一意に拡張できる．

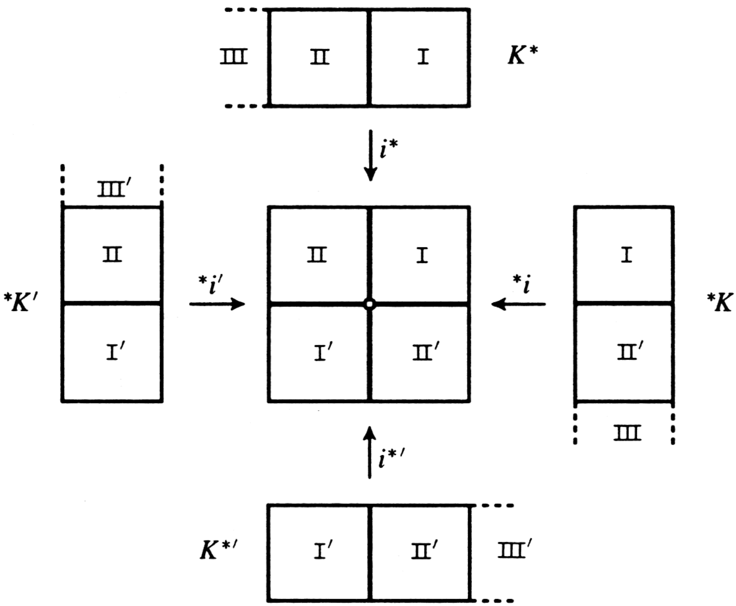


図 3.13 $\mathcal{D}_0(r_+)$ **は，4 つのカー座標の細片で構成されている．(ダッシュのついたパターンについては図 3.10 を見よ.)**

B. 拡張したこれらの関数は，$\mathcal{D}_0(r_\pm)$−(軸) において座標系 $\eta^\pm$ を構成する．

C. そして，写像 $\eta^\pm$ は，$\mathcal{D}_0(r_\pm)$ から $(R^2-(0,0))\times S^2$ の上への微分同相を与えるように (r_- の場合，リング状特異領域は除くとする)，解析的に一意に拡張することができる．

証明　先ず，r_+ の場合を考える．

主張 A の証明　$\mathcal{D}_0(r_+)$ は，図 3.13 のように，4 つのカー細片で作られている．各カー細片において，関数 U^+, V^+, ϑ, φ^+ を，$K\cap\mathcal{D}_0(r_+)$ の 2 つのボイヤー－リンキスト・ブロックから，それらを結びつけている短い地平面へ解析的に拡張できることを示す．

先ず，$K^*\subset\mathcal{D}_0(r_+)$ のブロック I, II について示す．4 個の関数を，K^* のカー・スター座標で表しておく．I, II で考えるので，不等式 $r>r_-$ が成立する．これらの関

数を拡張するため，次のような関係式が必要となる．

(1) 式 $U^+ = (r - r_+)(r - r_-)^{-r_-/r_+} \exp[\kappa_+(2r - t^*)]$ が成立する．

これを証明する．I∪II においては，U^+ の 2 つの定義を，$\mathrm{sgn}(r-r_+)\exp(-\kappa_+^* t)$ とまとめることができる．これに ${}^*t = t^* - 2T(r)$ を代入し，系 3.4.4 を使うと，

$$\begin{aligned} U^+ &= \mathrm{sgn}(r - r_+)\exp(-\kappa_+ t^*)\exp(2\kappa_+ T(r)) \\ &= \mathrm{sgn}(r - r_+)\exp(-\kappa_+ t^*)\exp(2\kappa_+ r)|r - r_+|\,|r - r_-|^{-r_-/r_+} \\ &= (r - r_+)(r - r_-)^{-r_-/r_+}\exp[\kappa_+(2r - t^*)] \end{aligned}$$

となる．最後の等号において，1 つの絶対値は sgn で消え，もう 1 つは $r > r_-$ で消えている．

(2) 定義から， I∪II において $V^+ = \exp(\kappa_+ t^*)$ である．

(3) ϑ は変更なし．

(4) 定義から $\varphi^+ = (1/2)[\varphi^* + {}^*\varphi - a(t^* + {}^*t)/({r_+}^2 + a^2)]$ となる．これに ${}^*\varphi = \varphi^* - 2A(r)$ と ${}^*t = t^* - 2T(r)$ を代入して

$$\varphi^+ = \varphi^* - \frac{a}{{r_+}^2 + a^2}\, t^* - \left(A(r) - \frac{a}{{r_+}^2 + a^2}\, T(r)\right)$$

となる．

関数 U^+, V^+, ϑ は，明らかに，K^* の軸を除いた $r > r_-$ 領域の地平面まで拡張できる．同様に，(系 3.4.3 の後に述べたように) φ^+ の最後の項が $r > r_-$ で解析的なので，φ^+ も拡張できる．

次に，カー細片 ${}^*K'$ のブロック I′，II について示す．ここではスター・カー座標を用いて，上記の (1) から (4) までと同様な関係式を作ることができる．

(1′) I′∪II において $U^+ = -\exp(-\kappa_+ {}^*t)$ である．

(2′) 上記の (1) と同様にして

$$\begin{aligned} V^+ &= -\mathrm{sgn}(r - r_+)\exp(\kappa_+ t^*) \\ &= -\mathrm{sgn}(r - r_+)\exp(\kappa_+({}^*t + 2T(r))) \\ &= -\mathrm{sgn}(r - r_+)\exp(\kappa_+ {}^*t)\exp(2\kappa_+ T(r)) \\ &= -\mathrm{sgn}(r - r_+)\exp(\kappa_+ {}^*t)\exp(2\kappa_+ r)|r - r_+|(r - r_-)^{-r_-/r_+} \\ &= -(r - r_+)(r - r_-)^{-r_-/r_+}\exp[\kappa_+(2r + {}^*t)] \end{aligned}$$

となる．

(3') ϑ は変更なし．

(4') φ^+ の定義に $\varphi^* = {}^*\varphi + 2A(r)$ と $t^* = {}^*t + 2T(r)$ を代入して

$$\varphi^+ = {}^*\varphi - \frac{a}{{r_+}^2 + a^2}\, {}^*t - \left(A(r) - \frac{a}{{r_+}^2 + a^2}\, T(r)\right)$$

となる．

前と同様に，これらの関数も，${}^*K'$ の軸を除いた $r > r_-$ の領域まで拡張することができる．

他の 2 つのカー座標細片についても，符号の変更だけであるので，結局，拡張した関数 $\eta^+ = (U^+, V^+, \varphi^+, \vartheta)$ は，$\mathcal{D}_0(r_+)$–(軸) から $R^2 \times S^2$ への解析的写像となっている．これで主張 A は証明された．

主張 B の証明　η^+ が座標系となることを示す．定義 3.4.5 から，各ブロックにおいて，η^+ は，写像 $\tau = (t^*, {}^*t, \vartheta, \varphi^+)$ に対して微分同相 $(x, y) \to (e^x, e^y)$ を行ったもの，となっている．しかるに，ボイヤー－リンキスト・ブロックにおいては，τ は座標系である．実際，1 対 1 であることをチェックするのは容易であり，ヤコビ行列式も，例えばカー・スター座標で $2(r^2 + a^2)/\Delta \neq 0$ となる．よって，各ブロックで η^+ は座標系となる．符号の選び方から，各ブロックの像に共通部分がないから，η^+ は，$\mathcal{D}_0(r_+)$ で 1 対 1 である．あとは，地平面で η^+ のヤコビ行列式がゼロにならないことを示せばよい．4 つのカー座標系は，符号が異なるだけであるから，K^* について示せば十分である．つまり，ヤコビ行列式

$$J = \partial(U^+, V^+, \varphi, \vartheta)/\partial(r, \varphi^*, t^*, \vartheta)$$

が K^* の地平面 $r = r_+$ でゼロにならないことを示す．明らかに ϑ は除くことができる．また，V^+ の偏微分で，恒等的にゼロ，とならないのは $\partial V^+/\partial t^* = \kappa_+ \exp(\kappa_+ t^*)$ であるが，これはゼロになることはない．残ったのは $\partial(U^+, \varphi^+)/\partial(r, \varphi^*)$ である．しかるに，$\partial U^+/\partial\varphi^* = 0, \partial\varphi^+/\partial\varphi^* = 1$ である．よって，ヤコビ行列式 J と $\partial U^+/\partial r$ は，同じ点でゼロになることはない．

次に，$r = r_+$ において $\partial U^+/\partial r$ が正になることを示す．先の公式 (1) を使うと，U^+ は，

$$f(r) = (r - r_-)^{-r_-/r_+} \exp(2\kappa_+ r)$$

と置いて，$(r-r_+)f(r)$ と書ける．よって，$dU^+/dr = f(r)+(r-r_+)f'(r)$ となる．この式は，$r=r_+$ ならば $f(r)$ に帰着し，明らかに正である．(これから，ヤコビ行列式 J は，r_+ で正であり，ゼロになる所はないから $r>r_-$ で正であることが分かる.) これで主張 B は証明された.

主張 C の証明　KBL 座標系を軸まで拡張する前に，座標 U^+, V^+ は，$\mathcal{D}_0(r_+)$−(軸) から，R^2 から原点 $(0,0)$ を除いた上への写像であることを示す.

ボイヤー－リンキスト・ブロック上では，(U^+, V^+) 写像は，$(t^*, {}^*t)$ を指数にして，$t^*, {}^*t$ 平面を U^+, V^+ の 4 つの象限へ移すものである．よって注意 3.4.8 より，R^2 の 4 つの象限全体へ移されることが分かる．次に，短い地平面を考える．主張 A の証明にある U^+ の式 (1) から，カー細片 K^* において，地平面 $r=r_+$ は $U^+=0$ で与えられることが分かる．他の象限においても同様であり，結局，(U^+, V^+) の像は $R^2-(0,0)$ となる.

U^+, V^+ を固定したとき，S^2 の極でない点全体が像になっていることはすぐに分かる．つまり，座標系 η^+ は，$\mathcal{D}_0(r_+)$−(軸) を，交叉球 $(0,0)\times S^2$ を**除いた** $R^2\times(S^2-(極)) = (R^2\times S^2)$−(軸) の上へ，微分同相に移しているのである.

4 つのカー細片ごとに η^+ を拡張する．このやり方で不都合はない．なぜなら，各細片はボイヤー－リンキスト・ブロック上で交わり，そこにおける η^+ の値は，軸を除いた値として一意に決まるからである.

先ず，カー細片 K^* について調べる．図 3.13 のように，K^* の領域 $r>r_-$ の $\mathcal{D}(r_+)$ への標準埋め込みを i^* と置く．前と同様に，S^2 の極軸に関する回転を R_α とする．η^+ を軸まで拡張したものは，点 $i^*(r,t^*,y)$ を $\big(U^+, V^+, R_{\alpha(r,t^*)}(y)\big)$ へ移している．ここに,

$$\alpha(r,t^*) = -\frac{a}{{r_+}^2+a^2}\,t^* - \Big(A(r) - \frac{a}{{r_+}^2+a^2}\,T(r)\Big)$$

である．この解析写像は η^+ の拡張になっている．実際，$y\in S^2$ が極でなければ，回転で，余緯度 ϑ は不変で経度 φ^* は，上式 (4) の φ^+ で与えられる $\alpha(r,t^*)$ だけ増加する.

他のカー細片についても同様な方法で拡張することができる．明らかに，拡張全体の像は $(R^2-(0,0))\times S^2$ である．以上で命題 3.4.7 が示された．□

注意 3.4.8　各ボイヤー－リンキスト・ブロックは，$(t^*, {}^*t)$ により，平面 R^2 全体へ移される．つまり，方程式

$$a = t^* = t + T(r), \qquad b = {}^*t = t - T(r)$$

は，つねに，t と r について解くことができるのである．ただし，r は，$R-\{r_-, r_+\}$ の 3 つの区間で考えることにする．2 つの方程式を加えれば $t=(a+b)/2$ となる．差をとれば $a-b=2T(r)$ となる．しかるに，補題 3.4.2 の式から，$T(r)$ は，$R-\{r_-, r_+\}$ の各区間を R の上へ移すことが分かる．‖

以上により，座標を拡張することで(1.4 節), **総クルスカル領域** (full Kruskal domain) $\mathcal{D}(r_+) \approx R^2 \times S^2$ を得ることができた．ここでは，交叉球 $(0,0)\times S^2$ は $U^+ = V^+ = 0$ で与えられる．r_- の場合も同様にすればよい．ただし今度は，ブロック Ⅲ にリング状特異領域 $r=0$, $\vartheta = \pi/2$ があるので，これの KBL 像を Σ' として，$\mathcal{D}(r_-)$ は $R^2 \times S^2 - \Sigma'$ と微分同相となる．

ここまで来ると，関数 r は，座標関数ではなくなっている．しかし，重要な意味を持っていることには変わりない．関数 $r - r_\pm$ と $U^\pm V^\pm$ との間に密接な関係があるのである．

補題 3.4.9

(1) 半径の関数 r は，解析関数として，$\mathcal{D}(r_\pm)$ 上で矛盾なく定義できる．

(2) $\mathcal{D}(r_\pm)$ 上において，ゼロではない r の解析関数

$$G_\pm(r) = \frac{r - r_\pm}{U^\pm V^\pm}$$

が定義できる．

証明　図 3.11 の各象限における $U^\pm$ と $V^\pm$ の定義から

$$\mathrm{I} \cup \mathrm{I}' \subset \mathcal{D}(r_+) \text{ において:} \qquad U^+V^+ > 0, \quad r - r_+ > 0$$
$$\mathrm{I\!I\!I} \cup \mathrm{I\!I\!I}' \subset \mathcal{D}(r_-) \text{ において:} \qquad U^-V^- > 0 \quad r - r_- < 0$$

となる．つまり，各ボイヤー－リンキスト・ブロックにおいて，$\mathrm{sgn}\, U^\pm V^\pm = \pm\mathrm{sgn}\,(r - r_\pm)$ である．

よって，定義 3.4.5 から

$$\begin{aligned} U^\pm V^\pm &= \pm\mathrm{sgn}(r - r_\pm)\exp[\kappa_\pm(t^* -^* t)] \\ &= \pm\mathrm{sgn}(r - r_\pm)\exp[2\kappa_\pm T(r)] \end{aligned}$$

となる．これに系 3.4.4 を使うと

$$
\begin{aligned}
&U^{\pm}V^{\pm}\\
&\quad = \pm\operatorname{sgn}(r-r_{\pm})\exp[2\kappa_{\pm}r + (\kappa_{\pm}/\kappa_{+})\ln|r-r_{+}| + (\kappa_{\pm}/\kappa_{-})\ln|r-r_{-}|]\\
&\quad = \pm\operatorname{sgn}(r-r_{\pm})\exp(2\kappa_{\pm}r)|r-r_{+}|^{\kappa_{\pm}/\kappa_{+}}|r-r_{-}|^{\kappa_{\pm}/\kappa_{-}}
\end{aligned}
$$

となる．2つの場合を別々に書くと

$$
\begin{aligned}
U^{+}V^{+} &= \operatorname{sgn}(r-r_{+})\exp(2\kappa_{+}r)|r-r_{+}|\,|r-r_{-}|^{\kappa_{+}/\kappa_{-}}\\
&= (r-r_{+})\exp(2\kappa_{+}r)|r-r_{-}|^{\kappa_{+}/\kappa_{-}}\\
U^{-}V^{-} &= -\operatorname{sgn}(r-r_{-})\exp(2\kappa_{-}r)|r-r_{+}|^{\kappa_{-}/\kappa_{+}}|r-r_{-}|\\
&= -(r-r_{-})\exp(2\kappa_{-}r)|r-r_{+}|^{\kappa_{-}/\kappa_{+}}
\end{aligned}
$$

である．これを使い，(1), (2) を証明する．

(1) r_{+} の場合を考える．上記の最初の式から，

$$U^{+}V^{+} = F(r) = (r-r_{+})f(r)$$

と書ける．よって

$$dF/dr = f(r) + (r-r_{+})df/dr$$

である．つまり，$r=r_{+}$ において $dF/dr = f(r_{+})$ であり，これはゼロにならない．したがって，r_{+} の近くの r において，$r = F^{-1}(U^{+}V^{+})$ は矛盾なく定義できて，解析的である．r が，交叉球を除いて，矛盾なく定義され解析的であることが分かっているので，これで (1) が証明できた．(実際，F^{-1} は大域的に存在する.)

(2) 上記の $U^{+}V^{+}$ と $U^{-}V^{-}$ の式から，

$$p = -\kappa_{\pm}/\kappa_{\mp} = r_{\mp}/r_{\pm}$$

として，

$$G_{\pm}(r) = \pm\exp(-2\kappa_{\pm}r)|r-r_{\mp}|^{p}$$

が求めるものであることが分かる．□

$\mathcal{D}(r_{\pm})$ の地平面は，予想通りのものになっている．つまり，2つの超曲面 $U^{\pm}=0$ と $V^{\pm}=0$ が長い地平面であり，その各々は，交叉球で交わる短い地平面の組で構成されているのである．

最後に，KBL 座標への拡張により，組になった (非完備の) 静止光子をつなげて，(完備な) 座標曲線が作られていることを確認する．r_+ の場合，補題 3.3.1 の前で述べたことから，4 つの標準的な主要零的曲線について考えればよい．

補題 3.4.10 $\mathcal{D}(r_+)$ の長い地平面 $U^+ = 0$ にある 2 つの標準的な主要零的曲線は，交叉球まで拡張され，KBL 座標の座標曲線

$$U^+ = 0, \quad V^+ = s, \ (s \in R), \quad \vartheta = (\text{定数}), \quad \varphi^+ = \text{定数}$$

となる．

証明 先ず，$K^* \subset \mathcal{D}(r_+)$ の地平面 $H_+ \colon r = r_+$ について示す．H_+ は，KBL 座標で表すと，$U^+ = 0, V^+ > 0$ となっている．H_+ の標準的な主要零的曲線 γ は，補題 3.3.1 の (1) の場合である．この補題の測地線のパラメータを KBL 座標の定義に代入すると，ϑ は変わらない．V^+ については，

$$k_+ = (r_+ - r_-)/2 = (r^2 + a^2)\kappa_+$$

なので

$$V^+ = \exp(\kappa_+ t^*) = \exp[\kappa_+ ({r_+}^2 + a^2){k_+}^{-1} \ln s] = \exp \ln s = s$$

と，簡単になる．しかるに，

$$\varphi^+ = {}^*\varphi - \frac{a}{{r_+}^2 + a^2}\, {}^*t - \left(A(r) - \frac{a}{{r_+}^2 + a^2}\, T(r)\right)$$

であった．φ^+ の定義から，最初の 2 項は消える (実際，$\varphi^* = af(s)$ と $t^* = ({r_+}^2 + a^2)f(s)$ を代入すればよい). 残りの項は，$r > r_-$ で解析的である．よって $r = r_+$ とすれば定数となる．

これは $s > 0$ で定義されているので，H_+ の零的測地線 γ は過去完備ではない．しかし，$s \to 0$ とすると，交叉球 $U^+ = V^+ = 0$ 内で $\varphi^+ = \varphi^+(0), \vartheta = \vartheta_0$ なる点 $\gamma(0)$ へ収束する．この点は，補題 3.3.1 の (2) の場合，つまり上記と同じ KBL 座標で定義域が $s < 0$ の測地線の収束点でもある．よって，γ は，長い地平面 $U^+ = 0$ の座標関数になっている．□

3.5　最大遅速カー時空

前の節で，クルスカル領域 $\mathcal{D}_0(r_+)$ を交叉球まで拡張し，解析的多様体 $\mathcal{D}(r_+) \approx R^2 \times S^2$ を作った．r_- の場合も，リング状特異領域を除けば，全て同様である．この節では，$\mathcal{D}_0(r_\pm)$ の計量テンソルを交叉球まで拡張し，$\mathcal{D}(r_\pm)$ をカー時空にする．それらを，図 3.10 のようにつなげれば，それが探し求めた遅速カー時空なのである．

順序としては，カー線素 ds^2 を KBL 座標 $U^\pm, V^\pm, \vartheta, \varphi^\pm$ で表し，それが，$\mathcal{D}(r_\pm)$ 全体まで解析的に拡張できることを示す．そして，拡張したものが非退化であることを確認する．先ず，ボイヤー－リンキスト座標による線素の式を変換し，新しい式を作る．

$T(r)$ は，$U^\pm, V^\pm$ の関数として明示できる (半径の関数 r は，これでは明示できない).

命題 3.5.1　ボイヤー－リンキスト座標と $\mathcal{D}(r_\pm)$ の KBL 座標の間には次の関係がある．関数 ϑ は不変である．それ以外は

$$|U^\pm| = \exp\bigl(\kappa_\pm(T(r)-t)\bigr), \qquad |V^\pm| = \exp\bigl(\kappa_\pm(T(r)+t)\bigr)$$
$$\varphi^\pm = \varphi - at/(r_\pm^2 + a^2)$$

となる．あるいは逆に書いて

$$T(r) = \frac{1}{2\kappa_\pm}\ln|U^\pm V^\pm|, \qquad t = \frac{1}{2\kappa_\pm}\ln|V^\pm/U^\pm|$$
$$\varphi = \varphi^\pm + \frac{a}{{r_+}^2 + a^2}\,t = \varphi^\pm + \frac{a}{r_\pm - r_\mp}\ln|V^\pm/U^\pm|$$

である．

証明　$t^*, {}^*t, \varphi^*, {}^*\varphi$ をボイヤー－リンキストの形で表したものを定義 3.4.5 の式に代入すれば $U^\pm, V^\pm$ が出る．定義 3.4.6 に代入すれば $\varphi^\pm$ が出る．逆の式は，対数をとれば $T(r)$ と t が得られる．この t を代入して φ が出る．□

KBL 線素を求める目的は，カー計量を交叉球 まで拡張することである．よって，その計算の目標は，$\mathcal{D}(r_\pm)$ 上でゼロとなる $r - r_\pm$ 等の項をいかにして分母から除くか，ということになる．そのために，補題 3.4.9 で用意した関数 $G_\pm(r)$ を使う．

系 3.5.2 ボイヤー－リンキスト座標 の微分を KBL 座標で表すと

$$
\begin{aligned}
dr &= \frac{(r-r_\pm)G_\pm}{2\kappa_\pm(r^2+a^2)}\,(U^\pm dV^\pm + V^\pm dU^\pm),\\
dt &= \frac{G_\pm}{2\kappa_\pm(r-r_\pm)}\,(U^\pm dV^\pm - V^\pm dU^\pm),\\
d\varphi &= d\varphi^\pm + \frac{aG_\pm}{(r-r_\pm)(r_\pm - r_\mp)}\,(U^\pm dV^\pm - V^\pm dU^\pm),\\
d\vartheta &= d\vartheta
\end{aligned}
$$

となる．

証明 $\ln|f|$ の微分は df/f であるから，補題 3.4.9 の関数 $G_\pm$ を使うと，t と φ の微分の式が出る．dr については，

$$dT = (dT/dr)dr = \Delta^{-1}(r^2+a^2)\,dr$$

であるから，$dr = \Delta(r^2+a^2)^{-1}dT$ となる．また，補題 3.5.1 から

$$dt = \frac{1}{2\kappa_\pm U^\pm V^\pm}\,d(U^\pm V^\pm) = \frac{G_\pm}{2\kappa_\pm(r-r_\pm)}\,(U^\pm dV^\pm + V^\pm dU^\pm)$$

を得る．□

これらから KBL 線素を求める．$r_\pm$ のどちらでも同様なので，r_+ の場合を計算する．先ず系 2.6.3 のボイヤー－リンキスト線素の変形から始める．つまり ds^2 が

$$\underset{(0)}{-\rho^{-2}\Delta[dt - aS^2d\varphi]^2}\ \underset{(1)}{+\Delta^{-1}\rho^2dr^2}\ \underset{(2)}{+\rho^2d\vartheta^2}\ \underset{(3)}{+\rho^{-2}S^2\big[(r^2+a^2)d\varphi - a\,dt\big]^2}$$

と表されているのである．先ず，(2) の項は問題ない．残りの部分を KBL 座標に変換するため，大括弧の 2 乗の部分を計算する．上の系から，${\rho_+}^2 = {r_+}^2 + a^2C^2$ として

$$
\begin{aligned}
(r^2+a^2)\,d\varphi - a\,dt &= (r^2+a^2)\,d\varphi^+ + \frac{a(r+r_+)G_+}{r_+ - r_-}\,(U^+dV^+ - V^+U^+),\\
dt - aS^2d\varphi &= \frac{{\rho_+}^2G_+}{(r-r_+)(r_+-r_-)}\,(U^+dV^+ - V^+dU^+) - aS^2d\varphi^+
\end{aligned}
$$

である．最初の式は $\mathcal{D}(r_+)$ へ拡張できる．これを (3) の項に戻せば，この項が $\mathcal{D}(r_+)$ 全体まで解析的に拡張できることが分かる．

(1) の項については，系 3.5.2 の dr を 2 乗して，

$$\frac{\rho^2(r-r_-){G_+}^2}{4{\kappa_+}^2(r^2+a^2)^2(r-r_+)}\,(U^+dV^++V^+dU^+)^2$$

を作る．まだ分母に $r-r_+$ が残っている．(0) の項については，上で用意した式を代入して

$$-\frac{1}{\rho^2}\left[\frac{(r-r_-){\rho_+}^4{G_+}^2}{(r-r_+)(r_+-r_-)^2}\,(U^+dV^+-V^+dU^+)^2\right.$$
$$\left.-\frac{2(r-r_-){\rho_+}^2G_+aS^2}{r_+-r_-}\,(U^+dV^+-V^+dU^+)\,d\varphi^++\Delta a^2S^2d\varphi^{+2}\right]$$

となる．この式の最後の 2 項は，明らかに拡張できるので，計算の最後で ds^2 にまとめればよい．残りの項と (1) の項の和を作ると

$$-\frac{(r-r_-){\rho_+}^4{G_+}^2}{\rho^2(r-r_+)(r_+-r_-)^2}\,(U^+dV^+-V^+dU^+)^2$$
$$+\frac{(r-r_-)\rho^2{G_+}^2}{4{\kappa_+}^2(r^2+a^2)^2(r-r_+)}\,(U^+dV^++V^+dU^+)^2$$

である．この式を簡単にするため，$(r_+-r_-)^2$ を $4{\kappa_+}^2({r_+}^2+a^2)^2$ に置き換え，第 2 項の ρ の個数を調整して，共通項を前に出すと

$$\frac{{G_+}^2(r-r_-)}{4{\kappa_+}^2\rho^2(r-r_+)}\left[\frac{\rho^4}{(r^2+a^2)^2}\,(U^+dV^++V^+dU^+)^2\right.$$
$$\left.-\frac{{\rho_+}^4}{({r_+}^2+a^2)^2}\,(U^+dV^+-V^+dU^+)^2\right]$$

となる．さて，この分母にある $r-r_+$ を消すためには，($r=r_+$ でゼロとなる) U^+ と V^+ の計算が必要となる．dU^+ と V^+ を 2 乗し，簡単のために

$$A=(dU^+dV^+\text{の成分})$$
$$B=(V^{+2}dU^{+2}+U^{+2}dV^{+2}\text{の成分})$$

と置くと，A は

$$A=\frac{{G_+}^2(r-r_-)}{4{\kappa_+}^2\rho^2(r-r_+)}2U^+V^+\left[\frac{\rho^4}{(r^2+a^2)^2}+\frac{{\rho_+}^4}{({r_+}^2+a^2)^2}\right]$$

である．ここに $U^+V^+/(r-r_+)=1/G_+$ であるから，この式は

$$A=\frac{G_+(r-r_-)}{2{\kappa_+}^2\rho^2}\left[\frac{\rho^4}{(r^2+a^2)^2}+\frac{{\rho_+}^4}{({r_+}^2+a^2)^2}\right]$$

となる．B の方は

$$B=\frac{{G_+}^2a^2S^2}{4{\kappa_+}^2\rho^2}\,\frac{(r-r_-)(r+r_+)}{(r^2+a^2)({r_+}^2+a^2)}\left[\frac{\rho^2}{r^2+a^2}+\frac{{\rho_+}^2}{{r_+}^2+a^2}\right]$$

となる．

以上で各項の計算が出来たので，元の式にまとめればよい．すなわち，$\mathcal{D}(r_+)$ のボイヤー－リンキスト・ブロックにおいて，カー線素 ds^2 を KBL 座標で記述すると

$$\begin{aligned}
&\frac{{G_+}^2a^2S^2}{4{\kappa_+}^2\rho^2}\,\frac{(r-r_-)(r+r_+)}{(r^2+a^2)({r_+}^2+a^2)}\left[\frac{\rho^2}{r^2+a^2}+\frac{{\rho_+}^2}{{r_+}^2+a^2}\right](U^{+2}dV^{+2}+V^{+2}dU^{+2})\\
&\quad+\frac{G_+(r-r_-)}{2{\kappa_+}^2\rho^2}\left[\frac{\rho^4}{(r^2+a^2)^2}+\frac{{\rho_+}^4}{({r_+}^2+a^2)^2}\right]dU^+dV^++\rho^2d\vartheta^2\\
&\quad-\frac{aS^2}{\rho^2}\left[\Delta aS^2d\varphi^++\frac{G_+(r-r_-)}{\kappa_+}\frac{{\rho_+}^2}{{r_+}^2+a^2}\,(U^+dV^+-V^+dU^+)\right]d\varphi^+\\
&\quad+\frac{S^2}{\rho^2}\left[(r^2+a^2)d\varphi^+-\frac{aG_+}{2\kappa_+}\frac{r+r_+}{{r_+}^2+a^2}\,(U^+dV^+-V^+dU^+)\right]^2
\end{aligned}$$

となるのである．$\mathcal{D}(r_-)$ の場合は，上式において，上付と下付にあるプラスをマイナスに変えればよい．

上式の最後の 2 項を計算する．この 2 項の中で，$(U^+dV^+-V^+dU^+)\,d\varphi^+$ の係数をまとめると

$$-\frac{G_+a^2S^2}{\kappa_+\rho^2({r_+}^2+a^2)}\left[{\rho_+}^2(r-r_-)+(r^2+a^2)(r+r_+)\right]$$

となる．$(U^+dV^+-V^+dU^+)^2$ の係数は

$$\frac{{G_+}^2a^2S^2}{4{\kappa_+}^2\rho^2}\,\frac{(r+r_+)^2}{({r_+}^2+a^2)}$$

である．残りは

$$\frac{S^2}{\rho^2}\left[-a^2S^2\Delta+(r^2+a^2)^2\right]d\varphi^{+2}$$

である．この式に $\Delta = r^2 - 2\mathrm{M}r + a^2$ を代入して，大括弧の中は，ボイヤー－リンキスト計量の成分 $g_{\varphi\varphi}$ に一致することが分かる．以上の計算をまとめると，次の結果を得る．

命題 3.5.3　$\mathcal{D}(r_+)$ におけるボイヤー－リンキスト・ブロックのカー線素 ds^2 を KBL 座標で表すと

$$\frac{{G_+}^2a^2S^2}{4{\kappa_+}^2\rho^2}\,\frac{(r-r_-)(r+r_+)}{(r^2+a^2)({r_+}^2+a^2)}\left[\frac{\rho^2}{r^2+a^2}+\frac{{\rho_+}^2}{{r_+}^2+a^2}\right](U^{+2}dV^{+2}+V^{+2}dU^{+2})$$
$$+\frac{G_+(r-r_-)}{2{\kappa_+}^2\rho^2}\left[\frac{\rho^4}{(r^2+a^2)^2}+\frac{{\rho_+}^4}{({r_+}^2+a^2)}\right]dU^+dV^+$$
$$+\frac{{G_+}^2a^2S^2}{4{\kappa_+}^2\rho^2}\,\frac{(r+r_+)^2}{({r_+}^2+a^2)}(U^+dV^+-V^+dU^+)^2$$
$$-\frac{G_+aS^2}{\kappa_+\rho^2({r_+}^2+a^2)}\left[{\rho_+}^2(r-r_-)+(r^2+a^2)(r+r_+)\right](U^+dV^+-V^+dU^+)\,d\varphi^{+2}$$
$$+\rho^2d\varphi^2+g_{\varphi\varphi}d\varphi^{+2}.$$

となる．$\mathcal{D}(r_-)$ の場合は，上式において，上付と下付にあるプラスをマイナスに変えた式になる．

この式は，ちょっと見た限りではかなり複雑な形の式という印象を受ける．しかし，複雑なのは式の係数である．(座標の微分で作られた) ds^2 **の式の形**としては，納得のいくものになっている．

系 3.5.4　$\mathcal{D}(r_\pm)$ のボイヤー－リンキスト・ブロック上におけるカー計量は，$\mathcal{D}(r_\pm)$ 全体まで，解析的に唯一に拡張できる．

証明　KBL 線素の形から，$\mathcal{D}(r_+)$−(軸) まで拡張できることはすぐに分かる．そして，前と同様に補題 2.2.2 から，ds^2 は軸まで拡張できる．

後は，$\mathcal{D}(r_+)$ の各部分で，拡張した式が非退化であることを示せばよい．ブロックは稠密であるから，そこにおける ds^2 は，$\mathcal{D}_0(r_+)$ の (非退化) カー計量と一致している．この結果には軸を含めてよい．交叉球における ds^2 を調べる．命題 3.5.5 で $U^+=0$, $V^+=0$ (そして $r=r_+$) と置くと，

$$ds^2|_0=\frac{G_+{\rho_+}^2(r_+-r_-)}{{\kappa_+}^2({r_+}^2+a^2)^2}\,dU^+dV^+ + {\rho_+}^2d\vartheta^2+g_{\varphi\varphi}d\varphi^{+2}$$

となる．ここで，$g_{\varphi\varphi}$ も，$U^+ = V^+ = 0$, つまり $r = r_+$ における値とする．この式から，非退化であることが分かる．ただし極を除くのであるが，ここには補題 2.2.2 を再度用いればよい．□

上式において $dU^+ = 0, dV^+ = 0$ とすると，交叉球 $\boldsymbol{S}(r_+)$ の，M_s の部分多様体としての計量が得られる．特に，$\boldsymbol{S}(r_+)$ はリーマン多様体になる．さらに，これは，2 つの (全測地的部分多様体である) 長い地平面の共通部分であるから，全測地的部分多様体である．交叉球は，カー幾何学における最も特徴的な図形の一つである．これは，遅速カー・ブラックホールの際立った位置にあるにもかかわらず，簡単に発見することができなかった．なぜかといえば，ブロック I の離れた位置から検討を始めたからである．

$\mathcal{D}(r_+)$ の計量を M_s 全体に拡張する前に，シュワルツシルド時空の場合を確認しておく．

注意 3.5.5(シュワルツシルド時空の場合)　これまでの計算で，$a = 0$ とすれば，シュワルツシルド時空のクルスカル最大拡張が得られる．カー計量では，r の値を，$r > 0$ から実数全体へ拡張したが，シュワルツシルド時空では，曲率が $k = 48\mathrm{M}^2/r^6$(2.7 節) なので，$r = 0$ は曲率の特異点となっている．よって，クルスカル領域 $\mathcal{D}(r_+)$ のみを検討する．ここで，$a \to 0$ とすると，図 3.14 のように $r_- \to 0, r_+ \to 2\mathrm{M}$ となる．‖

$\mathcal{D}$ における計量を求めるため，命題 3.5.3 の式で $a = 0$ とすると，多くの項がゼロで消え，結局

$$d\sigma^2 = ds^2|_{a=0} = FdU^+dV^+ + r^2d\vartheta^2 + g_{\varphi\varphi}d(\varphi+)^2$$

の形になる．$a = 0$ とすると，F で表した大括弧の部分は 2 となり，注意 3.4.1 から，$\kappa_+ = 1/(4\mathrm{M}), \kappa_+/\kappa_- = -r_-/r_+ = 0$ となる．よって $F = 16\mathrm{M}^2G_+/r$ である．また，補題 3.4.9 とその証明中の式から

$$G_+ = (r - 2\mathrm{M})/(U^+V^+) = \exp(-r/2\mathrm{M})$$

である．したがって，

$$F = 16\mathrm{M}^2 \exp(-r/2\mathrm{M})/r$$

となる．$a = 0$ では，$g_{\varphi\varphi} = r^2S^2$ であり，命題 3.5.1 から，$\varphi^+ = \varphi$ となる．ここで $u = U^+, v = V^+$ とおけば，クルスカル計量の式

$$d\sigma^2 = 16\mathrm{M}^2 \exp(-r/2\mathrm{M})/r\, du\, dv + r^2(d\vartheta^2 + S^2d\varphi^2)$$

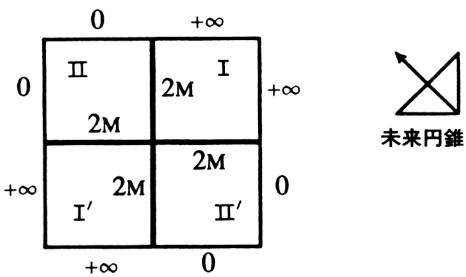


図 3.14　シュワルツシルド時空のクルスカル最大拡張．2 つの長い地平面 $r=2M$ が交わって交叉球が 1 つ作られる．外側の I から落下する粒子は，地平面を通り，特異点 $r=0$ で破壊する．ブロック II' は，I の過去になっている．

となる (Hawking and Ellis 1973).

最大時空 M_s の構成に話を戻す．象限の番号を付けかえれば (そして，ブロック III にリング状特異領域が存在することを除けば), $\mathcal{D}(r_-)$ の場合も，$\mathcal{D}(r_+)$ の場合と同様である．そして，図 3.10 のように，時空 $\mathcal{D}(r_\pm)$ をつなげれば M_s となる．極大時空の場合と同様に，次のように，はり合わせればよい．

時空 $\mathcal{D}(r_+)$ のコピー $\mathcal{D}(r_+)_i, (-\infty < i < +\infty)$ を集めたものを M_+ とする．M_- も同様とする．$M_\pm$ におけるボイヤー・リンキスト・ブロック II と II' を合わせたものを $\mathcal{U}_\pm$ とする．各 i に関し，M_+ のブロック II_i から M_- のブロック II_i への標準等長写像 μ_i が存在する (つまり，ボイヤー－リンキスト座標による恒等写像である). 同様に，M_+ の II_i' から M_- の $\mathrm{II}_{(i-1)}'$ への標準等長写像 μ_i' が存在する．これらから，等長写像 $\mu{:}\,\mathcal{U}_+ \to \mathcal{U}_-$ が作られる．この μ をはり合わせ写像として M_+ と M_- をはり合わせれば，最大遅速カー時空 $M_s = M_+ \cup_\mu M_-$ となるのである (図 3.15).

明らかに M_s は時空である．これがカー時空であることを示すため，次を用意する．

補題 3.5.6　$\mathcal{D}(r_+)$ 上の KBL 座標ベクトル場でボイヤー－リンキスト座標ベクトル場を表すと，

$$\partial_t = \kappa_+\left[-U^+\partial_{U^+} + V^+\partial_{V^+}\right] - \frac{a}{{r_+}^2 + a^2}\,\partial_{\varphi^+},$$

$$\partial_r = \kappa_+\frac{r^2+a^2}{\Delta}\left[U^+\partial_{U^+} + V^+\partial_{V^+}\right],$$

$$\partial_\vartheta = \partial_\vartheta,$$

$$\partial_\varphi = \partial_{\varphi^+}$$

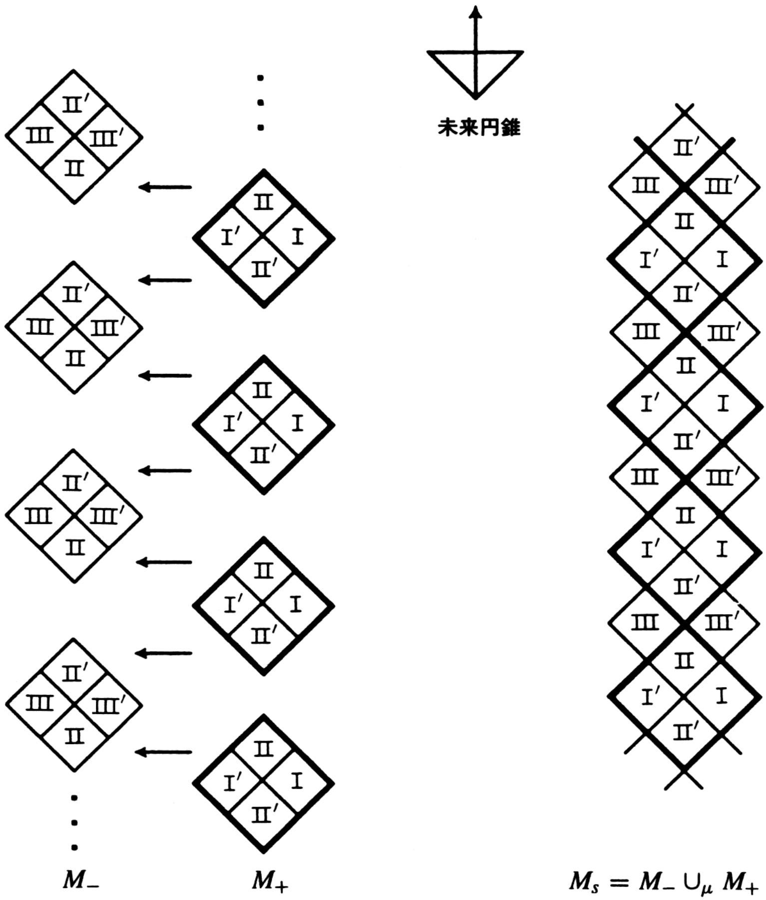


図 3.15　$M_+ = \cup\{\mathcal{D}(r_+)_i\}$ と $M_- = \cup\{\mathcal{D}(r_-)_i\}$ をはり合わせて最大遅速カー時空 M_s が作られる．はり合わせ写像 μ は，自然な等長写像 μ: Ⅱ → Ⅱ のコピーである．

(軸以外で) となる．軸では，$\partial_{\varphi^+} = 0$ とする．

証明　基本定理 (1.1 節) より，例えば，∂_t の係数は，$\partial U^+/\partial t, \partial V^+/\partial t, \partial\vartheta/\partial t, \partial\varphi^+/\partial t$ である．定義 3.4.5 を使って，これらは，それぞれ，$U^+(-\kappa_+), V^+(\kappa_+), 0, -a/(r^2+a^2)$ となる．他についても同様．□

系 3.5.7　M_s はカー時空である．

証明　M_e の証明の場合と同様にして，定義 2.3.1 の各項目は，簡単にチェックすることができる．標準的に埋め込まれたボイヤー・リンキスト・ブロックは稠密である．ボイヤー・リンキスト・ブロックにおいて，はり合わせ写像 μ は恒等写像であるから，r と ϑ は不変であり，μ は，赤道等長変換 ϵ と可換である．よって，r, ϑ, ϵ は，M_s で大域的に定義される．また，$d\mu$ も ∂_φ と ∂_t を保存するので，$\partial_{\varphi+}$ は ∂_φ の拡張である．上記の補題内の式より，∂_t は，軸も含めた $\mathcal{D}(r_+)$ へ，$\tilde{\partial}_t$ と拡張されることが分かる．連続性より，$\tilde{\partial}_t$ もキリング・ベクトル場である．□

M_s を簡単に定義するためには領域 $\mathcal{D}(r_\pm)$ が便利であったが，M_s のカー細片が重要であることに変わりはない．図 3.10 から分かるように，ボイヤー・リンキスト・ブロックは 2 つのカー細片 (K^* と $^*K$) で構成され，長い地平面は 1 つのカー細片 (K^* か $^*K$) で構成されている．交叉球だけがカー細片ではない．

キリング・ベクトル場 $\tilde{\partial}_t$ は，M_f と M_e のどちらでも，ゼロになることはない．しかし，補題 3.5.6 の ∂_t の式から分かるように，M_s では，交叉球の極でゼロとなる．したがって，M_s から t 軸を除くことはできないのである．

注意 3.5.8　ベクトル場 $\tilde{\partial}_\varphi$ と $\tilde{\partial}_t$ は完備である．つまり，これらの積分曲線は，実数全体で定義されている．このことは，$\tilde{\partial}_\varphi$ については明らかである．実際，これの積分曲線は周期曲線 (あるいは定数) である．$\tilde{\partial}_t$ については，補題 3.5.6 の式を積分すればよい．軸以外の所では，完備な曲線

$$U^+(s) = U^+_0 e^{-\kappa_+ s},\ V^+(s) = V^+_0 e^{\kappa_+ s}$$
$$\varphi^+(s) = \varphi^+_0 - as/(r^2 + a^2),\ \vartheta(s) = \vartheta_0$$

を得る．ベクトル場 $\tilde{\partial}_t$ は軸に接していて，積分曲線は，上記のように $U^+(s)$ と $V^+(s)$ で得られる．(軸の点 $U^+_0 = V^+_0 = 0$, つまり $S(r_+)$ の極における定曲線に注意.) ‖

交叉球の上の点では，関数 r は座標関数ではない．しかしながら，カー幾何学において重要性なものであることは変わりない．例えば，測地の軌跡 (第 4 章) を調べるのに必要となる．図 3.16 は，r の等位超曲面の概略である．

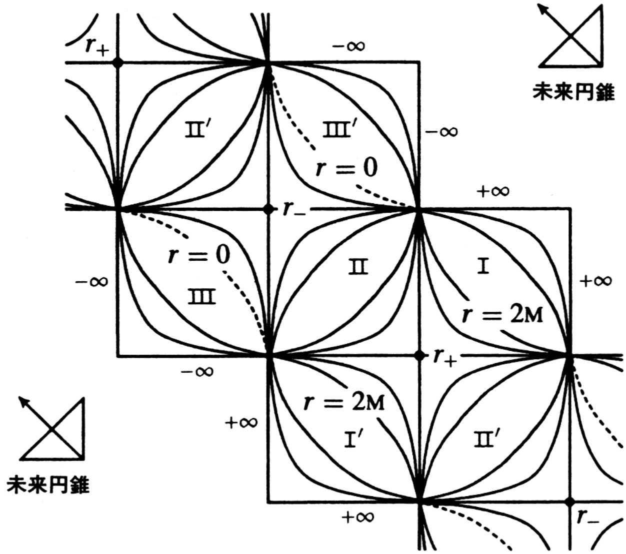


図 3.16 遅速カー時空における，半径の関数 r の等位超曲面．定義から，$r > r_+$ は I に，$r_- < r < r_+$ は II に，$r < r_-$ は III に，それぞれ入っている．ここに，$0 < r_- < r_+ < 2$M．r の危点があるのは，交叉球の上だけである．

3.6 カー時空のバンドル構造

第 2 章におけるカー時空の説明は，暫定的なものであり，最大カー時空 $M = M_f$, M_e, M_s を構成するのに必要なだけの特性を述べたにすぎない．ここでは，実際に最大カー時空 M が得られたので，これら (および，3.9 節で与える，それらの変形) の特徴を調べることにする．これらの大域的特徴を調べるカギとなるのは，先ず〈リング状特異領域を残しておく〉ことにあり，そして，次のように，シンプルで滑らかな多様体 $\widehat{M}$ を作るのである．

カー時空では，軸 A は 2 つの連結成分 A_N と A_S で構成されており，この 2 つは赤道等長変換 ϵ で等長になっている．2 つあるというわずらわしさをなくすため，この等長写像 ϵ で同一視し，**抽象的な軸** (abstract axies) $\mathcal{A}$ が 1 つ存在する，と考えることにする．このとき，$\mathcal{A}$ は，連結な 2 次元ローレンツ多様体である．

例えば，K^* の抽象的な軸は，2.5節の $R^2(r, t^*)$ であり，線素は $ds^2 = g_{tt}dt^{*2} + dr\,dt^*$ である．$\mathcal{A}({}^*K)$ では，プラスをマイナスにすればよい．$\mathcal{D}(r_+)$ の抽象的な軸も R^2 である．これの自然な座標は U^+, V^+ であり，線素は命題3.5.3より出る．

最大カー時空 M の抽象的な軸は，はり合わせで M を構成した方法と同様にして，(M とは独立に) 作ることができる．実際，はり合わせに用いたはり合わせ写像 μ が $C = \cos\vartheta$ を不変にするので，軸も不変となる．そして，μ と赤道等長変換 ϵ は可換なので，2つの軸は同一視される．これにより，μ を軸に制限すれば，抽象的な軸に関するはり合わせ写像 μ となる．もちろん，M_f では，はり合わせの必要はない．これの抽象的な軸はそのまま $\mathcal{A}(K^*) \approx \mathcal{A}({}^*K) \approx R^2$ である．

リング状特異領域をブロックⅢから除外したのは，$r = 0$, $\vartheta = \pi/2$ においてカー計量が定義できないからであった．多様体の構造自体は成り立っているのである．$K^* \subset R^2 \times S^2$ と ${}^*K \subset R^2 \times S^2$ から Σ を除外したので，$R^2 \times S^2$ でも同様となる．そして，M_e と M_s を構成したはり合わせ写像では r と ϑ が不変なので，Σ も不変となる．よって，M を拡大して滑らかな多様体 $\widehat{M} = \widehat{M}_f$, $\widehat{M}_e$, $\widehat{M}_s$ にしても，その中のブロックⅢにリング状特異領域は存在し，そこで計量テンソルが定義されないことになる．$\widehat{M}$ は，M の**滑らかな拡大** (smooth enlargement) と呼ばれる．明らかに，M は $\widehat{M}$ の，稠密な開部分多様体である．

先ず，$\widehat{M}$ が，M の抽象的な軸 $\mathcal{A}(M)$ 上の2次元球バンドルであるとして記述できることを示す．直感的にいえば，このバンドルの射影写像 π は，$p \in M$ に対し，$t = t(p)$ での t 断片における球 $r = r(p)$ が軸と交わる2点を同一視し (図2.2参照)，その点を $\pi(p) \in \mathcal{A}(M)$ として，作られている．バンドルの構造は，一般的には，次のものから構成されている (Steenrod 1951). 本書でもこれらの記号を使用することにする．

1. G は，リー群で，滑らかな多様体 F に，効果的に作用する (1.1節参照).
2. $M = B \times F$ と $M' = B' \times F$ を滑らかな積多様体とする．B と B' への自然な射影を，それぞれ，π, π' とする．

ここで，1.4節で述べたはり合わせの仕組みが必要となる．

命題 3.6.1　上記の記号の下で，(B, B', U, U', m) と $(M, M', U \times F, U' \times F, \mu)$ を，ハウスドルフ条件を満たすはり合わせのデータとする．これらの間には，滑らかな写像 $\gamma\colon U \to G$,

$$\mu(b, y) = (m(b), \gamma(b)y), \qquad b \in U,\ y \in F$$

が存在するとする．このとき，次を満たすファイバー・バンドルが唯一存在する．バ

ンドルの射影は

$$\hat{\pi}: M \cup_\mu M' \to B \cup_m B'$$

であり，群 G は，上記のようにファイバー F に作用し，バンドル座標系は，自然な単射 $j: M \to M \cup_\mu M'$, $j': M' \to M \cup_\mu M'$ である．

証明　射影 $\hat{\pi}$ は，$U \times F$ において $m \circ \pi = \pi' \circ \mu$ であるから，写像の補題 (1.4 節) を使い，π と π' より作られる．いま，$i: B \to B \cup_m B'$ と $i': B' \to B \cup_m B'$ を自然な単射とすると，写像の補題から $\hat{\pi} \circ j = i \circ \pi, \hat{\pi} \circ j' = i' \circ \pi'$ となる．

j と j' は自然な単射であるから，それぞれの像の上への微分同相である．上記の可換性から

$$j: M = B \times F \approx \hat{\pi}^{-1}(i(B)), \quad j': M' = B' \times F \approx \hat{\pi}^{-1}(i'(B')),$$

となり，$\hat{\pi}$ が一意に定まることが分かる．

後は，バンドル座標系の確認である．$ib = i'(m(b))$ であるから，任意の $b \in U$ と $y \in F$ に対して

$$\big((j')^{-1} \circ j\big)(b, y) = (m(b), \gamma(b)y)$$

が成立することを示せばよい．しかるに，はり合わせの一般論より，$U \times F$ において $j = j' \circ \mu$ で，μ の仮定から

$$j(b, y) = j'(\mu(b, y)) = j'(m(b), \gamma(b)y)$$

となる．これに $(j')^{-1}$ を作用させて求める式がでる．□

この結果をカー時空に適用する．ファイバーは 2 次元球 S^2 で，群 G は，S^2 に作用する円群 S^1 で，S^2 の z 軸を軸とする角度 $\alpha \in S^1$ の回転 R_α になっている．例として，M_e を作るときの最初のはり合わせである $K_1 = K^* \cup_\mu^* K$ (図 3.4 参照) を〈拡大〉してみる．上記のように，K^* と $^*K$ の拡大は，R^2 を $\mathcal{A}(K^*)$ と $\mathcal{A}(^*K)$ と考えて，どちらも，$R^2 \times S^2$ となる．補題 3.1.3 から，はり合わせ写像 μ: $\mathrm{III}^* \to {}^*\mathrm{III}$ の座標表現は

$$r = r,\ \vartheta = \vartheta,\ ^*\varphi = \varphi^* - 2A(r),\ ^*t = t^* - 2T(r)$$

となる．回転 R_α を使い，t^* を t と書けば，

$$\mu(r, t, y) = (r, t - 2T(r), R_{-2A(r)}(y)), \quad (r, t) \in R^2,\ y \in S^2$$

となる．μ は滑らかな写像であり (実は解析的である)，軸とリング状特異領域においても定義されている．K^* と $^*K$ の抽象的な軸のはり合わせ写像 m は，μ を $A_N \approx A_S$ へ制限したものであり，$m(r,t) = (r, t - 2T(r))$ で与えられる．これで，μ は命題の条件を満たすので，$\hat{K}_1$ が，$\mathcal{A}(K_1)$ 上の 2 次元球バンドルとして定義されるのである．

K^* と $^*K$ の拡大 $R^2 \times S^2$ において，リング状特異領域は，座標 y が S^2 の赤道 $\vartheta = \pi/2$ 上にあるとして，$(0,t,y)$ なる点の集合になっている．軸に関する回転で赤道は不変なので，μ でもリング状特異領域は不変である．よって，Σ は，$\hat{K}_1$ の 2 次元部分多様体になっている．

3.2 節で述べたように，M_e をジッパーで作ると $M^* \cup_\mu {}^*M$ である．これのはり合わせ写像 μ は，上記の K_1 における μ: Ⅲ* → *Ⅲ と同様な μ: I* → *I の無限個の集まりである．M^* と $^*M$ は積多様体であるから，上記の命題から，M_e は $\mathcal{A}(M_e)$ 上の 2 次元球バンドルとなる．

遅速カー時空についても，K^* と $^*K$ を $\mathcal{D}(r_+)$ と $\mathcal{D}(r_-)$ に置き換えて，同様な操作を行えばよい．図 3.15 で示したような単一のはり合わせで M_s を定義しても，命題 3.6.1 の仮定が満たされるので，同等の結果を得ることができる．

系 3.6.2　遅速カー時空の滑らかな拡大 $\widehat{M}_s$ は，抽象的な軸 $\mathcal{A}(M_s)$ 上の 2 次元球バンドルである．バンドル座標系は，標準埋め込み $j_\pm$: $\mathcal{D}(r_\pm) \to M_s$ で与えられる．バンドルの群は，$S^2 \subset R^3$ の軸回転として作用する円群 S^1 である．

先に述べたカー時空の図式的な説明 (例えば，M_e なら図 3.7, M_s なら図 3.10) が，このバンドル構造により明確になった．M の図式が，M の抽象的な軸 $\mathcal{A}(M)$ による記述となったのである．すなわち，$\mathcal{A}(M)$ の各点の上に 2 次元球が存在する，として時空 M をとらえることになる．もちろん，$\mathcal{A}(M)$ の点 $r = 0$ 上の球から赤道 $\vartheta = \pi/2$ を外して，リング状特異領域は除くものとする．

ここでのゴールは，$\widehat{M}$ が積多様体であることを示すことである．

補題 3.6.3　M_f, M_e, M_s の抽象的な軸は R^2 に微分同相である．

証明　$\mathcal{A} = \mathcal{A}(M_e)$ と置く．先ず K^* と $^*K$ の抽象的な軸は R^2 に微分同相である．M_e を構成する一連の操作の第一歩として，R^2 に微分同相な開集合にそって軸をはり合わせて $\mathcal{A}(K_1)$ を作った (図 3.4 を見よ)．ザイフェルト－ファン・カムペンの定理 (Massey 1987) から，$\mathcal{A}(K_1)$ は単連結である．これを (過去，未来を交互にして) 繰り返せば，$\mathcal{A}(K(n))$ が単連結となることが分かる．ここに $K(n)$ は，未来方向および

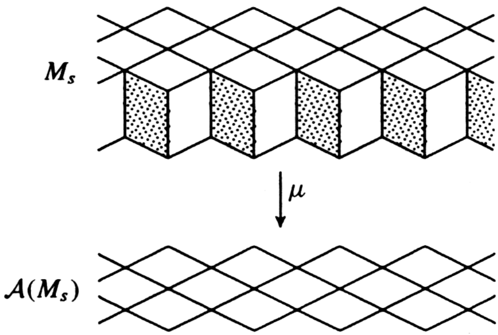


図 3.17　抽象的な軸 $\mathcal{A}(M_s)$ 上のファイバー・バンドルとしての遅速カー時空．ファイバーの 2 次元球は区間として描いてある．

過去方向への n 個のはり合わせである．

$\mathcal{A}(K(n))$, $n \geq 1$ は，$\mathcal{A} = \mathcal{A}(M_e)$ の増大開被覆である．M_e の連続ループはある $\mathcal{A}(K(n))$ 内に存在してゼロにホモトープであるから，$\mathcal{A}$ は単連結である．よってリーマンの写像定理から $\mathcal{A}$ は R^2 か S^2 に微分同相となる．しかるに，$\mathcal{A}$ はコンパクトでないから S^2 ではない．

遅速カー時空の場合には，カー細片をクルスカル領域に変えればよい．□

一般のファイバー・バンドル $\pi: M \to B$ において，底空間 B が可縮ならばバンドルは**自明** (trivial) である，つまりファイバーを保存する微分同相 $M \approx B \times F$ が存在することが知られている (Steenrod 1951 系 11.6)．先の補題により，カー軸 $\mathcal{A} \approx R^2$ は可縮であるから，$\widehat{M}_f$, $\widehat{M}_e$, $\widehat{M}_s$ は，$R^2 \times S^2$ に微分同相となる．この事実から導かれる性質を調べるため，先ず，次の定義をしておく．滑らかな多様体 N において，接バンドルが自明 $TN \approx N \times R^n$ であるとき，いい換えると，N に標構場が大域的に定義できるとき，N は**平行性** (parallelizable) を持つ，と呼ばれる．例えば，R^n は平行性を持つが，偶数次元の球は平行性を持たない．

系 3.6.4　最大カー時空 M_f, M_e, M_s は平行性を持ち，それゆえ向き付け可能である．

証明　この 3 つの多様体をまとめて M と表すことにする．平行性を持つことの結果として向き付け可能であることが出るが，M は，向き付け可能な多様体 $R^2 \times S^2$ の

開部分多様体であるから，**直感的**にも明らかである．(時空の定義に，向き付け可能であることは入っていない.) 時空は，定義から時間的向き付け可能であるから，向き付け可能ならば，空間的向き付け可能にもなる．

平行性を持つことを証明するために，先ず，$(t, v) \to e^t v$ (スカラー積) で与えられる写像 $R^1 \times S^2 \to R^3 - \{0\}$ は微分同相であることに注意する．また，平行性を持つ多様体の開部分多様体は，明らかに，平行性を持っている．いま，⟨S は T の開部分多様体である⟩ ことを ⟨$S < T$⟩ と表すことにすると，

$$M < R^2 \times S^2 = R^1 \times (R^1 \times S^2) \approx R^1 \times (R^3 - 0) < R^4$$

より $M < R^4$ となる．□

次節では，M の部分多様体 $\widehat{M}$ におけるバンドル構造を調べる．

ファイバー球

射影 $\pi: M \to \mathcal{A}(M)$ は不変的に定義できるから，$b \in \mathcal{A}(M) \approx A_N \approx A_S$ に対する**ファイバー球** $\pi^{-1}(b)$ も同様である．M の線素を $\pi^{-1}(b)$ に制限したものは (極を除く),

$$g_{\varphi\varphi} = (r^2 + a^2 + 2\mathrm{M}ra^2S^2/\rho^2)S^2$$

として

$$ds^2 = \rho^2 d\vartheta^2 + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2$$

となっている．極においては，補題 2.2.2 から，$\pi^{-1}(b)$ は空間的である．よって，$g_{\varphi\varphi} > 0$ であるならば，球全体で計量は非退化である．したがって，タイムマシン (2.4 節) から離れた所では，ファイバー球はリーマン曲面であり，$|r|$ を十分大きくとれば，ブラックホールからの距離が一定である図形としての普通の球として描くことができる．

ファイバー球 $\pi^{-1}(b)$ 自体の幾何学では b の r 座標しか関係しないので，R^3 内の普通の球 $S_r = \{x: |x| = r\}$ と区別するため，ファイバー球を $S^2\langle r\rangle$ と書くことにする．S_r の場合とは異なり，$S^2\langle r\rangle$ の幾何学は，回転 $\varphi \to \varphi + c$ を等長写像として，余緯度 ϑ に依存する．(シュワルツシルド時空の場合には，$a = 0$ から $g_{\varphi\varphi} = r^2S^2$ となるので，$S^2\langle r\rangle \approx S_r$ となっている.)

$S^2\langle r\rangle$ の面積は，普通の積分計算 $\iint (g_{\vartheta\vartheta}g_{\varphi\varphi})^{1/2} d\vartheta\, d\varphi$ で与えられる．ガウス曲率は系 1.8.10 で計算できる．一番興味深い場合を調べることにする．それは地平面の空間的な断面である**地平面球** (horizon sphere) $S^2\langle r_\pm\rangle$ である．1 つの地平面に対して，

これらの地平面球は，静止光子の流れによって等長であり，それゆえ，時間の経過に関して相対的に同じ位置を保っている．$S^2\langle r_\pm\rangle$ において，

$$g_{\varphi\varphi} = ({r_\pm}^2 + a^2)^2 S^2/({r_\pm}^2 + a^2C^2)$$

であり

$$g_{\vartheta\vartheta} = {r_\pm}^2 + a^2C^2$$

である．したがって，$(g_{\vartheta\vartheta}g_{\varphi\varphi})^{1/2} = ({r_\pm}^2+a^2)S$ となり，地平面球の面積は $4\pi({r_\pm}^2+a^2)$ となる．これは，普通の球 $S_{r_\pm}$ の面積 $4\pi{r_\pm}^2$ よりも，回転の項だけ大きくなっている．ブラックホールの力学を展開するときには，この面積が重要な役割をすることになるのである (Hawking and Ellis 1973 第 9 章).

$S^2\langle r_\pm\rangle$ の，赤道 $\vartheta = \pi/2$ における円周 $C_\pm$ は回転率に依存しない．よって，地平面では ${r_\pm}^2 + a^2 = 2\mathrm{M}r_\pm$ なので，シュワルツシルド時空の場合

$$C_\pm = 2\pi(g_{\varphi\varphi})^{1/2} = 2\pi({r_\pm}^2 + a^2)/r_\pm = 4\pi\mathrm{M}$$

に一致する．

$S^2\langle r_\pm\rangle$ のガウス曲率 は，自明な値ではなく，

$$K_\pm(\vartheta) = ({r_\pm}^2 + a^2)({r_\pm}^2 - 3a^2C^2)/({r_\pm}^2 + a^2C^2)^3$$

となる．この最大値は赤道であり，$S_{r_\pm}$ の値 $1/{r_\pm}^2$ になっている．ガウス－ボンネの定理から，$S^2\langle r_\pm\rangle$ と $S_{r_\pm}$ の全曲率は，共に，$\iint K\,d_A = 4\pi$ である．つまり，$S^2\langle r_\pm\rangle$ では曲率が小さいが、その分面積が大きいことでバランスをとっているのである．

2.3 節で見たように，咽喉 $r = 0$ の中央球 $S^2\langle 0\rangle$ は，半径 a の平坦な円板で構成されている．よって，$S^2\langle 0\rangle$ の面積は $2\pi a^2$ である．($S^2\langle 0\rangle$ は，平坦なので，ガウス－ボンネの定理から，球全体にはならず，特異点を〈内包〉しているのである.)

遅速カー時空 M_s では，交叉球 $S(r_\pm)$ は地平面球なので，内的な性質はこれで決まる．外的な性質，つまり M_s の幾何学との関連では，2 つの興味ある特徴が存在する．

補題 3.6.5 遅速カー時空 M_s の交叉球 $\boldsymbol{S}(r_\pm)$ に関して次の事項が成立する．

(1) 主要平面 Π に垂直な分布 $\Pi^\perp$ の唯一の積分多様体が $\boldsymbol{S}(r_\pm)$ である．

(2) 全測地的なファイバー球は $\boldsymbol{S}(r_\pm)$ のみである．

証明 (1) $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}(r_\pm)$ について考える．接空間 $T_p(S)$ は，(極を除いて) ∂_ϑ と $\partial_{\varphi+}$ で張られている．系 3.5.4 の証明内の式から，S では，この 2 つのベクトルは ∂_{U+} と∂_{V+}

に垂直であることが分かる．よって，$T_p(S)^\perp$ は，∂_{U^+} と ∂_{V^+} で張られている．しかるに，$\mathcal{D}(r_+)$ の長い地平面内の静止光子は，KBL 座標の U^+ 座標曲線，V^+ 座標曲線である (系 3.4.10 を見よ). 静止光子は主要零的測地線であるから，$\mathrm{Span}\{\partial_{U^+}, \partial_{V^+}\} = \Pi$ であり，よって $T_p(S) = \Pi^\perp$ となる．そして，補題 2.5.7 の後に述べたように，$\Pi^\perp$ は，K^* と $^*K$ 内で積分曲面を持たないのである．

(2) 交叉球は，(全測地的な) 地平面の共通部分であるから，全測地的である．他の地平面球，つまり，K^* か $^*K$ 内にあるものを $S^2\langle r_\pm\rangle$ とする．これが全測地的となる必要条件は，∂_ϑ と ∂_φ に関する共変微分が $S^2\langle r_\pm\rangle$ に接していることである．特に，クリストッフェルの記号 $\Gamma^t_{\vartheta\varphi}$は，$S^2\langle r_\pm\rangle$ 上でゼロでなければならない．1.3 節で述べたクリストッフェルの記号に関する古典的な公式から，ボイヤー－リンキスト座標で $\Gamma^t_{\vartheta\varphi} = 2\mathrm{M}a^3 r\rho^{-4} CS^3$ となる．この式は K^* 座標，$^*K$ 座標でも成立する．なぜなら，これらの座標ベクトル場 $\partial_\vartheta, \partial_\varphi, \partial_t$ は，ボイヤー－リンキスト座標の場合と同一なのである．よって，$S^2\langle r_\pm\rangle$ が全測地的ならば，$r = 0$ である．しかるに，補題 4.15.7 の証明内の簡単な計算から，中央球 $S^2\langle 0\rangle$ は全測地的ではない．□

赤道平面

M_e や M_s の赤道 Eq は，軸と同じように，$K^*, {}^*K, \mathcal{D}(r_\pm)$ などの赤道を M のときと同様にはり合わせて作ることができる．しかし，$\widehat{M}$ のバンドル構造から Eq を導くこともできる．M の各ファイバー球 $S^2\langle b\rangle$ を赤道円に置き換えればよいのである．それで作られた $Eq\hat{}$ は (リング状特異領域を含んだまま), $R^2 \times S^1$ と微分同相になる．今の場合，ファイバーは群 S^1 で，S^1 に作用しているので，$Eq\hat{}$ は，$\widehat{M}$ のバンドルの**同伴主ファイバー・バンドル**なのである．

$Eq = Eq\hat{} - \Sigma$ の連結成分を記述するにはバンドル構造が便利である．リング状特異領域を取り除くことは，抽象的な軸内の点 $r = 0$ 上のファイバーを取り除くことであるから，Eq を非連結にする．図 3.10 の $\mathcal{A}(M_s)$ から分かるように，Σ の $r > 0$ 側は連結であるが，$r < 0$ 側は，無限個の成分に分解され，その各成分は，ボイヤー－リンキスト・ブロック III の $r < 0$ 側の赤道と等長になっている．

極平面

遅速カー時空の幾何学的性質に影響を与えるものとしては，交叉球の構成よりも，極平面の方が大きい．ブロック III や I におけるミンコフスキー時空に近い領域 $|r| \gg 1$ では，極平面 $\varphi = \varphi_0, t = t_0$ は，回転の軸を通る普通のユークリッド平面に近いものであることが期待される．だが，$|r|$ が小さいときにどうなるか，は自明ではない．図 2.2 を見ると，1 つの極平面が 3 つのボイヤー－リンキスト・ブロックと交わり，分か

れた各部分が交わるのが地平面となることが予測される．しかし，K^* と $^*K$ から地平面を構成するとき，このような交わりはできない．極平面は無限大へ発散してしまうのである．M_e についても同じ事がいえる．

しかるに最大遅速カー時空においては，少なくとも交わることは生じる．交叉球で交わるのである．先ず $\mathcal{D}(r_+)$ について調べる．ここでは，極平面のボイヤー－リンキスト方程式

$$\varphi = \varphi_0, \qquad t = t_0$$

は，(命題 3.5.1 を使って)KBL 方程式

$$V^+ = \pm k_0 U^+, \quad \varphi^+ = \varphi^+{}_0, \quad k_0 = \exp(2\kappa_+ t_0) > 0$$

に変換される．正の符号を取ると，最初の式は，ブロック I と I' の極平面 $\varphi = \varphi_0$, $t = t_0$ が交叉球 $U^+ = V^+ = 0$ でつながり，1 つの〈大きな〉極平面 P_{I} を作ることを示している．同様にして，負の符号では，II と II' の極平面 $\varphi = \varphi_0, t = t_0$ がつながることを示している．つまり，別の番号どうしの極平面は交わらない．同じ番号どうしが交わるのである．

大きな極平面は大域的な座標 U^+, ϑ を与る．ここに，ϑ は円座標となっている (1.1 節)．そして，これらの座標が計量を定義するのである．同様にして，$\mathcal{D}(r_-)$ においても，III と III' の極平面が $S\langle r\rangle$ でつながって 1 つの P_{III} を作り，II と II' の組もつながっている．

第 2 章で，I と III の極平面は空間的であり，II の極平面は時間的であることを見た．時間的平面については，拡大はまだ終了していない．$\mathcal{D}(r_+)$ の 2 つの極平面は，$\mathcal{D}(r_-)$ において (滑らかに)1 つに重なり，これらが 1 つの極平面 P_{II} となっている．そしてそれは，M_s の全てのブロック II を通り，全ての交叉球と交わっているのである．

次の節において，極平面 $P_{\mathrm{I}}, P_{\mathrm{II}}, P_{\mathrm{III}}$ は，等長変換の不動点であることを示す．それゆえ，極平面は，M_s の 2 次元閉全測地的部分多様体になっているのである．

$\widehat{M}$ のバンドル構造から見れば，極平面は，M の抽象的な軸内にある曲線 $C \approx R^1$ 上の円バンドルである (図 3.18 を見よ)．したがって，$P = P(\varphi_0, t_0)$ は $R^1 \times S^1$ に微分同相となる．ここに，円 $r \times S^1$ は，全て同じ定数 $\pm\varphi_0$ の緯度の円である．

極平面には，基本的な式が 2 つある．すなわち，注意 2.7.9 によれば，極平面のガウス曲率は

$$K = K(r, \vartheta) = -\mathrm{M}r\rho^{-6}(r^2 - 3a^2C^2)$$

となり，円 $r \times S^1$ の円周は，楕円積分

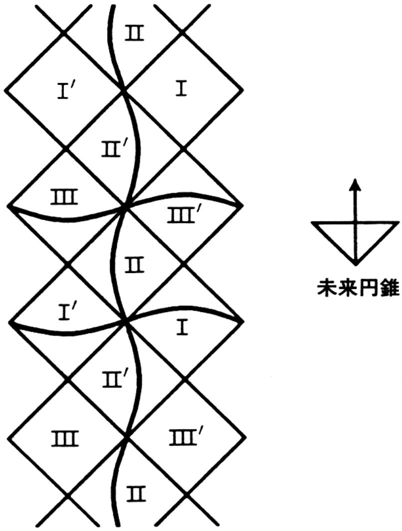


図 3.18　遅速カー時空の軸へ射影した極平面の図．長い時間的平面 $P_{\rm II}$ $は，全てのブロック II と全ての交叉球を通っている．空間的平面の方は，2 つのブロックと 1 つの交叉球，$P_{\rm I}$ のときは $S(r_+)$，$P_{\rm III}$ のときは $S(r_-)$，を通っている．M_s の地平面でない点を通る極平面が存在する．

$$L(r) = \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{\vartheta\vartheta}}\, d\vartheta = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta}\, d\vartheta$$

で与えられる．

3 つの極平面を明確に区別するものは，その因果的特性である．空間的である $P_{\rm I}$ と $P_{\rm III}$ は，ある時間における空間としての曲面を表している．$|r|$ が大きいときには，$K \approx 0$, $L(r) \approx 2\pi r$ であり，$|r|$ と ϑ を普通の極座標としたユークリッド平面に近いものになっている．しかし，$|r|$ が小さくなるほど曲率が無視できなくなる．この場合，$P_{\rm I}$ は，(I と I’ に 1 つずつ含まれる)2 つの〈平行〉な，平面に近い曲面で，$S(r_+)$ を通る首でつながっている．$P_{\rm III}$ も同様である．どちらにも 4 本の測地線が存在し，赤道とは $\vartheta = \pm\pi/2$ で，北軸と南軸とは $\vartheta = 0, \pi$ で，交わっている．$P_{\rm I}$ よりは $P_{\rm III}$ の方が相対論的である．実際，$r = -\infty$ から $S(r_-)$ へ向かい，戻る過程において，$r = 0$

を2回通過し，そこで，赤道測地線はリング状特異領域によって分断されているのである．

時間的極平面 $P_{\mathrm{I\!I}} \approx C \times S^1$ では状況が異なっている．これは，それぞれが経度の円であり，図3.18のように，ブラックホール全体の時間旅行を行っているのである．時間の経過とともに，円 S^1 の半径は，$S\langle r_-\rangle$ における円 S^1 の円周 $L(r_-)$ を最小値，$S\langle r_+\rangle$ における S^1 の円周 $L(r_+)$ を最大値として，振動している．他のものと同様に，$P_{\mathrm{I\!I}}$ にも，軸と赤道と交わる4本の測地線が存在するが，これらは時間的で，その長さ全体で定義されている．

3.7 ボイヤー－リンキスト・ブロックの等長変換

本節の目標は，ボイヤー－リンキスト・ブロックの等長変換の群を決定することにある．これは，カー時空 M_e と M_s の等長変換群を決定するための重要なステップとなるものである．なぜなら，ボイヤー－リンキスト・ブロックを組み合わせて時空を作ったように，時空の等長変換も，ブロックのそれを組み合わせて作られているのである．(もちろん，高速カー時空ではブロックは1つしかない.) また，等長変換やキリング・ベクトル場は，1つの近傍における状況で決定されるので，カー時空の1つのブロックにおける情報が得られれば，大域的な情報が分かることになる．

任意の擬リーマン多様体 M において，等長変換 $M \to M$ の集合はリー群 $I(M)$ をなし，その単位元成分 $I_0(M)$ は正規部分群になっている．$I_0(M)$ は，M の完備なキリング・ベクトル場の流れの写像 ψ_s で s を一定にしたもので作られている (Helgason 1978 を見よ). 商群 $I(M)/I_0(M)$ は，離散群であり，その(左剰余類で構成される)成分は $I(M)$ の連結成分である．$I(M) - I_0(M)$ に含まれる等長変換は，$I(M)$ において，恒等写像に変形することができないから，商群 $I(M)/I_0(M)$ は，M の**大等長変換** (large isometry) の群と呼べるものである．

ここでは，カー時空においては，等長変換群 $I(M)$ は回転のタイプと位相構造によって変化するが $I_0(M)$ は不変であることを調べる．

全てのカー時空には，定義から，ボイヤー－リンキスト座標ベクトル場の ∂_φ と ∂_t の拡張であるキリング・ベクトル場 $\tilde{\partial}_\varphi$ と $\tilde{\partial}_t$ が存在する．前に述べたように，最大カー時空 M では，ベクトル場 $\tilde{\partial}_\varphi$ と $\tilde{\partial}_t$ は完備である．よって，その流れの等長変換は大域的に定義できる．この写像は，$\tilde{\partial}_t$ で生成される t **変換** τ_c と，$\tilde{\partial}_\varphi$ で生成される φ **回転** ρ_α で構成されている．(ボイヤー－リンキスト座標とカー座標では，τ_c は，t 座標に c を加えることであり，ρ_α は，円座標である φ 座標 (軸を除く) に α を加えるこ

とである.) これらの等長変換は可換であり，アーベル群 $K=\{\tau_c\rho_\alpha : c\in R^1, \alpha\in S^1\}$ を生成する．$\tau_c\rho_\alpha$ を**キリング等長変換** (Killing isometry), K を**キリング群** (Killing group) と呼ぶことにする．明らかに，写像 $(c,\alpha)\to\tau_c\rho_\alpha$ により群同形 $R\times S^1\approx K$ が得られる．ここに，R は実数の加群で，$S^1=R^1/(2\pi R)$ である．$\psi=\tau_c\rho_\alpha$ はキリング・ベクトル場 $c\tilde{\partial}_t+\alpha\tilde{\partial}_\varphi$ の流れの写像 ψ_s で $s=1$ としたものであるから，キリング等長群 $\psi\in K$ は $I_0(M)$ に含まれる．つまり $K\subset I_0(M)$ であり，系 3.7.5 から，実際は $K=I_0(M)$ であることが分かる．

M のキリング・ベクトル場 $\tilde{\partial}_t, \tilde{\partial}_\varphi$ は，B における $\partial_t, \partial_\varphi$ (これらも完備である) を拡張したものであるから，M の等長変換 $\{\tau_c\rho_\alpha : c\in R, \alpha\in S^1\}$ も，B におけるそれの拡張である．つまり，$K(M)\approx\{\tau_c\rho_\alpha : c\in R, \alpha\in S^1\}\approx K(B)$ となっている．この拡張は自然なものであるから，両方を同じ記号 K で表すことにする．

カー等長変換の研究の基本になるのが，第 5 章で述べる，次の事実である．**関数 r と $C^2=\cos^2\vartheta$, 及び主要平面 Π は等長変換に関して不変である**. ボイヤー－リンキスト計量の成分は r と C^2 で定まるので，これも不変になる．つまり，カー等長変換であるからには，軸，赤道平面，地平面が不変でなければならない，という条件が満たされているのである．

$\cos^2\vartheta$ は不変であるが，赤道等長変換 ϵ から分かるように，関数 ϑ 自体は不変である必要はない．もし等長変換 ϕ が ϑ を不変にしないなら，$\cos^2\vartheta$ は不変なのであるから，等長変換 $\epsilon\phi$ が ϑ を不変にしているのである．

点 p における主要零的方向は，その点における (時間的) 主要平面 Π_p 内の零的直線である．よって，等長変換が主要平面を不変にする，つまり $d\phi(\Pi_p)=\Pi_{\phi(p)}$ である必要十分条件は，主要零的方向を不変にすること，すなわち，p の零的方向を $\phi(p)$ の零的方向へ移すことである．

第 2 章のように，$\mathrm{Span}\{V,W\}=\mathrm{Span}\{\partial_t,\partial_\varphi\}$ に接するベクトルを**垂直** (vertical), $\mathrm{Span}\{\partial_t,\partial_\varphi\}$ の直交部分空間に含まれるベクトルを**水平** (horizontal) と呼ぶことにする．図 2.3 は，これらのベクトルと $\Pi=\mathrm{Span}\{\partial_r,V\}$, $\Pi^\perp=\mathrm{Span}\{\partial_\vartheta,W\}$ の関係を示したものである．

命題 3.7.1　1 つのボイヤー－リンキスト・ブロックにおける等長変換を $\phi: B\to B$ とすると，

$$d\phi(\partial_r)=\partial_r,\quad d\phi(\partial_\vartheta)=\pm\partial_\vartheta,\quad d\phi(\partial_\phi)=\varepsilon\partial_\varphi,\quad d\phi(\partial_t)=\varepsilon\partial_t$$

が成立する．ここに，$\varepsilon=\pm1$ は，∂_ϑ の符号 $\pm$ とは独立である．

証明 $r \circ \phi = r$ であり，$\vartheta \circ \phi$ は ϑ か $\pi - \vartheta$ であるから，一般の関係式

$$d\phi(\partial_i) = \Sigma\left[\partial(x^j \circ \phi)/\partial x^i\right]\partial_j$$

より

$$d\phi(\partial_r) = \partial_r + X, \qquad d\phi(\partial_\vartheta) = \pm\partial_\vartheta + Y$$

となる．ここに，X と Y は，∂_φ と ∂_t に依存する (したがって垂直な) ベクトル場である．$d\phi$ でスカラー積は不変であり，$X, Y \perp \partial_r, \partial_\vartheta$ であるから，

$$< X, X > = < Y, Y > = \ 0$$

となる．よって，X と Y は，ゼロか零的である．$d\phi$ は主要平面 Π を不変にするから，$\Pi^\perp$ も不変である．したがって，関数 A, B, F, G を用いて

$$d\phi(\partial_r) = A\partial_r + BV, \qquad d\phi(\partial_\vartheta) = F\partial_\vartheta + GW$$

と書くことができる．これらの式を比較して

$$\partial_r + X = f\partial_r + FV, \qquad \pm\partial_\vartheta + Y = g\partial_\vartheta + GW$$

となる．垂直方向，水平方向どうしが同じであるから

$$f = 1, \qquad g = \pm 1, \qquad X = FV, \qquad Y = GW$$

を得る．B において $< V, V >= -\Delta\rho^2 \neq 0$ であるから，$< X, X >\neq 0$ ならば $F = 0$ を得る．同様に，軸でない点では $< W, W >= \rho^2 S^2 \neq 0$ ゆえ，$G = 0$ となる．つまり，$d\phi(\partial_r) = \partial_r, d\phi(\partial_\vartheta) = \partial_\vartheta$ である．このベクトル場の方程式から，任意の点 p に対して

$$d\phi(\partial_r|_p) = \partial_r|_{\phi(p)}, \quad d\phi(\partial_\vartheta|_p) = \partial_\vartheta|_{\phi(p)}$$

が出る．

この式は，$d\phi$ が，水平接平面 $H = \mathrm{Span}\{\partial_r, \partial_\vartheta\}$ を水平平面へ移すことを意味している．よって，垂直平面 $H^\perp$ は垂直平面へ移される．すなわち，ϕ は，$H^\perp$ の積分曲面を $H^\perp$ の積分曲面へ移すのである．これらの曲面はキリング軌跡 F である (2.3 節). この F は，∂_φ と ∂_t が平行ベクトル場である平坦な円柱である．F の内在的な幾何学でいえば，閉じた測地線は ∂_φ の積分曲線だけである．制限 $\phi|F : F \to F'$ は

等長変換なので，閉じた測地線は閉じた測地線へ移される．よって，任意の $p \in F$ に対して $d\phi(\partial_\varphi|_p) = h(p)\partial_\varphi|_{\phi(p)}$ である．ϕ はボイヤー－リンキスト計量の成分を不変にするので，スカラー積をとれば

$$g_{\varphi\varphi}(p) = h^2(p)g_{\varphi\varphi}(\phi p) = h^2(p)g_{\varphi\varphi}(p)$$

となる．よって $h^2(p) = 1, d\phi(\partial_\varphi) = \varepsilon\partial_\varphi$ を得る。ここに，$\varepsilon = \pm 1$ である．

後は，$d\phi(\partial_t) = \varepsilon\partial_t$ であることを示せばよい．$\varepsilon = +1$ とし，$d\phi(\partial_\varphi) = \partial_\varphi$ について調べる．$d\phi(\partial_t)$ の候補としては，∂_t と $Z = -\partial_t + 2(g_{\varphi t}/g_{\varphi\varphi})\partial_\varphi$ が考えられる．実際，Z も，$< Z, Z > = < \partial_t, \partial_t >, < Z, \partial_\varphi > = < \partial_t, \partial_\varphi >$ を満たしているのである (そして、これ以外に条件を満たすものはない)．

この後者の可能性を調べるため，先ず，標準ベクトル場 W は $H^\perp$ と $\Pi^\perp$ の両方に入り，これらの平面は $d\phi$ で不変であり，よって，W と $d\phi(W)$ は線形従属であることに注意する．実際，$< W, W >$ は r と C^2 にのみ依存しているから ϕ で不変であり，よって $d\phi(W) = \pm W$ となる．しかるに，もし $d\phi(\partial_t) = Z$ ならば，

$$\begin{aligned} d\phi(W) &= d\phi(\partial_\varphi + aS^2\partial_t) = \partial_\varphi + aS^2 Z \\ &= [1 + 2aS^2 g_{\varphi t}/g_{\varphi\varphi}]\partial_\varphi - aS^2\partial_t \end{aligned}$$

となる．よって ∂_φ の係数は -1 でなければならないが，計量恒等式 (m1) を使って計算すると

$$\begin{aligned} [g_{\varphi\varphi} + 2aS^2 g_{\varphi t}]/g_{\varphi\varphi} &= [(r^2 + a^2)S^2 + aS^2 g_{\varphi t}]/g_{\varphi\varphi} \\ &= S^2[r^2 + a^2 - 2\mathrm{M}ra^2S^2/\rho^2]/g_{\varphi\varphi} \end{aligned}$$

となる．もし $r^2 + a^2$ の符号が逆ならば -1 となるが，それはありえないので，$d\phi(\partial_t) = Z$ となる可能性は除外される．□

等長変換 $\phi \in I(M)$ に対して符号 $(\pm 1, \pm 1)$ を対応させることにする．ここに，最初の符号は，命題 3.7.1 の ∂_ϑ の符号であり，次の符号は，∂_φ と ∂_t の共通の符号 ε である．この対応を**符号関数** (sign function) sg と呼ぶ．例えば，赤道等長変換 ϵ では $\mathrm{sg}(\epsilon) = (-1, +1)$ であり，$(r, \vartheta, \varphi, t)$ を $(r, \vartheta, -\varphi, -t)$ へ移す後進等長変換 β では $\mathrm{sg}(\beta) = (+1, -1)$ である．

合成写像の微分法則 $d(\phi_1 \circ \phi_2) = d\phi_1 \circ d\phi_2$ により，sg は，$I(M)$ から，4 個の元で作られる乗法群 $\{(\pm 1, \pm 1)\}$ への準同型写像であることが分かる．(この群は，有名な 4 元群で，加法の記号で $Z_2 \times Z_2$ と表示されるものである.) また，sg は，離散空

間への連続写像であるから，$I(M)$ の各連結成分上で一定である．特に恒等写像では $\mathrm{sg} = (+1, +1)$ であるから，$I_0(M)$ の全ての成分でこれが成立する．

ボイヤー－リンキスト・ブロック B において，等長変換 $K = \{\rho_\alpha \tau_c\}$, 赤道等長変換 ϵ, それに後進等長変換 β を構成した．そして，これで十分なのである．

系 3.7.2 ボイヤー－リンキスト・ブロック B (高速カー時空で $B = M_f$ の場合も含む) の等長変換群 $I(M)$ は，ϵ, β, それにキリング等長変換 K により生成される．

証明 B の等長変換を ϕ とする．この ϕ に，適当な ϵ, β, K の等長変換，を合成して，B の恒等変換を作ればよい．必要なら ϵ を使い，ϕ は，r とともに ϑ も不変にするとする．つまり $\mathrm{sg}(\phi) = (+1, \pm 1)$ である．右側の符号がマイナスのときは，ϕ に β を合成してプラスにする．これで

$$d\phi(\partial_r) = \partial_r, \quad d\phi(\partial_\vartheta) = \partial_\vartheta, \quad d\phi(\partial_\varphi) = \partial_\varphi, \quad d\phi(\partial_t) = \partial_t$$

となる．

B の軸以外の点 p をとる．点 $\phi(p)$ の r, ϑ 座標は p と同じだから，(必要なら)ϕ に適当なキリング等長変換 $\tau_c \rho_\alpha$ を組み合わせて，$\phi(p) = p$ とすることができる．これらの式から，$d\phi_p$ は，$T_p(M)$ の恒等写像であることが分かる．連結多様体の等長変換は，1 点におけるそれの微分写像で決定されるから，$\phi = id$ となる．□

次に，B の等長変換の間の代数的な関係を考える．等長変換 ϵ と β は，ベキ等 $\epsilon^2 = id = \beta^2$ で，可換 $\epsilon\beta = \beta\epsilon$ である．よって，これらが作る $I(B)$ の部分群 $Q = \{id, \epsilon, \beta, \epsilon\beta\}$ は 4 元群である．実際，sg は，Q から $\{(\pm 1, \pm 1)\}$ への同型写像を与えている．

また，ϵ で変わるボイヤー－リンキスト座標は ϑ のみであるから，ϵ は，等長変換 $\tau_c \rho_\alpha$ と可換である．よって，ϵ は，B の全ての等長変換と可換となる．

しかしながら一般に，β とキリング等長変換は可換ではない．$\psi = \tau_c \rho_\alpha$ とすると，$\psi^{-1} = \tau_{-c} \rho_{-\alpha}$ であり，

$$\begin{aligned}(\beta\psi\beta)(r, \vartheta, \varphi, t) &= \beta\psi(r, \vartheta, -\varphi, -t) = \beta(r, \vartheta, -\varphi + \alpha, -t + c) \\ &= (r, \vartheta, \varphi - \alpha, t - c) = \psi^{-1}(r, \vartheta, \varphi, t)\end{aligned}$$

なので，$\psi \in K$ に関して $\beta\psi\beta = \psi^{-1}$ が成立していることが分かる．

命題 3.7.3 ボイヤー－リンキスト・ブロック B の等長変換群 $I(M)$ において，部

分群 $I_0(M)$ は $K = \{\tau_c\rho_\alpha\} \approx S^1 \times R^1$ である．また，$I(M)$ は，K と 4 元群 $Q = \{id, \epsilon, \beta, \epsilon\beta\}$ の半直積である．つまり，次が成立する．

(1) K は $I(M)$ の正規部分群である．

(2) $I(B) = K \cdot Q$

(3) $K \cap Q = \{id\}$

さらに，$\epsilon, \beta, \psi \in K$ の間で可換性が成立しないのは，$\beta\psi = \psi^{-1}\beta$ の関係だけである．

証明　先ず，番号を付けた所の性質を証明する．

(1) は，代数的な関係から明らかである．

(2) 系 3.7.2 より，B の等長変換 ϕ は，ϵ, β, キリング等長変換を使って語として表現できる．そしてその語は，上の結果から，適当な $\psi \in K$ と $q \in Q$ により，$\phi = \psi q$ であることが分かる．

(3) τ_c と ρ_α の微分写像はボイヤー－リンキスト座標ベクトル場を保存するから，キリング等長変換では $\mathrm{sg} = (+1, +1)$ となっている．しかるに，$\mathrm{sg}(\epsilon) = (-1, +1)$, $\mathrm{sg}(\beta) = (+1, -1)$ であるから，$\mathrm{sg}(\epsilon\beta) = (-1, -1)$ である．よって，ϕ が K と Q の両方に含まれるなら，ϕ は id となる．

$I_0(B) = K$ であることを証明するには，$I_0(B) \subset K$ を示せばよい．逆方向の包含関係は既知である．いま $\phi \in I_0(B)$ とすると $\mathrm{sg}(\phi) = (+1, +1)$ である．(2) より，$\psi \in K$ と $q \in Q$ で $\phi = \psi q$ と書ける．よって

$$(+1, +1) = \mathrm{sg}(\phi) = \mathrm{sg}(\psi q) = \mathrm{sg}(\psi)\mathrm{sg}(q) = \mathrm{sg}(q)$$

となる．したがって，$q = id$ で，$\phi \in K$ となる．($I_0(M)$ は $I(M)$ の正規部分群であるから，これは，(1) の別証明にもなっている.) □

これで，$I(M)$ の代数的な記述が完全にできることになった．つまり，$I(M)$ は，Q, K, K の自己同型 $\{C_q : q \in Q\}$ (ここに $C_q(\psi) = q\psi q^{-1}$) で決定されるのである．実際，$I(M) = KQ$ なので，

$$(\psi q)(\psi' q') = \psi q \psi' q^{-1} q q' = \psi C_q(\psi') q q'$$

となっている．もし C_q が恒等写像の自己同型ならば，Q の元と K の元が可換なので，$I(B)$ は直積 $Q\times K$ となる．ここに，$C_\epsilon = id$ であるが，$C_\beta(\psi) = C_\beta(\psi) = \psi^{-1}$ である．例えば，$\psi' \neq (\psi')^{-1}$ とすると (これは，$\psi = \rho_\pi$ でなければ成立する),

$$\psi\beta\psi'\epsilon = \psi(\psi')^{-1}\beta\epsilon \neq \psi\psi'\beta\epsilon$$

となる．またこの命題は，準同型写像 $q \to qK$ が，Q から $I(B)/K$ への同型を与えていることを示している．つまり，$I(B)$ の連結成分の群に対して

$$I(B)/I_0(B) = I(B)/K = \{K, \epsilon K, \beta K, \epsilon\beta K\} \approx Q$$

を得る．よって，B の大 (つまり非キリング) 等長変換と Q の元とのズレはキリング等長変換なのである．

次の節において，B の等長変換の中で，向き付けや時間的向き付けを不変にするものが必要となる．この性質は，連続的な変形で不変なので，等長変換群の元を指定すれば決まる．明らかに，恒等変換は両方の向き付けを不変にするので，K の等長変換は，向き付けと時間的向き付けを不変にする．また，ϵ が向き付けを逆にするので，ϵK の等長変換は，時間的向き付けは保存し，向き付けは逆になる．等長変換 β は，2 つの座標の符号を逆にするので，全てのブロックで向き付けを保存する．しかし，時間的向き付けについてはブロックごとに異なる．ブロック I と III では，$|r|$ が大きい所で ∂_t が時間的であり，$d\beta(\partial_t) = -\partial_t$ なので，時間的向き付けは逆になる．∂_r が時間的であるブロック II では，$d\beta(\partial_r) = \partial_r$ なので時間的向き付けは保存される．よって，$\epsilon\beta$ は，向き付けを逆にし，時間的向き付けについては β と同様となる．

このボイヤー－リンキスト・ブロックごとの結果は，次のように，カー時空に対して 2 つの重要な性質を与えている．なお，最初のキリング・ベクトル場についての性質では，完備性は仮定されていない．

系 3.7.4 カー時空 M の全てのキリング・ベクトル場 X は，$\tilde{\partial}_t$ と $\tilde{\partial}_\varphi$ の定数係数の線形結合である．

証明 M のボイヤー－リンキスト・ブロック B において，軸上にない点を p とする．また，p の近傍 $\mathcal{U}$ で定義された X の局所的な流れを $\{\psi_s\}$ とおく (節 1.1 参照). 命題 3.7.1 の証明は局所的なものであるから，(局所的に定義された) ψ_s でもこの命題は成立する．そして，ψ_s は連続的に $\psi_0 = id$ へ変化できるから，この命題にある $\pm$ と ε の符号は両方プラスである．

よって，系 3.7.2 の証明にある等長変換 ϵ と β は不要となり，ψ_s は，連続関数 f, g と適当な区間 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ に対して，$\rho_{f(s)}\tau_{g(s)}$ と書けることになる．写像 $S \to \psi_s$ は，区間 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 内の $s, t, s+t$ に対して $\psi_0 = id$ で $\psi_{s+t} = \Psi_s \circ \psi_t$ という準同型であり，f と g も同様な性質を持つ．よって，定数 c, d に対して $f(s) = cs$, $g(s) = ds$ と書ける．

座標で書けば $(\rho_{cs}\tau_{ds})(r, \vartheta, \varphi, t) = (r, \vartheta, \varphi + cs, t + ds)$ である．よって，任意の点 p において，曲線 $S \to \rho_{cs}\tau_{ds}(p)$ の速度は $(c\partial_\varphi + d\partial_t)|_p$ となる．つまり，$\{\rho_{cs}\tau_{ds}\}$ はベクトル場 $c\partial_\varphi + d\partial_t$ の流れなのである．ベクトル場は流れによって一意に決定されるから，近傍 $\mathcal{U}$ において $X = c\partial_\varphi + d\partial_t$ である．これはキリング・ベクトル場であるから，この式は大域的に成立する．□

系 3.7.5　カー時空 M においてベクトル場 $\tilde{\partial}_\varphi$ と $\tilde{\partial}_t$ が完備ならば(例えば M_e, M_s のとき), $I(M)$ の単位元成分 $I_0(M)$ はキリング群 $K = \{\tau_c\rho_\alpha\}$ である．

証明　前に，$K \subset I_0(M)$ であることを示した．逆方向の包含関係を示すため，$I_0(M_e)$ の元 ϕ を取る．ϕ は，等長変換で恒等変換へ変形できる．M_e のボイヤー－リンキスト・ブロックを B とする．等長変換はボイヤー－リンキスト・ブロック B を不変にするので，$\phi|B$ は，等長変換 $B \to B$ で id へ変形できる．つまり，$\phi|B$ は $I_0(B) = K$ に含まれる．ϕ は，B において，あるキリング等長変換 $\rho_\alpha\tau_c$ に一致するから，M でも一致する．よって $I_0(M) \subset K$ となる．□

3.8　M_e と M_s の等長変換

前の節において，極限カー時空と遅速カー時空の両方の場合について，赤道等長変換 ϵ とキリング等長変換 $\rho_\alpha\tau_c$ の群 K を与えた．これ以外の等長変換を作るには，3.1 節で述べた逆方向等長変換が有用となる．これをひとつのボイヤー－リンキスト・ブロック B に制限したときには，$\beta_0\colon B \to B$ と記すことにする．3.1 節で述べたように，β_0 は，等長変換 $\beta\colon K^* \to {}^*K$ へ拡大され，カー・スター時空とスター・カー時空を逆にする．しかし，地平面が存在するときには，地平面を越えて等長変換 $K^* \to K^*$ (または ${}^*K \to {}^*K$) へ拡大することはできない．実際，元のボイヤー－リンキストの式 $\beta_0(r, \vartheta, \varphi, t) = (r, \vartheta, -\varphi, -t)$ では

$$\varphi^* \to -\varphi^* + 2A(r), \qquad t \to -t + 2T(r)$$

であるが，$A(r)$ と $T(r)$ は，地平面で無限大となってしまうのである．

先ず，極限カー時空 M_e について調べる．3.7 節のように，等長変換群 $I(M_e)$ を構成するのに十分な等長変換を見つけ，次にその代数を作ることにする．

3.2 節で，M_e を，ジッパーによるはり合わせ $M^* \cup_\mu {}^*M$ で構成した．ここに，$M^* = \cup\{K^i\}$, ${}^*M = \cup\{{}^iK\}$ であり，はり合わせ写像 μ は，補題 3.1.3 の等長写像で作られている．この構成を使えば，次のステップへ進むために必要な，M_e の自然な等長変換 λ を簡単に作ることができる．写像の補題 (1.4 節) から，K^i を K^{i+1} へ移す $\lambda^*: M^* \to M^*$ は (番号を変えただけの) 恒等変換となり，${}^*\lambda$ も同様である．補題における可換の条件は明らかに成立するので，求める等長変換は $\lambda = \lambda^* \cup {}^*\lambda$ となる．

次に，$\beta: K^* \to {}^*K$ を使い，等長変換 $\beta_e: M_e \to M_e$ を構成する．これは，図 3.7 から分かるように水平線に対する鏡映となっている．明らかに，はり合わせの操作は可換性 $A \cup_\mu B \approx B \cup_{\mu-1} A$ を満たしている．よって，上記の M_e に対して

$$\beta_e: M^* \cup_\mu {}^*M \to {}^*M \cup_{(\mu^{-1})} M^*$$

を $\beta^* \cup {}^*\beta$ として定義する．ここに，任意の i に対して，β^* は $\beta: K^i \to {}^{-i}K$ であり，${}^*\beta$ は $\beta^{-1}: {}^iK \to K^{-i}$ である．添字に関して確認しておく．写像の補題における可換性の条件は，1 つのブロック B において $\mu^{-1} \circ \beta = \beta^{-1} \circ \mu$ である．これを B のボイヤー－リンキスト座標で書けば，μ は恒等変換で $\beta_0 = \beta_0{}^{-1}$ である．したがって，β_e から添字 e を取ってもかまわない．

これらの等長変換により M_e の等長変換群が作られるのである．

命題 3.8.1　極限カー時空 M_e の等長変換群 $I(M_e)$ は，ϵ, β, λ, それにキリング等長変換 $K = \{\tau_c \rho_\alpha\}$ で構成される．

証明　M_e の任意の等長変換 ϕ が，これらの等長変換の語として記述されることを示せばよい．M_e のボイヤー－リンキスト・ブロックを B とする．前に述べたように，ϕ は，B を同じタイプの B' へ移す．したがって，あるベキ乗 λ^n で，B' は B へ戻る．B へ制限した $\lambda^n\phi|B$ は，B の自己等長変換であり，命題 3.7.3 から，ψq_0 と書ける．ここに，$\psi \in K$ で，q_0 は $Q = \{id, \epsilon, \beta_0, \epsilon\beta_0\}$ に含まれている．これらの等長変換は，唯一の方法で M_e へ拡張できるので，$\lambda^n\phi = \psi q_0$, つまり $\phi = \lambda^{-n}\psi q_0$ となる．□

ϵ, λ, β で生成される群を Q_e と置く．明らかに，赤道等長変換 ϵ は λ と可換で，また，ϵ はあるボイヤー－リンキスト・ブロック上で β と可換なので，全ての所で可換

となる．それで，Q_e は，$\{id, \epsilon\}$ と，β と λ で生成される群 D との直和となる．等長変換 λ は無限巡回群を生成し，β は，ϵ と同様に，ベキ等である．

しかし，λ と β は可換ではない．集合 K^0 に $\beta\lambda\beta$ を作用させて，$K^0 \to {}^0K \to {}^1K \to K^{-1}$ となる．この写像は λ^{-1} と一致する，つまり，大域的に $\beta\lambda\beta = \lambda^{-1}$ が成立する．よって，D は無限 2 面体群である．

Q_e が M_e の大等長変換群 $I(M_e)/I_0(M_e)$ であることを示すため，この元が向き付けと時間的向き付けに与える効果を調べることにする．明らかに，λ は両方を不変にする．他のものについては，M_e に与える効果が，1 つのボイヤー－リンキスト・ブロックに対する効果から決定されている (3.7 節を見よ)．不変を $+1$, 逆を -1 と書くと，$\psi \in K$ に対して，

(等長変換)	(向き)	(時間的向き)
ϵ	-1	$+1$
β	$+1$	-1
λ, ψ	$+1$	$+1$

となる．前と同様に，合成写像の微分法則 $d(\phi_1\phi_2) = d\phi_1 \circ d\phi_2$ から，等長変換に**向きの符号** $(\pm 1, \pm 1)$ を対応させる関数は準同型であることが分かる．

命題 3.8.2　極限カー時空 M_e の等長変換群 $I(M_e)$ は，$I_0(M_e) = K \approx R^1 \times S^1$ と，ϵ, β, λ で生成される群 Q_e の半直積である．つまり，

(1) K は $I(M_e)$ の正規部分群である．

(2) $I(M_e) = K \cdot Q_e$.

(3) $K \cap Q_e = \{id\}$.

証明　補題 3.7.5 から $K = I_0(M_e)$ である．

(1) $I_0(M_e)$ は $I(M_e)$ の閉正規部分群である．

(2) $I(M_e) = K \cdot Q_e$ について．命題 3.8.1 の証明から，M_e の等長変換 ϕ は，$q_0 \in Q$, $\psi \in K$, として，$\phi = \lambda^{-n}\psi q_0$ と書けることが分かる．λ と ψ は可換であるから，$q = \lambda^{-n} q_0 \in Q_e$ として，$\phi = \psi q$ となる．

(3) $K \cap Q_e = \{id\}$ について．$\psi \in K$ が Q_e にも含まれるとするなら，$\psi = \lambda^n \epsilon^a \beta^b$ である．ここに，a と b は 0 か 1 で，n は整数を表す．これらの等長変換の中で，向き付けを逆にするのは ϵ のみなので，$a = 0$ となる．時間的向き付けを逆にするのは β だけなので，$\psi = \lambda^n$ である．しかるに，キリング等長変換は各ボイヤー－リンキスト・ブロックをそれ自身へ移すから，$\lambda^0 = id$ 以外に，λ のベキ乗が K に含まれることはない．□

$I(M_e)$ の代数的記述を完成するためには，後は，$q \in Q$ に対し，K の自己同型 $C_q(\psi) = q\psi q^{-1}$ をチェックすればよい．$q \to C_q$ は準同型であるから，q に ϵ, β, λ を当てはめればよい．この中で自明でないのは C_β で，$C_\beta(\psi) = \beta\psi\beta = \psi^{-1}$ となる．

等長変換 ϕ の不動点 $\mathrm{Fix}(\phi)$ は，全測地的閉部分多様体である (1.7 節)．M_e においては，$\mathrm{Fix}(\epsilon)$ は赤道 Eq であり，λ は不動点を持たない．逆方向等長変換 β で不変なボイヤー－リンキスト・ブロックは，あるブロック I, K^0 の I^0 である．$\beta|\mathrm{I}^0$ をボイヤー－リンキスト座標で書くと

$$(r, \vartheta, \varphi, t) \to (r, \vartheta, -\varphi, -t)$$

となるので，$\mathrm{Fix}(\beta) = \{(r, \vartheta, 0, 0) \colon r > \mathrm{M}, 0 \leq \vartheta \leq \pi\}$ であり，これは，I^0 の極平面 $P(0,0)$ である．M_e における他の極平面 P_{I} は，M_e の等長変換で $P(0,0)$ に一致するから，それらも等長変換の不動点である．Ⅲ ブロックの極平面 P_{III} に関する同様の性質を得るには，β を等長変換 $\lambda\beta$ に変えればよい．以上より，M_e の全ての極平面は全測地的閉部分多様体になっている．

次に，遅速カー時空 M_s の等長変換について考える．これまでと同様に，キリング等長変換群 K と赤道等長変換 ϵ が存在する．M_s におけるこれ以外の等長変換を調べるため，クルスカル領域の等長変換を考える．先ず，$\mathcal{D}(r_+)$ から始める． U^+V^+ 平面の写像で関数 r を不変にするものは (等長写像ならこれが要請される)，この平面から，

$$(U^+, V^+) \quad (-U^+, -V^+), \quad (V^+, U^+), \quad (-V^+, -U^+)$$

のどれかへの写像である．等長写像となることを調べるため，これらを，ϑ とφ^+ を不変して，$\mathcal{D}(r_+)$ へ拡張する．命題 3.5.3 の ds^2 に関する長い式から直ちに，最初の 2 つの写像は等長写像であることが分かる．残り 2 つは，1 形式 $U^+dV^+ - V^+dU^+$ の符号が変わるので，等長写像ではない．これは，$d\varphi^+$ の符号を変更すれば修正できる．つまり，上記の写像を，$\vartheta \to \vartheta$, $\varphi^+ \to -\varphi^+$ と拡張するのである．

厳密にいうと，これらの 4 つの写像は $\mathcal{D}(r_+) -$ (軸) で定義されている．しかし，明

らかに $\mathcal{D}(r_+)$ の微分同相へ拡張でき，連続性から，等長写像となる．最初の写像は恒等変換であるから，残り 3 個の写像を調べる．

1. $(U^+, V^+, \vartheta, \varphi^+) \to (-U^+, -V^+, \vartheta, \varphi^+)$ で与えられる等長写像 γ は，交叉球 $S(r_+)$ に関する $\mathcal{D}(r_+)$ の動径対称変換である．
2. 命題 3.5.1 から，U^+ と V^+ を逆にすることは，t の符号を変えることになる．$\varphi^+ = \varphi$ であるから，等長写像 $(U^+, V^+, \vartheta, \varphi^+) \to (V^+, U^+, \vartheta, -\varphi^+)$ は，ブロック I と I' では，逆方向等長変換 β_0 に一致している (つまり，これらは不変である) ことが分かる．しかし，ブロック II と II' は交換される．この等長写像を，$\mathcal{D}(r_+)$ の**逆方向等長変換** (backwards isometry) β_+ と呼ぶことにする．(図 3.13 を見れば，$\mathrm{I} \cup \mathrm{II} \to \mathrm{I} \cup \mathrm{II}', \mathrm{I}' \cup \mathrm{II}' \to \mathrm{I}' \cup \mathrm{II}$ なる β_+ が，β: $K^* \to {}^*K$ と同等なものであることが分かる.)
3. 等長写像 $(U^+, V^+, \vartheta, \varphi^+) \to (-V^+, -U^+, \vartheta, -\varphi^+)$ を σ で表すことにする．これも β_0 から得られるが，σ と β_+ では符号が変わっているので，$\mathcal{D}(r_+)$ のブロックを入れ換えることになる．σ は，ブロック II とブロック II' では，β_0 と一致するが，ブロック I と I' を交換する．ブロック II においては，r が時間を測るので，β_0 は空間を逆転する効果がある．そこで，σ を，$\mathcal{D}(r_+)$ の**空間逆転等長変換** (space reversal isometry) と呼ぶことにする．(これも図 3.13 から，$\mathrm{I} \cup \mathrm{II} \to \mathrm{I}' \cup \mathrm{II}, \mathrm{I}' \cup \mathrm{II}' \to \mathrm{I} \cup \mathrm{II}'$ なる σ が，β: $K^* \to {}^*K$ と同等なものであることが分かる.)

明らかに，これらの等長写像は 4 元群 $\{id, \beta_+, \sigma, \gamma\}$ を構成している．図 3.19 は，これらを図式化したものである．

前と同じように，向き付けの不変を $+1$ で表すと，

(等長変換)	(向き)	(時間的向き)
ϵ	-1	$+1$
β_+, γ	$+1$	-1
σ	$+1$	$+1$

となる．

これらの符号は，$\partial_{U^+}, \partial_{V^+}$ から，あるいは，β_+, σ がブロック I と II における β_0 の拡張なので前の節から，得ることができる．

これらの等長変換から $\mathcal{D}(r_+)$ の等長変換群を作ることができる．

補題 3.8.3　$\mathcal{D}(r_+)$ の等長変換群 $I(\mathcal{D}(r_+))$ は，ϵ, $\{\beta_+, \sigma, \gamma\}$ のうちの 2 個，それにキリング等長変換 K で構成される．

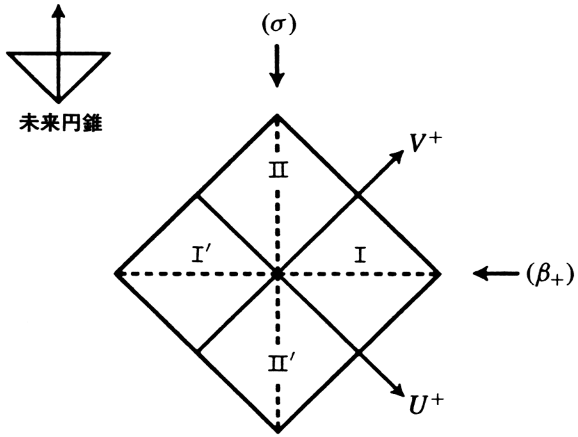


図 3.19 クルスカル領域 $\mathcal{D}(r_+)$ における等長変換．β_+ は，点線 (β_+): $V^+ = U^+$ に沿った U^+, V^+ 平面の鏡映と，$S^2(\vartheta, \varphi)$ の写像 $\varphi \to -\varphi$ を組み合わせたものである．同様に，σ は，(σ): $V^+ = -U^+$ での鏡映である．動径対称変換 $\gamma = \beta\sigma = \sigma\beta$ は，(U^+, V^+) を $(-U^+, -V^+)$ に移すが $S^2(\vartheta, \varphi)$ は不変にする．

証明 ϕ を $\mathcal{D}(r_+)$ の等長変換とする．必要なら ϵ を使い，ϕ は ϑ を不変にすると仮定できる．ϕ が $\mathcal{D}(r_+)$ のボイヤー－リンキスト・ブロックを入れ換えることは前に示してある．ブロックⅠについていえば，この写像で移される先はⅠかⅠ' である．

もし $\phi(\mathrm{I}) = \mathrm{I}$ ならば，ϑ が不変なので，系 3.7.2 より，$\phi|\mathrm{I}: \mathrm{I} \to \mathrm{I}$ は，ψ か $\psi\beta_0$ である．ここに $\psi \in K$ である．これらの等長変換は，$\mathcal{D}(r_+)$ 全体まで唯一の方法で拡張できて ψ か $\psi\beta_+$ となる．つまり，ϕ は ψ か $\psi\beta_+$ である．

もし $\phi(\mathrm{I}) = \mathrm{I}'$ ならば，$\sigma\phi(\mathrm{I}) = \mathrm{I}$ であり，上の証明を使い，$\sigma\phi$ は ψ か $\psi\beta_+$ となる．$\sigma = \sigma^{-1}$ であるから，ϕ は $\sigma\psi$ か $\sigma\psi\beta^+$ となる．□

領域 $\mathcal{D}(r_-)$ についても，添字を付け替えるだけで，同様な結果が成立する．つまり，β_- は，Ⅲ とⅢ' では β_0 に一致し，Ⅱ とⅡ' を交換する．σ は，Ⅱ とⅡ' では β_0 に一致し，Ⅲ とⅢ' を交換する．

M_s の等長変換群を作るため，前と同じように，K と ϵ から検討を始め，等長変換群 $I(M_s)$ に必要なだけの大等長変換を作ることにする．M_e の場合と同じように，大等長変換のひとつは λ であり，これは，各 $\mathcal{D}(r_\pm)_i$ を次の未来 $\mathcal{D}(r_\pm)_{i+1}$ へ移すものである (図 3.15 を見よ). $\mathcal{D}(r_\pm)_i$ の等長写像からは，より多くの情報が得られる．

補題 3.8.4　M_s のクリスカル領域 $\mathcal{D}(r_+)_0$ の等長変換 β_+, σ, γ は，M_s の等長変換 β, σ, γ へ拡張される．これらはベキ等である．

証明　(図 3.15 に図示したような) M_s の構成に対して写像の補題を用いる．一番簡単なのは σ である．全ての添字 i に対して $\sigma\colon \mathcal{D}(r_\pm)_i \to \mathcal{D}(r_\pm)_i$ なので，これを拡張すればよい．M_s の構成に使われるはり合わせ写像は $\mathbb{I}$ の恒等変換のコピーなので，写像の補題で必要となる条件は，明らかに満たされる．

β については，$\mathcal{D}(r_+)_0$ の等長変換 β_+ から始め，$\beta_+\colon \mathcal{D}(r_+)_i \to \mathcal{D}(r_+)_{-i}$ と $\beta_-\colon \mathcal{D}(r_-)_i \to \mathcal{D}(r_-)_{-i-1}$ (i は任意) を使えばよい (図 3.15 を見よ)．

これらの拡張により，$\gamma|\mathcal{D}(r_+)_0$ が M_s 上の$\gamma = \beta\sigma = \sigma\beta$ に拡張される．□

以上より，逆方向等長変換 β は，時空 M_s 全体を逆にする．γ は，図 3.15 から分かるように，$\mathcal{D}(r_+)_0$ の交叉球 $\boldsymbol{S}(r_+)$ に関する M_s の動径対称変換 (あるいは，180 度の回転) になっている．

β と γ は $\mathcal{D}(r_+)_0$ に依存しているが，各 $\mathcal{D}(r_\pm)$ に対する等長変換は $I(M_s)$ から与えられる (このことはすぐ後で示す)．ちなみに，σ は M_s の全てのボイヤー－リンキスト領域を空間的に逆転するのである．

補題 3.8.5　M_s の等長変換群 $I(M_s)$ は，ϵ, λ, $\{\beta, \sigma, \gamma\}$ のうちの 2 個，それにキリング等長変換 K s で構成される．

証明　M_s の等長変換 ϕ は，$\mathcal{D}(r_+)_0$ をある $\mathcal{D}(r_+)_n$ へ移すはずである．ゆえに，$\lambda^{-n}\phi$ は $\mathcal{D}(r_+)_0$ の自己等長変換となる．必要なら ϵ を使って，ϕ は ϑ を不変にするとしてよい．よって補題 3.8.3 の証明から，$\lambda^{-n}\phi|\mathcal{D}(r_+)_0$ は ψq_+ という形をしていることが分かる．ここに，$q_+ \in \{id, \beta_+, \sigma, \gamma\}$ である．これらの等長変換は M_s まで拡張できるので，$\phi = \lambda^i \psi \tilde{q}_+$ となる．□

これらの等長変換が，向き付けと時間的向き付けに与える効果は，容易に調べることができる．λ は，明らかに，向き付けと時間的向き付けを不変にする．他の等長変換については，その等長変換が不変にするクルスカル領域における状況と同じになる．

前と同じ符号を使うと

(等長変換)	(向き)	(時間的向き)
λ, ψ, σ	$+1$	$+1$
ϵ	-1	$+1$
β, γ	$+1$	-1

となる．

次に，等長変換どうしの可換性を調べる．赤道等長変換 ϵ は中心になっている．つまり，任意の等長変換と可換である．λ を KBL 座標で表すと恒等変換なので，λ は，$\mathcal{D}(r_\pm)$ を不変にする等長写像と可換である．特に，$\psi \in K$, σ と可換である．また，β, σ, γ が可換であることは分かっている．

補題 3.8.6 M_s の等長変換 $\epsilon, \lambda, \beta, \sigma, \psi \in K$ の中で可換でないものは，$\beta\psi\beta = \psi^{-1}, \sigma\psi\sigma = \psi^{-1}, \beta\lambda\beta = \lambda^{-1}$ である．

証明 $\mathcal{D}(r_+)_0$ のブロック I における β_0 の拡張が β であるから，そのブロックにおける式から，$\beta\psi\beta = \psi^{-1}$ が成立することが分かる．$\mathcal{D}(r_+)_0$ のブロック II における β_0 の拡張が σ であるから，これについても同様となる．

等長変換 λ の，β や σ との関係は異なっている．後者は各クルスカル領域を不変にするので，λ と可換である．しかし，β は $\mathcal{D}(r_+)_i$ を $\mathcal{D}(r_+)_{-i}$ へ移すので

$$(\beta\lambda\beta)\mathcal{D}(r_+)_0 = \beta\lambda\mathcal{D}(r_+)_0 = \beta\mathcal{D}(r_+)_1 = \mathcal{D}(r_+)_{-1} = \lambda^{-1}\mathcal{D}(r_+)_0$$

となる．λ が KBL 座標を不変にし，$\beta^2 = id$ なので，等長変換 $\beta\lambda\beta$ と λ^{-1} は各点で (よって全ての点で) 一致する．他のものが可換であることは，既に示してある．□

したがって，前と同じように，λ と β は無限 2 面体群 D となっている．

ϵ と λ, および β, σ, γ のうちの 2 個から生成される群を Q_s とする．(Q_s は M_s の大等長変換群となる.)

補題 3.8.7 群 Q_s は，4 元群 $\{id, \epsilon, \sigma, \epsilon\sigma\}$ と，λ と β で生成される無限 2 面体群 D の直積である．

証明 $F = \{id, \epsilon, \sigma, \epsilon\sigma\}$ と置くと，明らかに，$Q_s = F \cdot D$ である．上記の関係から，σ は，Q_s の全ての元と可換であることが分かる．ϵ もそうである．後は，$F \cap D = \{id\}$

であることを示せばよい．そこで，$\phi \in F \cap D$ とする．生成元$\epsilon, \sigma, \lambda, \beta$ の中で向き付けを不変にするのは ϵ だけである．よって，$\phi \in F$ ならば，ϕ は，σ か id のどちらかに等しい．

$\phi = \sigma$ と仮定する．このとき，$\phi \in D$ より $\sigma = \beta^a \lambda^n$ となる．ここに，$a = 0$ または $a = 1$ である．σ と λ は時間的向き付けを不変にし，β は変えるから，$a = 0$ である．しかるに，σ はボイヤー－リンキスト・ブロックを不変にし，$\lambda^n (n \neq 0)$ は変えるから，$\sigma = \lambda^n$ となることはない．よって $\phi = id$ であることが分かる．□

以上から，M_s の等長変換群を記述することができる．

定理 3.8.8　遅速カー時空 M_s の等長変換群 $I(M_s)$ は，$I_0(M_s) = K = \{\tau_c \rho_\alpha\} \approx S^1 \times R^1$ と上で定義した離散群 Q_s の半直積である．つまり，

(1) K は正規部分群である．

(2) $I(M_s) = K \cdot Q_s$

(3) $I_0(M_s) \cap Q_s = \{id\}$

($\psi \in K$ と Q_s の生成元 $\epsilon, \lambda, \beta, \sigma$ の間が可換でないことについては補題 3.8.6 を見よ.)

証明　補題 3.7.5 から $K = I_0(M_s)$ である．

(1) これは，前と同じように，$I_0(M_s)$ についての一般的性質である．

(2) $I(M_s) = K \cdot Q_s$ について．補題 3.8.5 の証明から，M_s の等長変換 ϕ は，

$$\phi = \lambda^n \psi \beta \tilde{q}_+ = \lambda^n \psi \epsilon^a \beta^b \sigma^c$$

と書くことができる．ここに，n はある整数で，a, b, c は 0 か 1 である．$\lambda^n \psi = \psi^{-1} \lambda^n$ であるから，Q_s の $q = \lambda^n \epsilon^a \beta^b \sigma^c$ を使い，$\phi = \psi^{-1} q$ となる．

(3) $I_0(M_s) \cap Q_s = \{id\}$ について．ϕ が，$I(M_s)$ と Q_s の両方に含まれると仮定する．補題 3.8.5 から，$\phi = \epsilon^a \sigma^b \beta^c \lambda^n$ と書くことができる．ここに，n はある整数で，a, b, c は 0 か 1 である．これらの等長変換の中で向き付けを逆にするのは ϵ のみであるから，$a = 0$ である．よって $\phi = \sigma^b \beta^c \lambda^n$. これら 4 個の中で時

間的向き付けを変えるのは β のみであるから，$\phi = \sigma^b\lambda^n$ となる．また，クルスカル領域を不変にしないのは λ のみであるから，$\phi = \sigma^c$ となる．ここで，ϕ はボイヤー－リンキスト・ブロックを不変にし，σ はそうではないから，$c = 1$ ということはない．したがって $\phi = id$ となる．□

さて，$I(M_s)$ の乗法は，各 $q \in Q_s$ に対して，ψ を $q\psi q^{-1}$ へ移す K の自己同型 C_q で特徴づけられる．(恒等式 $\psi q \psi' q' = \psi C_q(\psi') q q'$ が成立する.) $q \to C_q$ 自身が準同型であるから，生成元 $\lambda, \epsilon, \beta, \sigma$ それぞれに関して C_q を求めればよい．ϵ は中心で，λ と ψ は可換であるから，自明でないのは $C_\beta(\psi) = \psi^{-1}$ と $C_\sigma(\psi) = \psi^{-1}$ である．

最後に，M_s において，同じ形 (つまり，P_{I}, P_{II}, P_{III} のどれか) の大きい極平面は M_s の等長変換によって一致することを示す．これはある等長写像の不動点であるから，極平面が，全測地的閉曲面であることを示せばよい．

逆方向等長変換 β が不変にするのは $\mathcal{D}(r_+)_0$ のみであり，そこで，$U^+ = V^+$, $\varphi^+ = 0$ なる点を不動にする．よって，$\mathrm{Fix}(\beta)$ は，$\mathcal{D}(r_+)_0$ の空間的極平面 $P_{\mathrm{I}}(0,0)$ である．(それで，β を，この平面に関する M_s の鏡映とみることもできる.) 等長写像 $\rho_{-\alpha}\tau_{-c}$ は，$P_{\mathrm{I}}(\alpha, c)$ を $P_{\mathrm{I}}(0,0)$ へ移す．よって，M_s の全ての P_{I} は，適当な $\lambda^n\psi$ により，$P_{\mathrm{I}}(0,0)$ と一致する．すなわち，P_{I} は等長写像 $(\lambda^n\psi)^{-1}\beta(\lambda^n\psi) = \beta\lambda^{2n}\psi^2$ の不動点の集合である．

等長写像 $\lambda\beta$ は，$\mathcal{D}(r_-)_0$ の極平面 $P_{\mathrm{III}}(0,0)$ を不動にし，全ての P_{III} は $P_{\mathrm{III}}(0,0)$ と一致するので，P_{III} は等長写像の不動点の集合となる．

空間逆転等長変換 σ は，M_s における全ての領域 $\mathcal{D}(r_\pm)$ の空間的極平面 $P_{\mathrm{II}}(0,0)$ の点を不動にする．よって，$\mathrm{Fix}(\sigma)$ は，全てのブロック II を通る極平面 $P_{\mathrm{II}}(0,0)$ 全体となる．M_s の他の平面 P_{II} は，キリング等長変換 ϕ で $P_{\mathrm{II}}(0,0)$ と一致する．よって $P_{\mathrm{II}} = \mathrm{Fix}(\psi^{-1}\sigma\psi)$ である．

注意 3.8.9(シュワルツシルド時空の場合) シュワルツシルド時空は球対称であるから，直交群 O(3) がその上に (等長的に) 作用する．解析的に最大に拡張したクルスカル時空 Kr でも同じことが成立する．ところが，カー時空の軸対称は円群 $S^1 = \{\rho_\varphi\}$ である．つまり，$I(Kr)$ は，(2 次元の) カー等長変換群よりも大きいのである．実際，注意 3.5.5 で，Kr を，歪曲積構造を使い，$Q \times_r S^2$ と表現した．ここに，$Q \approx R^2$ の計量は $F(r)\,du\,dv$ という形をしている．r は等長変換で不変なので，Q の等長変換群は，2 次元ミンコフスキー空間のそれ，つまり 4 つの元から成る 1 次元ローレンツ群 $O(1,1)$ に一致する．すなわち，$I(Kr) \approx O(1,1) \times O(3)$ となり，これは 4 次元である．‖

3.9　カー時空の位相

この節では，最大カー時空 M_f, M_e, M_s の位相的な性質を調べ，重要な不変量を検討する．基本となる手法は次のものである． 位相空間 X の部分空間を A とする．連続写像 $\rho: X \to A$ が，全ての $a \in A$ に対して $\rho(a) = a$ を満たすとき，この ρ を，X の A への**引き込み** (retraction) と呼ぶ．X の恒等写像 id にホモトープである引き込み $\rho: X \to A \subset X$ が存在し，ホモトピーで A が不変になるとき，この A を**強変位レトラクト** (strong deformation retract) と呼ぶ．例えば，単位球 $S^n \subset R^{n+1}$ は $R^{n+1} - \{0\}$ の強変位レトラクトである．これを与えるホモトピーは $h_s(x) = (1-s)x + sx/|x|$ で，s が $[0,1]$ を動くにつれて，R^{n+1} の原点以外の点は S^n に引き込まれ，S^n 上の点は不変のままになっている．

空間 X_1 が空間 X_2 の強変位レトラクトであるとき，X_1 と X_2 は**ホモトピー同値** (homotopically equivalent) である，と呼ぶ (**ホモトピー型が同じ**である，ともいう)．つまり，ホモトピーとホモロジーの性質が同じなのである．(位相関係の用語については，Massey 1987, Greenberg and Harper 1981 等を見よ.) この節の目的は，いろいろなカー時空にホモトピー同値となるシンプルな空間を見つけることである．

ボイヤー－リンキスト・ブロック I と II は，$R^2 \times S^2$ に微分同相であり，一般に R^n は 1 点に縮むことができるので，ホモトピー的には 2 次元球に等しくなる．よって特に，単連結である．ブロック III では，リング状特異領域を取り除いているので，話が複雑になる．

補題 3.9.1

(1) 高速カー時空 M_f, カー時空 K^* と $^*K$(回転のタイプはどれでもよい), それに M_e と M_s のボイヤー－リンキスト・ブロック III は，お互いに微分同相である．

(2) これらは，2 つの 2 次元球を北極と南極でつないだ空間 X_f にホモトピー同値である (図 3.20 を見よ).

証明

(1) 例えば，M_f と III $\subset M_s$ を考える．先ず，Σ をリング状特異領域として，$M_f = R^2(r,t) \times S^2 - \Sigma$ である．関数 $f: R \to (-\infty, r_-)$ は，滑らかな (あるいは解

析的) 関数で,

$$f' > 0,\ f(0) = 0,\ \lim_{r\to-\infty} f(r) = -\infty,\ \lim_{r\to+\infty} f(r) = r_-$$

を満たすものとする．そこで，写像 $\phi\colon M_f \to \mathrm{I\!I\!I}$ を $\phi(r,t,y) = (f(r),t,y)$ で定義すれば，これは微分同相となる．

(2) 例えば $\mathrm{I\!I\!I} \subset M_s$ を考える．(この証明は，ホモトピーをすぐに $\mathrm{I\!I\!I}$ へ反映するために図 2.2 をモデルにしている.) 先ず，$\mathrm{I\!I\!I}$ の t 断片 (例えば $\{t=0\}$ とする) は，$\mathrm{I\!I\!I}$ 自身とホモトピー同値となっている．つまり，

$$\mathrm{I\!I\!I} = [(-\infty, r_-) \times R(t) \times S^2] - \Sigma = R(t) \times \{t=0\}$$

である．変位 $h_s(t,r,y) = ((1-s)t, r, y)$ を考えれば，s が $0 \le s \le 1$ を動くにつれて，t 軸 $R(t)$ は点 $t=0$ に縮んでいく．つまり，$\{t=0\}$ が $\mathrm{I\!I\!I}$ の強変位レトラクトなのである．すなわち

$$\{t=0\} = [(-\infty, r_-) \times S^2] - \Sigma_0$$

となっている．ここに，Σ_0 は $0 \times S^2$ の赤道を表す．

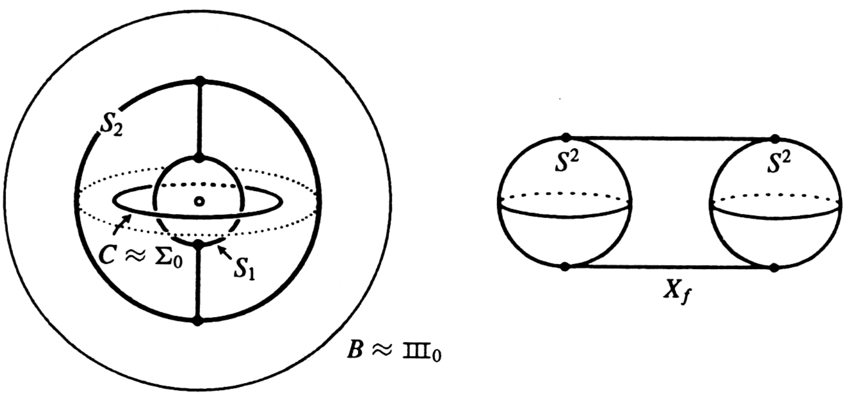


図 3.20　高速カー時空 M_f と M_s のボイヤー−リンキスト・ブロック $\mathrm{I\!I\!I}$ は，$\mathrm{I\!I\!I}$ の t 断片 $\mathrm{I\!I\!I}_0$ とホモトピー同値である．よって，2 つの 2 次元球を極でつないだ空間 X_f とホモトピー同値である．

図 2.2 における t 断面の指数表現は，微分同相 $\psi(r,y)=e^r y$ で，$\{t=0\}$ を $B-(0\cup C)$ へ移したものである．ここに，B は R^3 内の半径 $e^r 1$ の球で，$C\approx\Sigma_0$ は R^3 内の XY 平面の単位円である．

$B-(0\cup C)$ は，(図 3.20 の左側の図のような) 2 つの 2 次元球 S_1 と S_2, およびそれらの北極，南極をつなぐ線分から構成される X への強変位レトラクトを持っている．この X への引き込みでは，S_2 の外側の点が S_1 の内側へ，S_1 の内側の点が S_2 の外側へ移される．S_1 と S_2 の間にある点は，C から外側に向かい，それから X へ曲がる曲線に沿っている．図 3.20 の X_f は，位相的に X と同一のものである．□

図 3.20 と図 2.2 を比べて見れば，X がブロック Ⅲ の場合，2 次元球は $\{t=0\}$ における $r=r_1, r=r_2$ ($r_1<0<r_2<r_-$) であり，極をつないでいる線分は軸上にあることが分かる．

M_f, Ⅲ, X_f はホモトピー同値であるから，M_f の基本群は無限巡回群 $\pi_1(M_f)\approx Z$ であり，ゼロでない整数係数のホモロジー群は $H_0\approx H_1\approx Z$, $H_2\approx Z\times Z$ となっている．よって，M_f のオイラー・ポアンカレ数は 2 である．

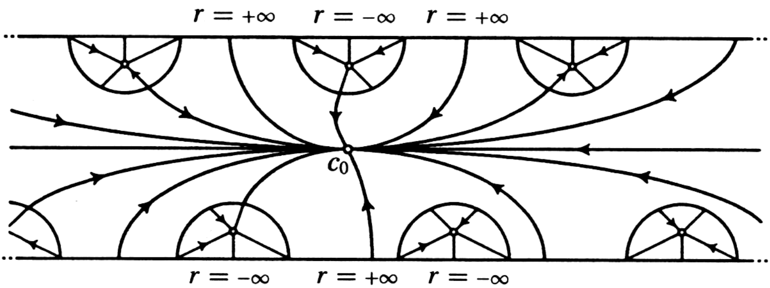
このホモトピーの意味を Ⅲ の言葉で解釈すれば，2 つの巡回群 π_1 と H_1 の生成元は，リング状特異領域 Σ をつないでいる単純閉曲線で作られている，ということになる．生成された H_2 の 2 サイクルは，$r=-\infty$ と $r=+\infty$ を〈取り囲み〉，Σ により分離されているのである．

無限に多くのリング状特異領域を持つ M_s のホモトピー構造は，さらに複雑である．しかし 3.6 節で見たように，リング状特異領域を持っている多様体 $\widehat{M}_s$ は $R^2\times S^2$ に微分同相になっている．M_s を単純な空間へ変位するための準備として，$M_s\subset R^2\times S^2$ を次のようにとらえておく．

S^2 の北極と南極を，それぞれ n, s とする．上記の R^2 を，無限に長い帯 $R^1\times(-1,+1)$ で置き換える．こうすると，$\widehat{M}\approx R^1\times(-1,+1)\times S^2$ において，北軸が $A_N=R^1\times(-1,+1)\times\{n\}$, 南軸が $A_S=R^1\times(-1,+1)\times\{s\}$ となり，対となる点 (x,n) と (x,s) が，2 次元球 S_x の極となっている．$R^1\times(-1,+1)\times S^2$ の部分空間としての M_s は，ここからリング状特異領域を取り除いて得られる．つまり，$r=0$ である軸の点に対応する x について，各 S_x の赤道を取り除くのである．

さて，強変位レトラクトで M_s をシンプルな空間 X へ変位させることにする．各成分 C_n で点 c_n をとり，$\{r>0\}$ 内に 1 点 c_0 をとる．これを使い，X は，A_N, A_S, 全ての n に対する球 S_{c_n}, それに，S_{c_0} を結合したものとして実現できる．つまり，X は，2 つの帯の間に 2 次元球を無限個はさんだ形をしているのである．

M_s を変位して X にする過程は，図 3.21(上) の**矢印**で表したように，次の手順に



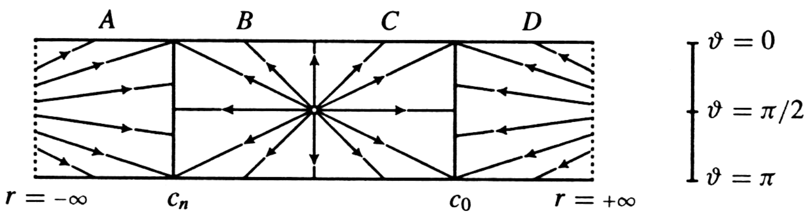


図 3.21　部分空間 X への M_s の変位．(上図) 軸における変位．$r=0$ と $r=-\infty$ からは点 c_n へ変位する．$r=0$ と $r=+\infty$ からは，中央の点 c_0 へ変位する．(下図) 経度 $0 \leq \vartheta \leq \pi$ における子午線上の変位．

なる．

1. $\{r<0\}$ の各成分 C_n においては，矢印は，C_n の境界 ($r=0$ と極限 $r=-\infty$ の両方) から，指定した点 c_n へ向かっている．
2. これらの成分の外側では，矢印は，$\{r<0\}$ の各点と $r=+\infty$ から，点 c_0 へ向かっている．(中心を c_0 とする円板として軸を図示すれば，この矢印は，中心へ向かう放射状の線となる.)

この変位において，各点は，軸への射影が矢印になるように移動している．また，球座標 φ は，変位に関して不変である．つまり，ϑ 座標の変化によって変位が決定されるのである．これを示したのが，図 3.21(下) の 4 分割された長方形 A, B, C, D である．

A. C_n の点は，$r=-\infty$ から X へと動き，A_N, A_S, S_{C_n} 上が終点となる．なお，

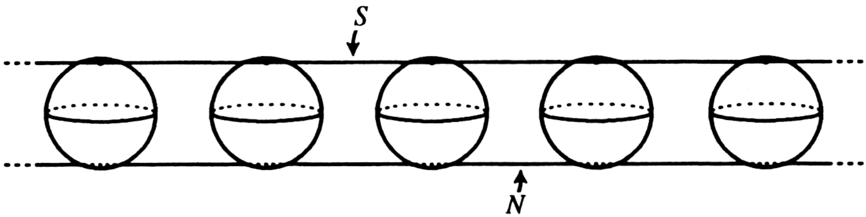


図 3.22　遅速カー時空 M_s と，無限個の 2 次元球を極でつないだものとは，ホモトピー同値である．

X の点は不動である．

B. C_n の点は，リング状特異領域から遠ざかり，やはり，A_N, A_S, S_{C_n} 上が終点となる．特に，$r = 0$ 上の点は，同じ球上をリング状特異領域から極へ向かい，北極 $n \in A_N$ と南極 $s \in A_S$ が終点となる．

C. これは B と同様な形であり，点は，$r = 0$ から A_N, A_S, S_{C_n} へと向かう．

D. これは A と同様であり，点は，$r = +\infty$ から c_0 へと向かっている．

このように，X は M_s の変位レトラクトであるから，この 2 つの空間はホモトピー同値である．最後に，軸 A_N と A_S が直線へ縮められ，M_f に対するモデル空間 X_f の無限版 X_s が作られる．

命題 3.9.2　R^3 の部分空間 X_s を，無限個の 2 次元球を並べて，(図 3.22 のように) それぞれの北極を直線 N で結び，南極を直線 S で結んだものとする．最大遅速カー時空 M_s はこの X_s と同じホモトピー型を持っている．

2 つの直線 N, S は 1 点へ縮めることができる．しかしこのときの位相は自明ではない．

モデル X_s から，基本群 $\pi_1(M_s)$ は，可算無限個の生成元を持つ自由群 F^∞ であり，ゼロでない (整数 Z を係数に持つ) ホモトピー群は，$H_0 \approx Z$ と $H_1 \approx H_2 \approx Z^\infty$(自由アーベル群) であることが分かる．

極限カー時空 M_e は，M_s と微分同相であるから，これと同じホモトピー型を持っている．

被覆空間の理論から (Greenberg and Harper 1981, Massey 1987, O'Neill 1983), 他の最大カー時空は，標準モデルを被覆する，あるいは，それにより被覆されることが分かる．(ここに，被覆写像は局所等長写像でなければならない．つまり，カー計量を保存しなければならないのである.) 任意の多様体に対して，その単連結被覆多様体は，一番大きく (ある意味では) 一番シンプルな被覆多様体といえる．しかしながら，カー幾何学においては，M_s を被覆する単連結な時空 $\widetilde{M_s}$ は，それほど価値のあるものではない．これでは，M_s と $\widehat{M_s}$ との間では明らかであったリング状特異領域の関係がなくなってしまい，次の節で見るように，年代律も成立しないのである．

標準的なカー・モデルで被覆される時空は，数多く存在する．それらを，**軌道多様体** (orbit manifold) M/Γ の概念を用いて構成する．ここに，Γ は，等長変換群 $I(M)$ の固有不連続な部分群である．**固有不連続** (properly discontinuous) とは，簡単にいえば，全ての $\phi \in \Gamma$ に対して，$\phi(\mathcal{U})$ が十分分離するような近傍 $\mathcal{U}$ が各点に対して存在する，ということである．(特に，$\phi \neq id$ は固定点を持たない.) いま，M の 2 点 p, q に対し，ある $\phi \in \Gamma$ により $\phi(p) = q$ となるとき，この 2 点を同一視して M/Γ が作られる．自然写像 $\pi: M \to M/\Gamma$ は，局所的に等長な被覆写像である．(O'Neill 1983 の 187, 188, 214 の各ページを見よ.)

最大カー・モデルでは，このような軌道多様体は数多く構成することができる．例えば，M_f や M_e においては，$c \neq 0$ として，等長変換 τ_c で生成される無限巡回群をとればよい．これにより，($\tilde{\partial}_t$ が時間的である部分において) 時間が永遠に流れることになる．M_s では，$\tilde{\partial}_t$ がゼロ点を持ち，その流れが作る等長変換 τ_c が固定点を持つので，この構成は使えない．

M_e と M_s に使用できる，もっと一般的な構成もある．時空をひとつ未来へ動かす等長写像 λ を使うのである．この λ で生成される群 $(\lambda) = \{l^n : n \in Z\}$ も固有不連続になっている．

定義 3.9.3　軌道多様体 $S_e = M_e/(\lambda)$ を，**小極限カー時空** (small extreme Kerr spacetime) S_e と呼ぶ．同様に，$S_s = M_s/(l)$ を，**小遅速カー時空** (small slow Kerr spacetime) と呼ぶ．

この優雅な時空 S_e においては，M_e で出てきた図形的な繰り返しは無くなっている．ボイヤー－リンキスト・ブロック I と III が 1 つずつ，リング状特異領域が 1 つ，短い地平面が 2 つ，で構成されているのである (図 3.23 を見よ).

M の性質の中で，Γ の等長写像で不変なものは M/Γ でも成立する，という事実がある．これを使うと，S_e は，向き付け可能で時間的向き付け可能となる．この 2 つ

の性質は λ で不変なのである．しかしながら，図 3.23 のように，閉じた時間的曲線 τ が生成されるので，S_e では年代律が壊れてしまう．一方，M_e では年代律が成立するので，物理学を検討する上ではこちらの方が都合がよい．

小遅速カー時空はそれほど優雅ではない．図 3.24 にあるように，これには全てのものが含まれているのである．すなわち，次のようになる．

- ボイヤー－リンキスト・ブロックが 6 個：各タイプに両方の時間的向き付けが付く．
- 両方の場合による短い地平面が 8 個：r_+ と r_-, K^* と $^*K$ で，両方の時間的向き付けが付く．
- 交叉球が 2 個：$\boldsymbol{S}(r_+)$ と $\boldsymbol{S}(r_-)$.

これらが 2 個のボイヤー－リンキスト領域，$\mathcal{D}(r_+)$ と $\mathcal{D}(r_-)$ に構成されるのである．

S_s のホモトピー型は，M_s を構成したときの方法から調べることができる．M_s は，位相的には，2 つの帯の間に無数の 2 次元球をはさみ，曲線 $r=0$ 上で赤道を取り除いたものである．S_s の場合，軸の位相的モデルである帯 $R^1\times(-1,+1)$ が閉じた帯 $S^1\times(-1,+1)$ となる．Ⅲ とⅢ' の領域 $r<0$ において，それぞれ，点 c と c' を取る．(図 3.21 の場合である)M_s の変位と同様にして，各点は (図 3.25 に示したように) 矢印の方向に変位して S_s の部分空間となる．2 つの点 c, c' 上の球と円 S^1 は不変となる．(これ以上矢印をまとめられないのである.)

このホモトピーにより，単純なモデルが作られる．

補題 3.9.4　小遅速カー時空 S_s は，積空間 $S^1\times S^2$ と 2 個の 2 次元球が作る空間とホモトピー同値である．ここに，2 次元球の全ての北極と南極は，積空間 $S^1\times S^2$ の

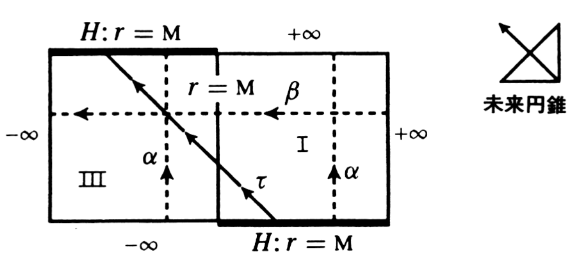


図 3.23　**小極限カー時空 S_e. H と記してある 2 つの地平面は，等長写像 λ で同一視される．それゆえ，α は 1 本の主要零的測地線となり，時間的曲線 τ は閉じてしまう．**

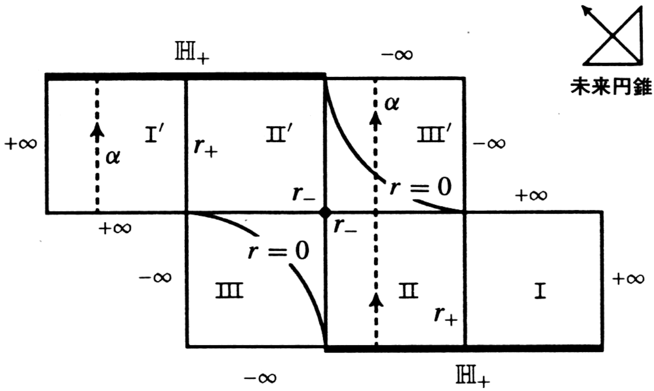


図 3.24　**小遅速カー時空 S_s. $\mathbb{H}_+$ と記してある 2 本の長い地平面が同一視され，α は 1 本の主要零的測地線となる．$\mathcal{D}(r_-)$ は図の中心である．同一視から $\mathcal{D}(r_+)$ が作られる．**

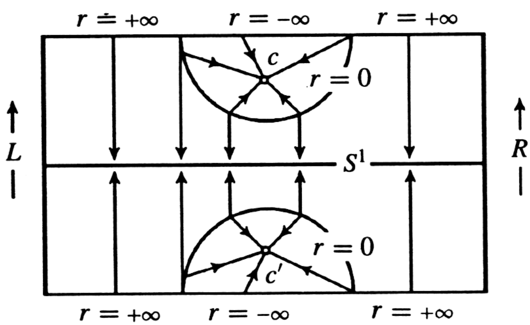


図 3.25　**S_s の変位．この長方形の左辺 (L) と右辺 (R) が同一視され，中心の横線 S^1 は円となる．矢印が変位を表している．**

1 点と同一視されているとする．

したがって，例えば，S_s の基本群は，3 個の生成元から成る自由群である．S_e もモデルとしては同様であるが，この場合は 2 次元球は 1 個なのである．

3.10　カー年代律

本節では，因果的特性に関する基本的な性質を述べる．つまり，因果的特性を幾何学の観点から調べ，それをカー時空に適用するのである．特に，**年代的特性** (chronology) に注目する．簡単にいえば，時空の時間的曲線を調べ，時間が正常に進行するかどうかを検討するのである．

時空 M の言葉でいえば次のようになる．2点 p, q を与えたとき，この p から q へ向かう未来向き時間的曲線は存在するか，ということである． 相対性理論の言葉でいえば，事象 p を出発したオブザーバーが事象 q に到達できるか，ということになる．ニュートン物理学では，絶対時間で時を計り，速度の制限がないから，この答えがイエスとなる条件は，ニュートン物理学の時計に関して q が p の後に生じることである．相対性理論では，時空によって答えが異なってくる．

時空 M における点 p に関して，p と未来向きの時間的(区分的滑らかな)曲線で結ぶことのできる M の点 q の集合を $I^+(p, M)$ で表し，p の**年代的未来** (chronological future) と呼ぶことにする．特に M を明示する必要のないときには $I^+(p)$ と書くことにする．もし $q \in I^+(p)$ ならば，明らかに，$I^+(q) \subset I^+(p)$ である．(この定義は，区分的滑らか，という条件でよい．曲線が折れている所は，修正して滑らかにすることができる.) この $I^+(p)$ は，M において常に開集合になっている (Hawking and Ellis 1973).

この定義において,〈未来向き〉の語を〈過去向き〉に置き換えて，M の p における**年代的過去** (chronological past) $I^-(p, M)$ を定義する．

ミンコフスキー空間 R^4_1 の場合には，任意の事象 p の年代的未来 $I^+(p)$ は，p を頂点とする普通の(上向き)円錐である．つまり，$I^+(0)$ は，$x^2 + y^2 + z^2 < t^2$ かつ $t > 0$ を満たす点 (x, y, z, t) の集合になっている．

時間的曲線のふるまいを一般的に述べることはできないので，次の概念を与えることにする．

定義 3.10.1　A を時空 M の部分空間とする．M の時間的曲線が，A と2回以上交わることがないとき，A は**無彩的** (achronal) である，と呼ぶ．

この概念は第2章で(そこでは明記しなかったが)既出している．すなわち，K^* の地平面 H は無彩的なのである (${}^*K$ の場合も同様). 実際，H は，零的であり，K^* を分割している (つまり，$K^* - H$ は連結でない). この例は妥当なものである．

系 3.10.2 連結で非時間的な閉超曲面 S が時空 M を分割するなら，S は無彩的である．

証明 系 1.7.8 より，$M–S$ は 2 つの成分 C^- と C^+ を持つ．これらの共通な境界が S であり，S と出会う未来向き時間的曲線は，C^- から C^+ へ横断的に交わらなければならない．したがって，曲線 α が S と，例えば点 $\alpha(s_0) \in S$ で出会うなら，α は C^+ へ入っていくことになる．さらにこの曲線が C^+ から出るならば，また S と出会うことになるが，これは，C^+ から C^- へ行くことになり，矛盾である．□

M_s の長い地平面においても，K^* の短い地平面の場合と同じ性質がある．

補題 3.10.3 M_s の長い地平面 $\mathbb{H}$ は無彩的であり，M_s を 2 つの成分，過去側の C^- と未来側の C^+ に分割する．

証明 これらの地平面は連結な零的超曲面であるから，これらが，閉集合であり，M_s を分割することを示せばよい．

クルスカル領域 $\mathcal{D}_0(r_+)$ において $\mathbb{H}_+$ を考える．(他の 3 つの場合も同様である.) $\mathbb{H}_+$ は，$\mathcal{D}_0(r_+)$ において $U^+ = 0$ で定義される集合であるから，これは $\mathcal{D}_0(r_+)$ を $U^+ > 0$ と $U^+ < 0$ に分割する．M_s は，連結開領域 $\mathcal{D}(r_\pm)$ を 2 重にかさねて作った無限に続く鎖であるから，

$$M_s - \mathbb{H}_+ = C^+ \cup C^-$$

となる．ここに，図 3.15 から分かるように，C^+, C^- は次のようなものである．

1. $\mathcal{D}(r_-)$ から始まる重なりあった領域 $\mathcal{D}(r_\pm)$ の鎖で，$U^+ < 0$ と交わるのは $\mathcal{D}_0(r_+)$ のブロック II のみ，となるものを作る．この鎖と $U^+ < 0$ の和集合が C^+ である．

2. $\mathcal{D}(r_-)$ から始まる上と同様な鎖で，$U^+ > 0$ と交わるのは $\mathcal{D}_0(r_+)$ のブロック II' のみ，となるものを作る．この鎖と $U^+ > 0$ の和集合が C^- である．

集合 C^+ と C^- は，それぞれ連結な開集合で，共通部分はない．したがって，それぞれ $M_s - \mathbb{H}_+$ の連結成分であり，超曲面 $\mathbb{H}_+$ は閉集合である．□

非空間的曲線に関して地平面が一方通行の性質を持っていることは，年代的特性に対して重要な意味がある．

明らかに，無彩的集合の部分集合は無彩的である．逆に，A が M において無彩的であっても，より大きな時空 $\widetilde{M}$ の中では，時間的曲線が増えてくるから，無彩的でなくなる場合もある．しかし，集合 A がボイヤー－リンキスト・ブロック B で無彩的ならば，M_s でも無彩的となる．なぜなら，B を出る曲線は必ず長い地平面を通るので，この地平面を通って時間的曲線が戻ることはないのである．よって，例えば，ボイヤー－リンキスト・ブロック I の等位超曲面 $t=$ (定数) はブロック I で無彩的である (なぜなら，I において未来向き時間的曲線は $dt/ds>0$ である)．したがって M_s でも無彩的となる．ブロック II の等位超曲面 $t=$ (定数) についても同様である．しかし，ブロック III の各点では，その点を通る閉じた時間的曲線が存在するので，無彩的集合がブロック III と交わることはない．

時空の点 p からスタートした時間的**測地線**が，$I^+(p)$ の全ての点に到達するとは限らない．そこで，次の事実は有用である．点 p と点 q を結ぶ (未来向きの) 零的測地線を $\alpha: I\to M$ とする．点 q の任意の近傍 $\mathcal{U}$ に対して，p から $\mathcal{U}$ のある点を結ぶ (未来向き) 時間的測地線が存在する．この事実は，全ての零的ベクトルに対し，その任意の近くに時間的ベクトルが存在することと，微分方程式の解が初期条件 (つまり指数写像) に連続的に従属していることから分かる．

補題 3.10.4　時空 K^* の 2 点を p,q とする．もし $q\in$III ならば，p から q へ向かう未来向き時間的曲線が存在する．

証明　2.4 節において，III が悪性であることを見た．すなわち，任意に順序を付けた 2 点を，未来向き時間的曲線で結ぶことができるのである．よって，点 p を始点とする未来向き時間的曲線 β の終点が III 内にあることを示せばよい．ところで，点 p を通る内向の主要零的測地線は III に入る (Σ に出会うこともある)．これに対し，上記のように時間的曲線を作れば，それが求める β となる．□

この補題の事実を $[K^*\to \text{III}]$ と表すことにする．時間的向き付けを逆にすれば $[\text{III}'\to K^{*\prime}]$ となる．$^*K$ においては，任意の点に対して，外向の主要零的測地線で (過去方向に進み) III' に到達するものが存在する．

つまり $[\text{III}'\to {}^*K]$ である．これは，III' の任意の点を始点として $^*K$ の任意の点を終点とする，(Σ に出会わないように進む) 未来向き時間的曲線が $^*K$ 内に存在することを示している．もう一度時間的向き付けを逆にして，$[{}^*K'\to \text{III}]$ となる．

遅速カー時空 M_s の点 p に関する未来方向の集合 $I^+(p)$ を考える．点 p の近くでは，$I^+(p)$ を厳密にはっきりと記述することはできない．例えば，p がブロック I 内

にあるとき，外に向かう未来向き時間的曲線に沿って，M_s は次第にミンコフスキー空間に近づいて行く．つまり，$I^+(p)$ は普通のユークリッド空間になって行くのである．しかしながら，内側に向かうほど M_s は曲がるので，$I^+(p)$ も複雑に成って行く．(時間的曲線は，I における無彩的超曲面 $t=$ (定数) を 2 度横切ることはないのである．II における無彩的超曲面 $r=$ (定数) に関しても同様.)

しかるに，$I^+(p)$ が，p から〈遠くはなれた〉未来の事象を全て含んでいることを示すのは容易である．結論からいえば，III が悪性なので，もし $I^+(p)$ が III と共通点を持つならば，$I^+(p)$ は III を含むことになる．点 p が，ボイヤー－リンキスト領域 $\mathcal{D}(r_+)$ 内にあるとする．この中のどの象限に p があるとしても，上記の結果から，点 p から $\mathcal{D}(r_+)$ のブロック II 内の点 q へ向かう未来向き時間的曲線が存在する．そして，q からの曲線は，隣りのブロック III と III' へ行く．この手順を繰り返して，未来方向の全てのブロックを進むのである．

もし p が r_+ の領域 $\mathcal{D}(r_+)$ に含まれないときには，(2 つの短い地平面を除いて) ブロック III か III' に含まれることになる．この場合は簡単になる．

補題 3.10.5

(1) もし $p \in \mathcal{D}(r_+) \subset M_s$ ならば，$I^+(p)$ は，$\mathcal{D}(r_+)$ の境界と出会う長い地平面 $\mathbb{H}_-$ の未来側 C^+ を含む．(図 3.10 を見よ.)

(2) もし p がブロック III か III' に含まれるならば，$I^+(p)$ は，III や III' を隣り合うブロック II と分離している長い地平面 $\mathbb{H}_-$ の未来側に一致する．

これから (図 3.10 から分かるように), M_s のオブザーバーは，彼女の未来にあるボイヤー－リンキスト・ブロック内の全ての事象に到達することができるわけである．しかしながら，その旅行を，地平面を横断してしまった者に伝えることはできない．過去の集合 $I^-(p)$ についても同様なことを示すことができる．

次に，第 2 章に続き，年代的特性の崩壊を M_s に広げて調べることにする．

定義 3.10.6 時空 M の 1 点 p に関して，その点を通る閉じた時間的曲線が存在するなら，M は点 p において**悪性** (vicious) である，という．このような点の全体を $\mathcal{V}(M)$ で表すことにする．

この $\mathcal{V}(M)$ が空集合のときは，M は**年代的** (chronological) である，という (簡単

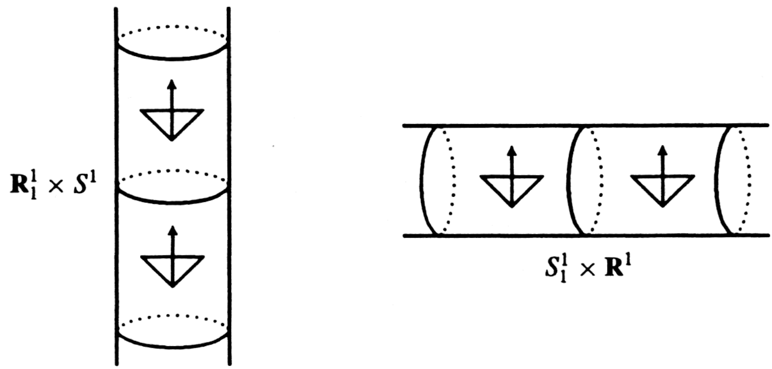


図 3.26　左の図の $R_1^1 \times S^1$ では，未来向き時間的曲線が無限に上に進んで行くので，年代的である．右の図の $S_1^1 \times R^1$では，断面の円が時間的であるので，悪性である．

にいえば，時間の流れが常識的なのである). さらに，$\mathcal{V}(M) = M$ のときには，M は悪性である，という．M の連結開集合はそれ自身で時空になっているから，上記の定義を連結開集合に当てはめることもできる．そこで，$\mathcal{V}(M)$ の補集合に含まれる点 p において年代的になっている，ということもある．

例えば，図 3.26 のようなローレンツ円柱を考える．積多様体 $R_1^1 \times S^1$ は，$\phi(x,t) = (x+1,t)$ として，$R_1^2/(\phi)$ と表すこともできる．同様に，$\psi(x,t) = (x, t+1)$ として，$S_1^1 \times R^1 = R_1^2/(\psi)$ とすることもできる．前者は年代的であり，後者は悪性である．

M の中の (全てではなく) いくつかの点が悪性である場合は，次のような悪性集合で記述することができる．

補題 3.10.7　任意の時空 M において，悪性集合 $\mathcal{V}(M)$ の連結成分は $I^-(p) \cap I^+(p)$ という形をしている．

証明　先ず，$I^-(p) \cap I^+(p)$ は点 p を通る閉じた時間的曲線上の点の集合であるから，$I^-(p) \cap I^+(p) \subset \mathcal{V}(M)$ となる．明らかに，$I^-(p) \cap I^+(p)$ は (空集合でなければ) 連結であり，また，$I^-(p)$ と $I^+(p)$ が開集合であるから，開集合でもある．

後は，ある点 z が $I^-(p) \cap I^+(p)$ と $I^-(q) \cap I^+(q)$ の両方に含まれるならば，この

2つの集合は一致することを示せばよい．対称的であるから，$z \in I^-(p) \cap I^+(p)$ を仮定して $z \in I^-(q) \cap I^+(q)$ を示す．この仮定から，未来向き時間的曲線により，z から p へ，p から m へ，m から q へと進むことができる(これにより $z \in I^-(q)$ となる)．そして，q から m へ，m から p へ，p から z へ，となる(これにより $z \in I^+(q)$ である)．よって $z \in I^-(q) \cap I^+(q)$ となる．□

連結成分 $C = I^-(p) \cap I^+(p)$ においては，この中の任意の2点(つまり事象)を，未来向き曲線と過去向き曲線の両方で結ぶことができる訳である．よって，C 内で事象の列を任意に $p_1, p_2, \ldots, p_n$ と与えたときに，これらをこの順に結ぶ未来向き時間的曲線が存在することになる(つまり，複雑なタイムトラベルが可能なのである)．

M_s の悪性集合を記述するのは容易である．第2章において，独立した時空として考えると，ブロック I と II は年代的であり，ブロック III は悪性であることを見た．悪性であることは内部的な性質であるから，M_s で考えても III は悪性である．これ以外に悪性な点は存在しない．

系 3.10.8 M_s 内の悪性集合の連結成分 $\mathcal{V}(M_s)$ はボイヤー－リンキスト・ブロック III である(よって他は年代的となる)．

証明 $p \in$ III とする．III においては，p を通る閉じた時間的曲線が存在するから，III $\subset \mathcal{V}(M_s)$ となる．これ以外の点では年代的となることを示す．

先ず，ブロック $B =$ I, II 内の点 p を考える．B はそれ自身を時空として年代的であるから，この1点から成る集合 $\{p\}$ は B で無彩的である．前に述べたように，$\{p\}$ は M_s でも無彩的となる．よって，M_s は p で年代的となる．

また，p が長い地平面 $\mathbb{H}$ 内にあるとする．$\mathbb{H}$ は M_s で無彩的であるから，$\mathbb{H}$ と $\mathcal{V}(M_s)$ の共通部分は空集合である．以上より，ブロック III の補集合に含まれる点は年代的となる．□

極限カー時空 の年代的特徴を調べるには，M_s の場合を変形すればよい．

前の節で定義した小カー時空 S_e と S_s は，共に悪性である．これを証明するには，点 $p \notin$ III を通る閉じた時間的曲線が存在することを示せばよい(図 3.23, 図 3.24 を見よ)．点 p を通る外向と内向の主要零的測地線を変形して，p から $q \in$ III，および $q' \in$ III から p へ向かう未来向き時間的曲線を作ることができる．III は悪性であるから，q から q' への未来向き時間的曲線が存在する．これらの曲線をつなげれば求める曲線となる．

ある時空 M が年代的でないとき，それの被覆時空 $\widetilde{M}$ を作れば年代的となる場合がある．例えば，図3.26の $S^1_1 \times R^1$ は悪性であるが，これの被覆時空であるミンコフスキー平面 R^2_1 は年代的である．

しかし，遅速カー時空 M_s においては，年代的特性を被覆時空で補うことはできない．M_s の被覆時空で年代的のものは存在しないのである．これを証明するには，M_s 上の，定数にホモトープな閉じた時間的曲線 τ に対し，その被覆時空への持上げも時間的な閉曲線となることを示せばよい．このような曲線は，2.4節において構成した，Ⅲ内の任意の2点 p, q を結ぶ時間的曲線から作成することができる．実際，領域 $r < 0$ において $p = q$ とすると，p を通り領域 $r < 0$ 内にある閉じた時間的曲線 τ ができる．位相的には，領域 $r < 0$ は $(-\infty, 0) \times R^1 \times S^2$ である．これは単連結であるから，τ は定数にホモトープとなるのである．

因果的特性の一般的な取り扱いについては，Beem and Ehrlich (1981), Carter (1971), Geroch (1970) 等を見よ．

第4章

カー測地線

微分幾何学全体を通して，曲率の次に重要な幾何学量が測地線である．時空においては，測地線は，自由落下する質点と光を記述している (質点の場合は未来向き時間的測地線，光の場合は未来向き零的測地線である)．カー・ブラックホールを理解するためには，ボイヤー－リンキスト・ブロック，地平面，軸，リング状特異領域，無限大 $r = \pm\infty$, 等それぞれにおける測地線を調べることが不可避となっている．測地線の軌道は，カー・ブラックホールの外側であるブロック I においてはケプラーの楕円と同様になることが予測できるが, 〈ホワイトホール〉 側の $r < 0$ ではどうなるだろうか．あるいは，ブロック II の地平面の間ではどうか．このような疑問は他にもある．地平面 $r = r_+$ を通って遅速カー・ブラックホールへ落下する宇宙飛行士は，崩壊してしまうのか．外部からブラックホールの核を通って $r < 0$ へ進むことは可能であろうか．

測地線の微分方程式 $x^{k''} + \Sigma\Gamma^k_{ij}x^{i'}x^{j'} = 0$ をそのまま解くことは，ほとんどの場合不可能である．測地線についての最も豊富な情報を持っているのが**第 1 積分**である．この式は，座標の 1 階微分を含み，測地線 γ に沿って定数となっている．必ず存在する第 1 積分は $\mathfrak{q} = <\gamma', \gamma'>$ である．キリング・ベクトル場からも第 1 積分が得られる．カー時空では，この時空特有の第 1 積分が 2 つ存在する．エネルギー E と軸のまわりの角運動量 L である．そして，さらにもう 1 つ存在する．**カーター定数** (Carter constant) Q と呼ばれるものである．(4 次元の) 時空においては，この 4 個の独立した第 1 積分が存在するので，(**完全積分可能**から) 測地線に関する十分な情報が得られ，いろいろな解析が可能となるのである．

先ず最初に，最大カー時空は mod Σ で**測地的完備**であることを示す．つまり，任意の測地線 γ は，リング状特異領域に到達しない限り，実数軸全体まで (アファイン・パラメータで) 拡張できるのである．

次に，**軌道のタイプ** (orbit type) (例えば，有界，フライバイ，等) で測地線を分類する．軌道のタイプと第 1 積分を関連づけるための基本的な道具として，$r - L$ 図がある．これは，角運動量 L と動径座標 $r(s)$ の範囲との関係を表示するものである．(幸いなことに，余緯度関数 $\vartheta(s)$ は，カー測地線においては簡単な形になっている.)

例外的な場合分けが増えるのを防ぐため，遅速カー・ブラックホールの時間的測地線 ($\mathfrak{q}=-1$) を中心に話しを進めることにする．(4.8 節で述べる) $r-L$ 図の関係の定性的な性質は，エネルギー E とカーター定数 Q の関係式で決定する (4.7 節)．そして，r 座標の知識を使い，ブラックホールを構成するボイヤー－リンキスト・ブロックを通過するときに測地線が描く大域的な軌道を検討する (4.10 節)．

最後に，特別な測地線を調べる．例えば，地平面，軸，赤道平面等にある測地線，カーター定数が負 $Q<0$ である測地線，カー・ブラックホールの中心へ近づく測地線，さらには，リング状特異領域と出会う測地線，等である．

4.1　第 1 積分

擬リーマン多様体 M 上の測地線の**第 1 積分** (first integral) とは，M の接バンドル TM 上の滑らかな実数値関数 k で，M の測地線 γ に関し，関数 $s\to k(\gamma'(s))$ が定数 $k(\gamma)$ となるものである．言い方を変えれば，M の各測地線 γ に (滑らかに) 定数 $k(\gamma)$ を対応させれば，この関数 $TM\to R$ ができる．つまり，$v\to k(\gamma_v)$ である．ここに γ_v は，初期速度が v の測地線を表す．座標を使って表現すれば，第 1 積分は，γ の座標で構成される 1 階の微分方程式と定数 $k(\gamma)$ で表されるわけである．

M の線素 ds^2 は，γ' に制限すれば定数 $<\gamma',\gamma'>=\mathfrak{q}$ となるから，第 1 積分の 1 つである．測地線の軌道はパラメータに依存しないから，$\mathfrak{q}$ として，$-1,0,+1$ を採用することにする．時間的測地線 γ を自由落下している粒子と解釈すれば，$\mathfrak{q}=-1$ は固有時をパラメータとしたことになり，γ' は 4 元速度となる．物理学を考えるときには，パラメータに粒子の質量 m を組み込んでおくのが便利な場合もある．すなわち，γ' がエネルギー運動量ベクトルで，$\mathfrak{q}=<\gamma',\gamma'>=-m^2$ とするのである (注意 1.6.4 を見よ)．

第 1 積分を作る主な拠り所は保存補題 (補題 1.3.7) である．この補題で，M のキリング・ベクトル場 X と測地線 γ に関して，$<\gamma',X>$ が γ に沿って一定であることが示されている．したがって，$v\in T_p(M)\subset TM$ に対して，関数 $v\to<v,X_p>$ は第 1 積分となっているのである．全てのカー時空には，その定義から，独立のキリング・ベクトル場が 2 個存在する．ボイヤー－リンキスト・ブロックのベクトル場 ∂_t と ∂_φ を拡張した $\tilde{\partial}_t$ と $\tilde{\partial}_\varphi$ である．これらから，2 個の第 1 積分を作ることができる．

定義 4.1.1　カー測地線 γ に対して:

(1) 定数 $E = - < \gamma', \tilde{\partial}_t >$ を**エネルギー** (energy) と呼ぶ.

(2) 定数 $L = < \gamma', \tilde{\partial}_\varphi >$ を，**軸のまわりの角運動量** (angular momentum around the axis) と呼ぶ.

これらの物理学的な用語は，カー外部 (ボイヤー－リンキスト・ブロック I) における $r \gg 1$ という，ほとんどミンコフスキー空間に近い場所におけるカー定常オブザーバーが，自由落下している質点 α を計測したものになっている．もちろん，もし α の質量が $m > 0$ で固有時が τ ならば，$\alpha' = d\alpha/ds = m\, d\alpha/d\tau$ である．よって，$r \gg 1$ においては，

$$L = < \alpha', \partial_\varphi > \sim m g_{\varphi\varphi} d\varphi/d\tau \sim m r^2 \sin^2 \varphi\, d\varphi/d\tau \sim m R^2 d\varphi/d\tau,$$

となる．ここに，R は軸からの距離を表している．これは，古典的なニュートン力学における角運動量の式である．また，

$$E = - < \alpha', \partial_t > \sim -m\, g_{tt} dt/d\tau \sim m\, dt/d\tau - 2m\mathrm{M}/r$$

である．1.6 節において，$m\, dt/d\tau$ の項は，α の**力学的エネルギー**とその**質量エネルギー**の両方を含んでいることを見た．また，$-2m\mathrm{M}/r$ の項は (係数 2 を除く), 質量 M を持つ星から距離 r だけ離れた点における粒子の，ニュートン力学における普通の意味の**ポテンシャル・エネルギー**を表している．

すなわち，第1積分の E は，相対性理論におけるエネルギーの保存則を表し，L は，カー時空において，自由落下している質点の軸角運動量を表しているのである．物理学においては，第1積分を**運動の定数** (constants of motion) ということもある．しかし数学的にみれば，この E と L は，粒子に対してだけではなく，全ての測地線に対して適用できる定数なのである．なお，L を L_z や Φ と書くこともある．

注意 4.1.2　E と L の符号について．

1. 非空間的測地線 γ を，∂_t が時間的である所，すなわちブロック I と，III のエルゴ球 (2.4 節) の外側で考える．ここでは $E \neq 0$ である．さらに，γ と ∂_t が時間的で未来向きならば，E は正のエネルギーを持ち，$E > 0$ となる．

2. 軸 A においては $\tilde{\partial}_\varphi = 0$ であるから，軸 A と出会う測地線では $L = 0$ となる．ある測地線において，$L > 0$ ならば，その測地線は**順行** (direct) である，$L < 0$ ならば**逆行** (retrograde) である，という．式 L の符号は，座標に関する $d\varphi/ds$ の符号と一致するとは限らない (下記の L の式を見よ).

3. 測地線のパラメータを $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(cs + d)$, $c, d \in R$ と変換したとき，エネルギーと角運動量は $\tilde{E} = cE$, $\tilde{L} = cL$ となる．とくに，パラメータを逆 $(c = -1)$ にすると，E と L の符号が逆になる．時間的測地線と空間的測地線については，L と E を正規化して，$\mathsf{q} = -1, +1$ とする．零的測地線に関しては，比 $E : L$ のみが重要となる．‖

ここでの目的は，第 1 積分 L, E を使い，任意の測地線に対するボイヤー－リンキスト座標 $\varphi(s)$ と $t(s)$ の**第 1 階**微分方程式を作ることにある．まず，$\gamma' = r'\partial_r + \vartheta'\partial_\vartheta + \varphi'\partial_\varphi + t'\partial_t$ を E と L の定義式に代入すると，

$$
\begin{aligned}
-E &= t' g_{tt} + \varphi' g_{t\varphi}, \\
L &= t' g_{t\varphi} + \varphi' g_{\varphi\varphi}
\end{aligned}
$$

となる．この 2 式の係数が作る行列式は $g_{tt}g_{\varphi\varphi} - g_{\varphi t}^2 = -\Delta S^2$ となり，軸を除いてゼロでないから，上の式は t' と φ' について解くことができる．だが，その解には計量の成分 $g_{\varphi\varphi}$, g_{tt}, $g_{\varphi t}$ が含まれていて複雑であり，使いにくい形である．

第 2 章で行ったように，計量恒等式 (補題 2.1.1) を用いて標準ベクトル場 $V = (r^2 + a^2)\partial_t + a\partial_\varphi$ と $W = \partial_\varphi + aS^2\partial_t$ で表現すれば，見やすい形になるはずである．この V と W は，それぞれ ∂_t と ∂_φ の〈回転版〉であるから，V, W と γ' のスカラー積で E と L を記述することができることになる．そこで，次のように定義する．

定義 4.1.3　測地線 γ のエネルギーを E, 角運動量を L とするとき，

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(r) &= - < \gamma', V > = (r^2 + a^2)\, E - La, \\
\mathbb{D}(\vartheta) &= < \gamma', W > = L - EaS^2,
\end{aligned}
$$

とおく．

(この式は，V と W の定義式を代入用いて計算したものであり，第 2 章と同様に，$S = \sin\vartheta$, $C = \cos\vartheta$ と置いている.) この E と L に代わる式は，定数ではないが，変数はそれぞれ，大域的に定義された関数 r, ϑ のみなのである．

補題 4.1.4　ボイヤー－リンキスト座標 で表示した測地線に関して，

$$
\begin{aligned}
&(1) \qquad -at' + (r^2 + a^2)\varphi' = \mathbb{D}/S^2 \\
&(2) \qquad t' - aS^2\varphi' = \mathbb{P}/\Delta
\end{aligned}
$$

が成立する．

証明　上の $\mathbb{P}$ と $\mathbb{D}$ の定義式に

$$\gamma' = r'\partial_r + \vartheta'\partial_\vartheta + \varphi'\partial_\varphi + t'\partial_t$$

を代入し，補題 2.1.1 のあとで求めた計量恒等式のベクトル表現を使えばよい．実際，(1) 式については，

$$\begin{aligned}\mathbb{D} = &< \gamma', W >= \varphi' < \partial_\varphi, W > + t' < \partial_t, W > \\ &= \varphi'((r^2 + a^2)S^2) + t'(-aS^2)\end{aligned}$$

となる．(2) 式については，

$$\begin{aligned}-\mathbb{P} = &< \gamma', V >= \varphi' < \partial_\varphi, V > + t' < \partial_t, V > \\ &= \varphi'(\Delta a S^2) + t'(-\Delta)\end{aligned}$$

となる．□

この補題の (1) 式は，$S = 0$ である軸においても意味を持つ．なぜなら，測地線 γ が軸と出会うなら，$L = 0$ であり，$\mathbb{D}/S^2 = (L - aS^2E)/S^2$ は $-aE$ となるのである．(2) 式の分母にある Δ は，ボイヤー－リンキスト座標のみで考えているので，ゼロにはならない．

命題 4.1.5　ボイヤー－リンキストの，φ と t に関する，測地線の第 1 階微分方程式は

$$\begin{aligned}\rho^2\varphi' &= \mathbb{D}/S^2 + a\mathbb{P}/\Delta, \\ \rho^2 t' &= a\mathbb{D} + (r^2 + a^2)\mathbb{P}/\Delta\end{aligned}$$

となる．ここに，$\mathbb{D} = \mathbb{D}(\vartheta) = L - EaS^2$, $\mathbb{P} = \mathbb{P}(r) = (r^2 + a^2)E - La$ である．

証明　補題 4.1.4 の方程式は，成分の行列式が $\rho^2 > 0$ であるから，φ' と t' について解くことができる．□

したがって，任意の点 $\gamma(s_0)$ において，(線形同型な) 対応 $L, E \leftrightarrow \mathbb{P}_0, \mathbb{D}_0 \leftrightarrow \varphi'_0, t'_0$ が存在するのである．

この命題では，φ' と t' を，r と ϑ のみの関数として表している．これは，$r(s)$ と $\vartheta(s)$ が与えられたとき，この方程式から $\varphi(s)$ と $t(s)$ に関する積分の式が得られることになるので，あとで測地線を構成するときに役立つものである．

エルゴ球に関して，ロジャー・ペンローズは巧妙な思考実験を行った (Penrose 1969). ブラックホールからエネルギーを取り出そう，というのである．カー・ブラックホールの外部で，座標ベクトル場 ∂_t が時間的で未来向きになっている，時間的向き付けが普通の場所，すなわちエルゴ球 $\mathcal{E}$ の外側を考える．そこで，質点 α が，$r \gg 1$ から $\mathcal{E}$ へ落下しているとする．α は正のエネルギー $E_\alpha > 0$ を持っているわけだが，上で述べたように，$\mathcal{E}$ の内部では，(2.2 節で見たように) ∂_t が空間的となるので，このエネルギーは負となる．ここで，α が，自由落下する 2 個の質点 β と γ に分裂したとする．この分裂においてもエネルギー運動量が保存することから，$\alpha' = \beta' + \gamma'$ となる．スカラー積をとれば，エネルギーと運動量も保存されることが分かる．すなわち，$E_\alpha = E_\beta + E_\gamma, L_\alpha = L_\beta + L_\gamma$ となる．ペンローズ過程では，うまく分裂させ，β が負のエネルギー $E_\beta < 0$ を持って地平面 $r = r_+$ に向かうようにし，γ は定常性限界面から普通の外部領域へ戻すようにする．こうすると，γ **のエネルギーは，落とした時の** α **よりも増えている**のである．実際，$E_\gamma = E_\alpha - E_\beta$ であるから，$|E_\beta|$ だけエネルギーが増えることになる．すなわち，ブラックホール地平面の内側という劫火の世界では，粒子 β を飲み込み，ブラックホールの質量 M は $|E_\beta|$ だけ減少するのである．

また，ブロック I において標準ベクトル場 V は時間的で未来向きであるから，

$$0 >< \beta', V >= (r^2 + a^2) < \beta', \partial_t > + a < \beta', \partial_\varphi >$$
$$= -(r^2 + a^2)E_\beta + aL_\beta$$

となる．よって，$L_\beta < E_\beta < 0$ であり，γ は，β よりも大きい角運動量を持つ．これで，ブラックホールの全角運動量 Ma の減少に対するバランスがとれているのである．詳しくは，Wald (1984), Chandrasekhar (1983) を見よ．

4.2　カーター定数

この節の目的は，カー測地線の 4 番目の第 1 積分を求めることである．先ず，一番簡単な $\mathsf{q} =< \gamma', \gamma' >$ を座標関数 $r(s)$ と $\vartheta(s)$ で表すことから始める．

補題 4.2.1　カー時空の測地線 γ に関して，

$$\mathsf{q}\rho^2 = \frac{\rho^4}{\Delta}{r'}^2 + \rho^4 {\vartheta'}^2 - \frac{\mathbb{P}^2}{\Delta} + \frac{\mathbb{D}^2}{S^2}$$

が成立する．ここに，

$$\mathsf{q} =< \gamma', \gamma' >, \mathbb{P} = (r^2 + a^2)E - aL, \mathbb{D} = L - aES^2$$

である．

証明　ボイヤー－リンキスト座標に関して

$$\gamma' = r'\partial_r + \vartheta'\partial_\vartheta + \varphi'\partial_\varphi + t'\partial_t$$

である．ここで，$\partial_r, \partial_\vartheta, V, W$ は各々直交しているから，$\varphi'\partial_\varphi + t'\partial_t$ を

$$<\gamma', V> / <V, V> V + <\gamma', W> / <W, W> W$$

で置き換えることができる．定義から $\mathbb{P} = -<\gamma', V>, \mathbb{D} = <\gamma', W>$ であり，補題 2.1.3 から $<V, V> = -\Delta\rho^2$, $<W, W> = \rho^2 S^2$ である．よって，

$$\gamma' = r'\partial_r + \vartheta'\partial_\vartheta - \frac{\mathbb{P}}{\Delta\rho^2}V + \frac{\mathbb{D}}{\rho^2 S^2}W$$

を得る．したがって，

$$\mathfrak{q} = <\gamma', \gamma'> = \frac{\rho^2}{\Delta}r'^2 + \rho^2\vartheta'^2 + \frac{\mathbb{P}^2}{\Delta\rho^2} + \frac{\mathbb{D}^2}{\rho^2 S^2}$$

となり，これから与式が出る．□

この補題は，連続性から，地平面や軸と交わる測地線 γ についても成立する．軸の場合は，$L = 0$ であるから，$\mathbb{D}^2/S^2$ は $a^2E^2S^2$ となる．

補題 4.2.1 の式において，左辺を $\mathfrak{q}r^2 + \mathfrak{q}a^2C^2$ と変形し，全体を整理すると，

$$-(1/\Delta)\rho^4 r'^2 + \mathfrak{q}r^2 + \mathbb{P}^2/\Delta = \rho^4\vartheta'^2 - \mathfrak{q}a^2C^2 + \mathbb{D}^2/S^2$$

となる．この式の左辺で，Δ と $\mathbb{P}$ は r のみの関数である．右辺については，$S, C, \mathbb{D}$ は ϑ のみの関数である．すなわち，係数 ρ^4 を別にして，左辺は r だけの関数であり，右辺は ϑ だけの関数である．したがって，この式が完全に分離するなら，両辺とも**定数**となる．しかるに，Brandon Carter (1968) によると，分離されていなくてもつねに両辺は定数となっているのである．

次の定理により，カー測地線の研究に重要な役割をする関数 $R(r)$ と $\Theta(\vartheta)$ を導入する．

定理 4.2.2(カーターの定理)　カー測地線 γ の座標 r と ϑ に関して，

(1)　$\rho^4 r'^2 = R(r) = \Delta(\mathfrak{q}r^2 - \mathcal{K}) + \mathbb{P}^2$

(2)　$\rho^4\vartheta'^2 = \Theta(\vartheta) = \mathcal{K} + \mathfrak{q}a^2C^2 - \mathbb{D}^2/S^2$

を満たす定数 $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\gamma$ が存在する．

これらの測地線の第 1 階方程式は，それぞれ，r**ー方程式** (あるいは**動径方程式** (radial equation)), ϑ**ー方程式** (あるいは**余緯度方程式** (colatitude equation)) と呼ばれる．また，$\mathcal{K}$ はカーター定数と呼ぶことにする．

この定理を証明する準備として，特別な場合について調べてみる．この定理に含まれる座標は r と ϑ のみであるから，状況を調べる場所としては**極平面** P が (r と ϑ を座標とする全測地的曲面なので) 手頃である (2.3 節を見よ).

ボイヤー－リンキスト座標で表したカー線素を P に制限すると $ds^2 = \rho^2/\Delta dr^2 + \rho^2 d\vartheta^2$ となる．測地線の微分方程式をラグランジュの方法 (1.3 節) で表すと，

$$((\rho^2/\Delta)r')' = \frac{1}{2}[\partial_r(\rho^2/\Delta)r'^2 + \partial_r(\rho^2)\vartheta'^2],$$
$$(\rho^2\vartheta')' = \frac{1}{2}[\partial_\vartheta(\rho^2/\Delta)r'^2 + \partial_\vartheta(\rho^2)\vartheta'^2]$$

となる．ここに，∂_r は ∂/∂_r の省略である．これらの偏微分方程式を検討すると，最初の式はやっかいであるが，2 番目の式は，$\rho^2 = r^2 + a^2C^2$ と Δ の変数は r のみであるから，

$$(\rho^2\vartheta')' = -a^2SC[r'^2/\Delta + \vartheta'^2]$$

となる．

しかるに $\mathfrak{q} = <\gamma', \gamma'> = \rho^2[\ r'^2/\Delta + \vartheta'^2]$ であるから，r' を消して，

$$(\rho^2\vartheta')' = -\mathfrak{q}\rho^{-2}a^2SC$$

となる．この式は，

$$2(\rho^2\vartheta')(\rho^2\vartheta')' = -2\mathfrak{q}a^2C(-S\vartheta')$$

とすれば分かるように，**積分可能**である．任意定数を $\mathcal{K}$ としてこの式を不定積分したものが，次の補題の 2 番目の式である．

補題 4.2.3　極平面 P 上の任意の測地線に対して，$\mathcal{K}$ を定数とし，

(1)　　$\rho^4 r'^2 = \Delta(\mathfrak{q}r^2 - \mathcal{K})$

(2)　　$\rho^4 \vartheta'^2 = \mathfrak{q}a^2C^2 + \mathcal{K}$

が成立する．

証明　(1) 式を得るためには，$\mathfrak{q} = \rho^2[r'^2/\Delta + \vartheta'^2]$ に ρ^2/Δ を掛け，(2) 式を使えば

$$\mathfrak{q}\rho^2\Delta = \rho^4 r'^2 + \Delta(\mathfrak{q}a^2C^2 + \mathcal{K}\ )$$

となる．よって，

$$\rho^4 r'^2 c = \Delta \quad \mathfrak{q}\rho^2 - a^2C^2 - \mathcal{K}\ ] = \Delta(\mathfrak{q}r^2 - \mathcal{K}\ )$$

を得る．□

この補題の微分方程式は，定理 4.2.2 **の** r**ー方程式と** ϑ**ー方程式の特別な場合になっている**．実際，測地線 γ が極平面上にあるなら，γ' は ∂_φ と ∂_t に直交するので $L = E = 0$ となる．よって $\mathbb{P} = \mathbb{D} = 0$ であり，定理 4.2.2 の関数 $R(r)$, $\Theta(\vartheta)$ は，それぞれ，$\Delta(-\mathcal{K} + \mathfrak{q}r^2)$, $\Theta(\vartheta) = \mathcal{K} + \mathfrak{q}a^2C^2$ となる．

この極平面の結果は，一般的な場合に拡張することができる．くわしくは付録 C を見よ．

第 1 積分 $\mathcal{K}$ を，関数 $\mathcal{K} : TM \to R$ として表すことを考える．先ず，ϑ は，任意のカー時空上で大域的に定義された関数であった．これは，極では滑らかではないが，そこで，方向微分 $v[\vartheta]$ は矛盾なく定義することができる．また，前に記したように，$\mathbb{D}^2/S^2$ はつねに有限である．よって，ϑー方程式は

$$\mathcal{K}(v) = \rho^4 v[\vartheta]^2 + \mathbb{D}^2/S^2 - \mathfrak{q}a^2C^2$$

となる (補題 4.2.7 も参照せよ)．

定理 4.2.2 の 2 つの方程式を加えれば補題 4.2.1 の式を得る．すなわち，**これらの式の** 2 **つからもう** 1 **つの式が導出できる**，という関係になっているのである．

例 4.2.4　主要零的測地線 α に関する第 1 積分 $\mathfrak{q}$, L, E, $\mathcal{K}$ を求めることにする．先ず，明らかに $\mathfrak{q} = 0$ である．ボイヤーーリンキストのパラメータを用いると $\alpha' = \pm\partial_r + \Delta^{-1}V$ となる．ここに $< V, \partial_\varphi >= \Delta a S^2$, $< V, \partial_t >= -\Delta$ であるから

$$L =< \alpha', \partial_t >= aS^2, \quad E = - < \alpha', \partial_\varphi >= +1$$

となる．(ここで $E = +1$ とするのは，単なる便宜上のことである．L: E の比が重要なのである.) 特別な場合が 2 つある．

第 1 に，地平面内の零的測地線は主要測地線なので，$L = E = 0$ となる．実際，V の積分曲線は，H 上で，ϑ_t と ∂_φ の両方に直交しているのである．第 2 に，軸内の

主要零的測地線の場合には，$L=0$ であるが，H 内に存在しないならば，$E \neq 0$ となる．静止光子は $H \cap A$ にある．

なお，**全ての主要零的測地線では $\mathcal{K}=0$ となっている**．実際，上記の場合には $\mathbb{D}=L-aES^2=0$ となり，これから，定理 4.2.2 の ϑ−方程式より $\mathcal{K}=0$ を得るのである．(補題 4.2.8 から，これが最小値で，それを与えるのが零的測地線であることも分かる.) ‖

測地線は，始点 $\gamma(s_0)$ とそこにおける接ベクトル $\gamma'(s_0)$ を初期値として決定される．時空の場合には，この 2 つを決定するのが 4 つの座標値である．カー時空の場合では，$\gamma'(s_0)$ の座標の代わりに 4 個の第 1 積分を使うことができる．

補題 4.2.5　軸以外のボイヤー−リンキスト・ブロック内の点からスタートする測地線 γ は，初期値 $r_0, \vartheta_0, \varphi_0, t_0$, および符号 $\mathrm{sgn}\, r_0'$, $\mathrm{sgn}\, \vartheta_0'$, それに第 1 積分 q, E, L, $\mathcal{K}$ で決定される．

証明　これらの数値により，初期値 ρ_0^2, $\mathbb{P}_0$, $\mathbb{D}_0$, Δ_0 それに定数 $\mathcal{K}$ が決まる．定理 4.2.2 から，$(r_0')^2$ と $(\vartheta_0')^2$ が決まり，符号によって r_0' と ϑ_0' が決定される．また，命題 4.1.5 から，φ_0' と t_0' が決まるので，座標による測地線の初期値が決定されることになる．□

次に，**存在**について検討する．第 1 積分 q, L, E, $\mathcal{K}$ は，接バンドル TM 上で定義された関数である．したがって，$\mathbb{P}$, $\mathbb{D}$ や R, Θ も，同じ接バンドルの関数になっている．例えば，点 p における接ベクトルを v とすると，

$$E(v) = -<v, \tilde{\partial}_t>, \quad \mathbb{D}(v) = L(v) - aE(v)\sin^2(\vartheta(p))$$

となる．

命題 4.2.6　ボイヤー−リンキスト・ブロックの軸以外の点を p_0 とする．任意の数 q^*, L^*, E^*, $\mathcal{K}^*$ をとる．ただし，それに対応する R と Θ の値は，p_0 で非負となる，とする．このとき，p_0 を始点とし，q^*, L^*, E^*, $\mathcal{K}^*$ を第 1 積分とする測地線 γ が存在する．さらに，符号は，$r'(0)^2 \neq 0$ ならば，$r'(0)$ で与えられる．$\vartheta'(0)$ も同様である.

証明　点 p_0 における接ベクトル v で，$\mathsf{q}(v)=\mathsf{q}^*$, $L(v)=L^*$, $E(v)=E^*$, $\mathcal{K}(v)=\mathcal{K}^*$ を満たすものが存在することを示せばよい．先ず，$v = A\partial_r + B\partial_\vartheta + C\partial_\varphi + D\partial_t$ と

置く．測地線 γ_v に対して $\gamma'(0) = v$ なので，$A = r'(0)$, $B = \vartheta'(0)$, $C = \varphi'(0)$, $D = t'(0)$ である．

4.1 節のように，L^* と E^* で C と D が一意に決定し，$< v, \partial_t >= -E^*$, $< v, \partial_\varphi >= L^*$ である．よって，$\mathbb{P}_0$ と $\mathbb{D}_0$ も決まる．次に，定理 4.2.2 にある R と Θ の定義から，(q と $\mathcal{K}$ を q^* と $\mathcal{K}^*$ に置き換えて) A^2 と B^2 を決定する．(仮定として $R \geq 0$, $\Theta \geq 0$ となっているので，これらの数は非負である.) これらがゼロでない場合，A と B の符号は独立して指定できる．

r の方程式と ϑ の方程式を加えて補題 4.2.1 の式を得る．これが，方程式 $< v, v >= \mathsf{q}^*$ を座標で表示したものなのである．最後に，上記の $\mathcal{K}$: $TM \to R$ の式から ($v[\vartheta]$ を B に置き換えて) $\mathcal{K}(v) = \mathcal{K}^*$ となる． □

この補題は，(軸，赤道平面，地平面を除いて) 4 個の第 1 積分が独立であることを示している．

いま，曲線 β が，ある定数 q, E, L, $\mathcal{K}$ により 4 個の第 1 積分の式 (命題 4.1.5 と定理 4.2.2) を満たしているとする．このとき，γ は測地線であろうか．ほとんどの場合，答えは〈イエス〉である．しかしながら，第 1 積分の方程式が**第 1 階**の微分方程式なので,〈ノー〉の場合もある．方程式の解として，一般解が包絡する特異解も存在する．特異解の場合には測地線にはならないのである．これについては 4.3 節で述べる．いずれにせよ，カー時空の探求に第 1 積分を使っても失うものはなにもない．十分な情報が得られるのである．実際，一般の測地線の方程式

$$x^{k\prime\prime} + \Sigma \Gamma^k_{ij} x^{i\prime} x^{j\prime} = 0, \qquad (1 \leq k \leq 4)$$

は第 2 階の非線形微分方程式系なので，複雑過ぎて，実際の適用はほとんど不可能といってよい．これに対し，第 1 積分の方程式は，はるかに単純である．命題 4.1.5 の φ と t の式は，積分できて，$r(s)$ と $\vartheta(s)$ を与える．カーターの定理 (定理 4.2.2) に現れる $r(s)$ と $\vartheta(s)$ の式は，自明でなくても，扱いやすいものである．これらを組み合わせたものは (同じ関数 $\rho^2 > 0$ により) 極小であり，関数 $R(r)$ は 4 次多項式で，$\Theta = \Theta(\vartheta)$ は $S = \sin\vartheta$ と $C = \cos\vartheta$ の関数とみなすことができる．

測地線 γ の第 1 積分 $\mathcal{K}$ を幾何学的に解釈すると，これは，γ に沿って，主要平面 Π と γ' の関係を与えるものである．特別な場合として γ' が Π に含まれる場合には，γ を**主要測地線** (principal geodesic) と呼ぶことにする．一般に，γ' の，Π 方向と $\Pi^\perp$ 方向の成分を，それぞれ，γ'_Π, $\gamma'_\perp$ と書くことにする．なお，Π は時間的，$\Pi^\perp$ は空間的である．$\Pi^\perp$ に関するスカラー積が正定値であることを強調するため，$x \in \Pi^\perp$ に対し，$< x, x >$ を $|x|^2$ と書くこともある．

補題 4.2.7　$\mathcal{K}$, q が測地線 γ の第 1 積分であるとき，

$$\mathcal{K} = \rho^2|\gamma'_{\perp}|^2 - \mathsf{q}a^2C^2 = \mathsf{q}r^2 - \rho^2 < \gamma'_{\Pi}, \gamma'_{\Pi} >$$

が成立する．ここに，ρ^2 と $C = \cos\vartheta$ は γ の座標 r, ϑ の関数である．

証明　ボイヤー－リンキストの記号を使えば，主要零的測地線の接ベクトルは $\pm\partial_r + \Delta^{-1}V$ となる．ゆえに $\Pi = \mathrm{Span}\{\partial_r, V\}$ である．したがって，補題 4.2.1 の証明の中の γ' の式から，

$$\gamma'_{\Pi} = r'\partial_r - \frac{\mathbb{P}}{\Delta\rho^2}V, \qquad \gamma'_{\perp} = \vartheta'\partial_\vartheta + \frac{\mathbb{D}}{\rho^2S^2}W$$

となる．よって，

$$< \gamma'_{\Pi}, \gamma'_{\Pi} >= (\rho^2/\Delta)r'^2 - \mathbb{P}^2/(\rho^2\Delta^2), \qquad |\gamma'_{\perp}|^2 = \rho^2\vartheta'^2 + \mathbb{D}^2/(\rho^2S^2)$$

である．これから，$\mathcal{K}$ の第 1 積分は

$$\mathcal{K} = \rho^4\vartheta'^2 + \mathbb{D}^2/S^2 - \mathsf{q}a^2C^2 = \rho^2|\gamma'_{\perp}|^2 - \mathsf{q}a^2C^2$$

となる．右辺は $\mathsf{q} =< \gamma'_{\Pi}, \gamma'_{\Pi} > + |\gamma'_{\perp}|^2$ から得られる．□

r と ϑ は大域的に定義されるから，$\mathcal{K}$ の式も大域的に与えられる．$|\gamma'_{\perp}|$ と $< \gamma'_{\Pi}, \gamma'_{\Pi} >$ は，正規直交基底を使って計算できる．例えば，ボイヤー－リンキスト標構場 $\{E_i\}$ (2.6 節) を使えば，E_0, E_1 が Π を張り，E_2, E_3 が $\Pi^{\perp}$ を張ることになる．また，Π の基底として，(例えば $\pm\partial_t + \Delta^{-1}V$ などの) 零的ベクトル n_1, n_2 を使うと，

$$\gamma'_{\Pi} =< \gamma', n_2 > / < n_1, n_2 > n_1 + < \gamma', n_1 > / < n_1, n_2 > n_2$$

となるから，対称的な式

$$< \gamma'_{\Pi}, \gamma'_{\Pi} >=< \gamma', n_1 >< \gamma', n_2 > / < n_1, n_2 >$$

が得られる (Walker and Penrose 1970 を参照せよ)．

パラメータを $\gamma(cs + d)$ に変えると，$\mathcal{K}$ は $c^2\mathcal{K}$ となる．γ' を任意の接ベクトル v に置き換えて，$\mathcal{K}$ を TM の関数とみなすことにする．これから，q の場合と同様にして，TM の各ファイバー (接空間) 上に双線形形式 $\mathcal{K}(v, w)$ を作ることができる．

系 4.2.8　カー測地線を γ と置く．

(1) γ が時間的ならば $\mathcal{K} \geq 0$ である．$\mathcal{K} = 0$ となる必要十分条件は，γ が赤道平面の主要測地線となることである．

(2) γ が零的ならば $\mathcal{K} \geq 0$ である．$\mathcal{K} = 0$ となる必要十分条件は，γ が主要となることである．

(3) γ が空間的ならば $\mathcal{K} \geq -\mathfrak{q}a^2$ である．$\mathcal{K} = -\mathfrak{q}a^2$ となる必要十分条件は，γ が軸上にあることである．

証明　(1) $\mathfrak{q} < 0$ であるから $\mathcal{K} = \rho^2|\gamma_\perp|^2 + |\mathfrak{q}|a^2C^2 \geq 0$ となる．等号が成立するのは，$|\gamma_\perp|$ と C の両方がゼロとなるときである．

(2) もし $\mathfrak{q} = 0$ ならば $\mathcal{K} = \rho^2|\gamma_\perp| \geq 0$ となる．

(3) $\mathfrak{q} > 0$ であるから $\mathcal{K} = \rho^2|\gamma'_\perp|^2 - \mathfrak{q}a^2C^2 \geq -\mathfrak{q}a^2$ となる．等号が成立するのは，$|\gamma_\perp|^2 = 0$ かつ $C^2 = 1$ となるときである．□

エネルギーと角運動量の両方とも持たないカー測地線は，非常に多く存在する．このやっかいな測地線 γ は，全測地的部分多様体，つまり，極平面，地平面，軸の中に存在している．実際，もし γ が H や A の中にないならば，ボイヤー－リンキスト座標が適用できて，命題 4.1.5 から，

$$L = E = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P} = \mathbb{D} = 0 \Leftrightarrow t' = \varphi' = 0$$

となる．よって，γ が極平面に接しているならば，それは極平面に含まれているのである．

零的の場合には次のようになる．(静止光子とは，地平面内にある零的測地線であることを注意しておく.)

補題 4.2.9　零的なカー測地線を γ と置く．

(1) $\mathcal{K} = 0$ となる必要十分条件は γ が主要となることである．

(2) $L = E = 0$ で $\mathcal{K} \neq 0$ (よって $\mathcal{K} \neq 0$) となる必要十分条件は，γ が (空間的) 極平面に含まれることである．

(3) $\mathcal{K} = L = 0$ で $E \neq 0$ となる必要十分条件は，γ が $A - H$ に含まれることである．

(4) $L = E = \mathcal{K} = 0$ となる必要十分条件は，γ が静止光子となることである．

証明　(1) これは，系 4.2.8 より分かる．

(2) γ が極平面 P 内にあるならば，$L = E = 0$ である．しかし，ベクトル $\pm\partial_r + \Delta^{-1}V$ が P に横断的であるから，γ は主要測地線ではない．逆に，$L = E = 0$ ならば，γ は, P, A, H のどれかに含まれる．しかるに，P 以外の A か H に含まれる零的測地線は主要測地線となる．

(3) γ が A に含まれるならば，γ は主要測地線であり $L = 0$ である．逆は，系 4.2.8 から分かる．また，軸内の零的測地線では，同時に H に含まれているのでなければ $E \neq 0$ である．

(4) 静止光子が主要零的測地線で (地平面では，V が ∂_t と ∂_φ に直交するので) $L = E = 0$ であることは，以前に示してある．逆に，γ が主要測地線で $L = E = 0$ ならば，γ は H か A に含まれる．しかるに，上記の議論を繰り返し，A 内にあるなら H に含まれることにもなる．よって γ は静止光子である．□

すなわち，全ての第1積分がゼロである測地線として静止光子は特徴づけることができるのである．

第1積分が作る関数も第1積分となる．特に，$\mathcal{K} = Q + (L - aE)^2$ として定義したものが，今後必要になる第1積分である．この Q も，$\mathcal{K}$ と同様に，**カーター定数** (Carter constant) と呼ぶことにする．両方とも，それなりの便利さがある．$\mathcal{K}$ の方が式が簡単で，**非空間的測地線に関しては (ϑー方程式として) $\mathcal{K} \geq 0$ が成立**している．しかし，幾何学的な意味としては Q の方が見やすい．例えば，この章の後半で述べるが，$r = 0$ の近くにおける測地線のふるまい (つまり，リング状特異領域を，$r < 0$ から $r > 0$ へと横切る場合) を調べるには Q が必要となる．また，次の結果から分かるように，変数 ϑ が測地線に与える影響は Q が記述しているのである．

補題 4.2.10　定理 4.2.2 の関数 Θ は，カーター定数 Q を使うと，

$$\Theta(\vartheta) = Q + C^2[\, a^2(E^2 + \mathfrak{q}) - L^2/S^2 \,]$$

となる．

4.3　方程式と拡張

この章の目的の 1 つは，M_f, M_e, M_s などの最大カー時空 M においては，全ての測地線が (リング状特異領域 Σ と交点を持たない限り) 完備となることを示すことである．つまり，次の定理を証明する．

定理 4.3.1　最大カー時空は $\mathrm{mod}\ \Sigma$ で完備である．

そのためには，$b < \infty$ として，測地線 γ: $[\, s_0, b) \to M$ を考えたとき，区間 $[\, s_0, \infty)$ へ拡張できることを示せばよい．ただし，拡張してもリング状特異領域と交点を持たない，とする．そして，パラメータを $s \to 2s_0 - s$ と変換し，区間 $(a, s_0]$ を考えれば，定理の証明が終わる．この節では，少なくても地平面やリング状特異領域に出会うまでは，測地線が拡張できることを示す．

先ず基本となるのが，擬リーマン多様体で成立する次の局所的な拡張である．**任意の測地線** γ: $[\, s_0, s_1) \to M$ **に関して，** $s \to s_1$ **のとき** $\gamma(s)$ **が点** $p \in M$ **に近づくなら，** γ **は，測地線として区間** $[\, s_0, s_1 +)$ **まで拡張でき，** $\gamma(s_1) = p$ **となる**．

また，第 1 章で示したように，測地線 γ が 1 点で閉じた全測地的部分多様体 P に接しているなら，γ は P に含まれている．カー時空の軸 A と地平面 H は閉じた全測地的部分多様体であるから，カー測地線を調べるには，2 つに分けることが必要となる．

- 測地線が A や H に完全に含まれている場合．
- 上記以外の場合．このとき，測地線は**正則** (regular) である，と呼ぶ．

正則な測地線が A や H と交点を持つ場合もある．この場合は，上記のことから，横断的に交わることになる．すなわち，正則な測地線 γ: $[\, s_0, s_1) \to M$ が，$s \to s_1$ のときに A (あるいは H) の点 p に近づくならば，γ は s_1 よりも拡張でき，$p = \gamma(s_1)$ となり，ベクトル $\gamma'(s_1)$ は A (あるいは H) に接していないのである．

このことから，測地線の拡張問題は次のように分けることができる：

- 測地線 γ (とその拡張) が A や H に含まれる場合．
- 正則の場合．すなわち，測地線 γ: $[\, s_0, b) \to M$ の始点 $p = \gamma(s_0)$ が，ボイヤー–リンキスト・ブロック内の軸以外の場所にある場合．(この場合，測地線は，ボイヤー–リンキスト・ブロックで軸以外の場所を必ず通る．そこで，必要ならパラメータを変換し，その点を始点とするのである.)

正則の場合は 4.4 節で証明する．それ以外の場合は，別な議論が必要なので，4.11 節 (軸の場合) と 4.12 節 (地平面の場合) に先送りすることにする．

先ず，拡張を構成するのに必要となる，測地線に関する基本的な方程式を作る．この節で述べる範囲ではボイヤー－リンキスト座標で十分である．しかし，地平面まで測地線を拡張するときには，カー座標が必要となるのである．

系 4.3.2　カー・スター座標 φ^* と t^* に関し，測地線は第 1 階方程式

$$\rho^2\varphi^{*\prime} = S^{-2}\mathbb{D} + a\Delta^{-1}[\mathbb{P} \oplus (\pm\sqrt{R})],$$
$$\rho^2 t^{*\prime} = a\mathbb{D} + (r^2 + a^2)\Delta^{-1}[\mathbb{P} \oplus (\pm\sqrt{R})]$$

を満たす．ここに，$\pm$ は r' の符号である．また，$\oplus$ の符号は (いまの場合) プラスを表している．スター・カー座標 ${}^*\varphi$, ${}^*t$ の場合には，ここの符号がマイナスとなる．

証明　命題 4.1.5 において $t = t^* - T(r)$, $\varphi = \varphi^* - A(r)$ とすればよい．ここに，$dT/dr = (r^2 + a^2)/\Delta$, $dA/dr = a^2/\Delta$ である．微分 r' が表れるが，定理 4.2.2 にある測地線の方程式 $\rho^4 r'^2 = R$ より，　$\rho^2 r' = \pm\sqrt{R}$ となる．□

次の積分公式は，ボイヤー－リンキスト座標とカー座標の両方で成立している．なお，$\mathbb{D} = L - aES^2$, $\mathbb{P} = (r^2 + a^2)E - aL$ であることを注意しておく．

命題 4.3.3　区間 $[\, s_0, s_1)$ で定義されたカー測地線を γ とする．この $[\, s_0, s_1)$ において $R(r) > 0, \Theta(\vartheta) > 0$ であるとする．よって，r' と ϑ' はゼロではない．いま，$r_0 = r(s_0)$, $\vartheta(s_0) = \vartheta(s_0)$, $\epsilon = \mathrm{sgn}(r')\mathrm{sgn}(\vartheta') = \pm 1$, とおく．このとき，$[\, s_0, s_1)$ において

$$(1)\quad \int_{r_0}^{r(s)} \frac{dr}{\sqrt{R}} = \epsilon \int_{\vartheta_0}^{\vartheta(s)} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\Theta}}$$

$$(2)\quad s - s_0 = \left| \int_{r_0}^{r(s)} \frac{r^2 dr}{\sqrt{R}} \right| + \left| \int_{\vartheta_0}^{\vartheta(s)} \frac{a^2 C^2 d\vartheta}{\sqrt{\Theta}} \right|$$

が成立する．

証明　(1) 定理 4.2.2 の測地線の第 1 階方程式について，平方根をとると，$\rho^2|r'| = \sqrt{R}$, $\rho^2|\vartheta'| = \sqrt{\Theta}$ となる．(いまは γ 上で考えているのであるから，R と Θ は s の関数

である.) これらから

$$|r'|/\sqrt{R} = 1/\rho^2 = |\vartheta'|/\sqrt{\Theta}$$

となる．よって，s_0 から s まで積分すれば，$\epsilon = \mathrm{sgn}(r')\mathrm{sgn}(\vartheta')$ であるから，

$$\int_{s_0}^{s} \frac{r' ds}{\sqrt{R}} = \epsilon \int_{s_0}^{s} \frac{\vartheta' ds}{\sqrt{\Theta}}$$

を得る．この式の変数を変換すれば (1) となる．

(2) $\rho^2|r'|/\sqrt{R} = 1$ と $\rho^2 = r^2 + a^2C^2$ が成立しているから，

$$s - s_0 = \int_{s_0}^{s} ds = \int_{s_0}^{s} \frac{\rho^2|r'|ds}{\sqrt{R}} = \int_{s_0}^{s} \frac{r^2|r'|ds}{\sqrt{R}} + \int_{s_0}^{s} \frac{a^2C^2|r'|ds}{\sqrt{R}}$$

となる．しかるに (1) より $|r'|/\sqrt{R} = |\vartheta'|/\sqrt{\Theta}$ である．これを上式に代入して

$$s - s_0 = \int_{s_0}^{s} \frac{r^2|r'|ds}{\sqrt{R}} + \int_{s_0}^{s} \frac{a^2C^2|\vartheta'|ds}{\sqrt{\Theta}}$$

を得る．この式の変数を変換すれば求める式となる．□

この命題の (1) 式は，$[\, s_0, s_1)$ において $F(r(s)) = \epsilon G(\vartheta(s))$ であるから，関数として

$$F(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{R}}, \qquad G(\vartheta) = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\Theta}}$$

と書くことができる．F と G は，上記の仮定の下で狭義増加関数になっているから，逆関数を持つ．したがって，(1) の式を解いて

$$r(s) = F^{-1}(\epsilon G(\vartheta(s)), \quad \vartheta(s) = G^{-1}(\epsilon F(r(s)))$$

とすることができる．つまり，座標関数の $r(s)$ と $\vartheta(s)$ の一方が分かれば，もう一方が決まるのである．より実践的な言い方をすると，$R(r) > 0$ の範囲において，分離型第 1 階微分方程式

$$d\vartheta/dr = \vartheta'/r' = \pm\sqrt{\Theta(\vartheta)}/\sqrt{R(r)}$$

が成立する．ここの符号は，$\Theta(\vartheta)$ の零点に合わせるものとする．この方程式は解くことができる (複雑な場合でも数値解は出る)．これから，余緯度 ϑ と半径 r が従属関係にあることが分かる．

命題 4.3.4　区間 $[\, s_0, s_1)$ で定義されたカー測地線を γ とする．この区間 $[\, s_0, s_1)$ の全ての点 s において $R(r) > 0$, $\Theta(\vartheta) > 0$, $\Delta(r) \neq 0$ が成立しているとする．このとき，カー・スター座標は

$$(1)\quad \varphi^*(s) - \varphi^*_0 = \pm \int_{\vartheta_0}^{\vartheta(s)} \frac{\mathbb{D}S^{-2} d\vartheta}{\sqrt{\Theta}} + \int_{r_0}^{r(s)} \frac{a}{\Delta} \left[\frac{\pm\mathbb{P}}{\sqrt{R}} \oplus 1 \right] dr.$$

$$(2)\quad t^*(s) - t^*_0 = \pm \int_{\vartheta_0}^{\vartheta(s)} \frac{a\mathbb{D}}{\sqrt{\Theta}}\, d\vartheta + \int_{r_0}^{r(s)} \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \left[\frac{\pm\mathbb{P}}{\sqrt{R}} \oplus 1 \right] dr$$

となる．また，ϑ の積分の前の $\pm$ は $\operatorname{sgn}\vartheta'$ であり，r の積分の $\pm$ は $\operatorname{sgn} r'$ である．前と同じように，$\oplus$ は (ここでは) マイナスを表す．スター・カー座標 ${}^*\varphi$, ${}^*t$, の場合にはプラスとする．

証明　(1) について．系 4.3.2 の φ の式を積分して

$$\varphi^*(s) - \varphi^*_0 = \int_{s_0}^{s} \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{\mathbb{D}}{S^2} + \frac{a}{\Delta}(\mathbb{P} \oplus (\pm\sqrt{R})) \right] ds$$

となる．ところで

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\pm\vartheta'}{\sqrt{\Theta}} = \frac{\pm r'}{\sqrt{R}}$$

である．これを上式に代入して

$$\varphi^*(s) - \varphi^*_0 = \pm \int_{s_0}^{s} \frac{\mathbb{D}/S^2}{\sqrt{\Theta}} \vartheta'\, ds + \int_{s_0}^{s} \frac{a}{\Delta} \left[\frac{\pm\mathbb{P}}{\sqrt{R}} \oplus 1 \right] t'\, ds$$

となる．変数を変換して与式を得る．t^* についても同様である．□

さて，正則なカー測地線は，1 つのボイヤー－リンキスト・ブロック内にあるならば (ブロック III の場合は Σ と交点を持たないとする), 無限に拡張できることを証明す

る．上記に述べたように，測地線において〈正則〉ということは，ボイヤー－リンキスト・ブロックの軸以外の点が始点であることと同値である．

補題 4.3.5(存在) (補題 4.2.5 のように) 正則な初期条件を s_0; r_0, ϑ_0, φ_0, t_0; q, E, L, Q とする．もし r'_0 と ϑ'_0 がゼロでなければ，次を満たす最大の区間 $[\,s_0, s_1)$ が存在する．

1. 与えられた初期条件を満たす測地線 γ が一意に存在する．
2. $R(r) > 0$, $\Theta(\vartheta) > 0$ であり，$\Delta(r)$ はゼロでない．

証明 与えられた初期条件を満たす測地線が定義できる最大の区間を $[\,s_0, b)$, $b \leq \infty$ とする．$\gamma(0)$ がボイヤー－リンキスト・ブロック内にあるから，$\Delta_0 \neq 0$ である．また，r'_0 と ϑ'_0 がゼロでないので，r と ϑ に関する第 1 積分の方程式から R_0 と Θ_0 は正となる．区間 $[\,s_0, b)$ の中で，この 3 つの条件を満たす最大の部分区間を $[\,s_0, s_1)$ とすればよい．□

この補題において $s_1 = \infty$ ならば，つまり測地線が $[\,s_0, \infty)$ で定義されているならば，これで証明は終わりである．そこで，s_1 は有限とする．さらに，もし $s \to s_1$ のとき $\rho^2 = r^2(s) + a^2 \cos^2 \vartheta(s)$ がゼロに近づくならば，この座標を持つ測地線はリング状特異領域と交わることになる．この状況は別に検討するので，ここでは $\rho^2 \not\to 0$ とする．

また，$\rho^4 r'^2 = R > 0$, $\rho^4 \vartheta'^2 = \Theta > 0$ であるから，γ の 2 つの座標 $r(s)$ と $\vartheta(s)$ は，$[\,s_0, s_1)$ において，狭義単調関数である．よって，

$$r_1 = \lim_{s \to s_1} r(s), \qquad \vartheta_1 = \lim_{s \to s_1} \vartheta(s)$$

が存在する．(ここに，s_1, r_1, ϑ_1 は，無限大の場合も含む.) 測地線が s_1 まで拡張できるかどうかにかかわらず，$s \to s_1$ のとき，連続関数 R, Θ, ρ^2, Δ は $(r(s), \vartheta(s)$ 上で考えて) 極限値を持つ (無限大も含める)．この中の関数が，$s \to s_1$ のとき，ゼロへ近づかないないとする．例えば Δ が $\Delta(r_1) \neq 0$ であるとすると，$\Delta(r(s))$ は，$[\,s_0, s_1)$ においてゼロにはならない．

補題 4.3.6 上記の設定の下に，s_1 が有限であるとする．このとき，

(1) r_1 と ϑ_1 も有限となる．

(2) もし $\Delta(r_1) \neq 0$ ならば，補題 4.3.5 の測地線 γ は，より大きい区間 $[\, s_0, s_1 + \delta)$ へ拡張できる．

証明　(1) 上記に述べたように，s_1 が有限ならば，ρ^2 はゼロではない．測地線の方程式 $\rho^2 r' = \pm\sqrt{R}$ を

$$\frac{dr}{ds} = \frac{\pm R}{\rho^2}$$

と書く．ここに，R と ρ^2 は $r(s), \vartheta(s)$ の関数とする．r の多項式として，ρ^2 は 2 次，R は最大 4 次である．区間 $[\, s_0, s_1)$ において $|dr/ds|$ は有界となるから，r_1 は有限となる．ϑ についても同様．(もし γ が軸と交わらないならば，$0 < \vartheta < \pi$ なので，証明することはない.)

(2) 命題 4.1.5 の式を積分して

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{s_0}^{s} \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\mathbb{D}}{S^2} + \frac{a\mathbb{P}}{\Delta}\right] ds$$

$$t - t_0 = \int_{s_0}^{s} \frac{1}{\rho^2}\left[a\mathbb{D} + \frac{r^2 + a^2}{\Delta}\,\mathbb{P}\right] ds$$

となる．ここに，ρ^2 と Δ はゼロでないことが仮定されているから，この式の分母がゼロとなることはない．また，測地線が $L \neq 0$ を満たすなら $S = \sin\vartheta$ はゼロでなく，$L = 0$ ならば，$\mathbb{D}/S^2$ は $-aE$ となる．よって，$s \to s_1 < \infty$ のとき，測地線の座標 $\varphi(s)$ と $t(s)$ は有限の極限値を持つことになる．

極限をとったとき，座標が全て有限の極限値を持つので，測地線 γ は，ボイヤー－リンキスト・ブロック内の点に近づくことになる．よって，前に述べたように，γ は s_1 の先へ拡張できるのである．□

測地線が mod Σ で完備となることを示すことについて，この補題の (1) の設定が重要な意味を持っている．実際，有限の区間において，測地線の座標の r か ϑ が無限大へ行くなら，測地線はそれ以上拡張できないことになってしまう．この設定は自明ではない．r と ϑ が，M で大域的に定義される関数ゆえに成立するのである．任意の座標関数では成立するとは限らない．

次に，R と Θ の零点の意味を考える．

命題 4.3.7　上記の設定の下に，r_1 と ϑ_1 が有限とする．

(1) もし r_1 が R のたかだか単純零点であり，ϑ_1 が Θ のたかだか単純零点であるならば，s_1 は**有限**である．

(2) もし r_1 が R の累次零点であるか，または，ϑ_1 が Θ の累次零点であるならば，s_1 は**無限大**である．

証明 命題 4.3.3 の (2) 式において $r(s) \to r_1, \vartheta(s) \to \vartheta_1$ とすると，広義積分

$$s - s_0 = \left| \int_{r_0}^{r_1} \frac{r^2 dr}{\sqrt{R}} \right| + \left| \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \frac{a^2 C^2 d\vartheta}{\sqrt{\Theta}} \right|$$

を得る．ここで，$R(r) = A + B(r_1 - r) + \cdots + E(r_1 - r)^4$ とおく．

(1) r_1 が R の単純零点ならば，$A = 0, B \neq 0$ である．よって，上記の広義積分における最初の項の被積分関数は $(r_1 - r)^{-1/2}$ のような形になる．したがって，積分は収束する．r_1 がゼロでない場合，つまり $A \neq 0$ の場合も明らかに同様となる．

同様にして，(Θ は ϑ の解析関数で，多項式ではないが) 2 番目の積分も収束することが分かる．よって，s_1 は有限である．

(2) r_1 が R の累次零点ならば，$A = B = 0$ である．よって，上記の広義積分における最初の項の被積分関数は $(r_1 - r)^{-1}$ のような形になる．したがって，積分は発散する．2 番目の積分についても同様である．□

これから，次の幾何学的な結果を得る．

系 4.3.8 $R(r_0) = 0$ とする．測地線 γ の r-座標が初期条件 $r(s_0) = r_0, r'(s_0) = 0$ を満たすとする．

(1) もし r_0 が R の単純零点ならば，r_0 は r の転回点となる．つまり，s_0 において $r'(s)$ の符号が変わる．

(2) もし r_0 が R の累次零点ならば，γ の r-座標は，定数 $r = r_0$ である．

r と R を ϑ と Θ に置き換えても同様な結果を得る．

証明 (1) R が r_0 で単純零点を持つから，点列 $\{r_n\} \to r_0$ で $R(r_n) > 0$ となるもの

が存在する．仮定の初期条件の一部を変えて $r_n(0) = r_n$ とした測地線を γ_n とする．とくに，$r'_n(0) \neq 0$ である．

式 $\rho^4 r'^2 = R(r)$ を微分して

$$(\rho^4)' r'^2 + 2\rho^4 r' r'' = (dR/dr) r'$$

となる．r を，γ_n の r-座標 r_n に置き換えて

$$(\rho^4)' {r_n}'^2 + 2\rho^4 {r_n}' {r_n}'' = (dR/dr) {r_n}'$$

を得る．この式の $s = s_0$ における値を求めると，$r'_n(s_0) \neq 0$ であるから，

$$(\rho^4)'|_0\, r'_n(s_0) + 2\rho^4|_0\, r''_n(s_0) = (dR/dr)|_0$$

となる．測地線は初期条件に滑らかに依存するので，この式で $n \to \infty$ として，

$$2\rho^4|_0\, r''(s_0) = (dR/dr)(r_0)$$

を得る．仮定から R は $r_0 = r(s_0)$ で単純零点を持つから，$r''(s_0) \neq 0$ である．よって，r' の零点 s_0 は孤立点である．しかるに，r は，r_0 の $R < 0$ 側へ行けないので，r' は s_0 で符号が変化しなければならない．

(2) r_0 が累次零点で $r(s)$ が定数でないとする．このとき，$r(s_1) \neq r_0$ となる $s_1 \neq s_0$ が存在する．(パラメータを変えて) この s_1 を測地線の始点とすると，その測地線は，有限のパラメータ区間内で R の累次零点 r_0 に到達することになる．これは命題 4.3.7 の条件 (2) に矛盾する．□

以上をまとめると次のようになる．

命題 4.3.9　正則な (すなわち，軸や地平面に完全に含まれていない) カー測地線は，リング状特異領域と交わったり地平面に到達しないならば，実数軸全体へ拡張できる．

また，測地線の座標関数 $r(s)$ が R の累次零点 r_0 に近づくならば，その点は漸近点である．つまり，s が無限大に行くにしたがって r は r_0 に近づくが，その点に到達はしない．しかるに，R の単純零点 r_0 に近づくならば，r は r_0 に到達し，跳ね返る．つまり，反射点なのである．4.2 節で述べたように，定数関数 $r = 0$ は，第 1 積分 $\rho^4 r'^2 = R$ の特異解であり，測地線を構成しない．同様なことが ϑ と Θ についてもいえる．

4.4　交叉地平面

正則なカー測地線でリング状特異領域と交わらないものは完備であることの証明を完成するために、残っているのは，測地線 $\gamma\colon [\, s_0, s_1) \to M$ が 1 つのボイヤー－リンキスト・ブロック内にあり，$s \to s_1$ のとき地平面に到達する場合についての検討である．つまり，$r_1 = \lim_{s \to s_1} r(s)$ のとき $\Delta(r_1) = 0$ であり，遅速カー時空ならば $r_1 = r_{\pm}$, 極限カー時空の場合ならば $r_1 = \mathrm{M}$ となる場合である．

第 3 章で構成したことから分かるように，γ は，カー・スター時空とスター・カー時空から構成される 2 **個**のカー細片内にある．

Carter (1968) の方法を使い，関数 $\mathbb{P} = (r^2 + a^2)E - La$ を 2 つの場合

$$\text{場合 1:}\quad \mathbb{P}(r_1) \neq 0, \qquad \text{場合 2:}\quad \mathbb{P}(r_1) = 0$$

に分けて調べることにする．

もし測地線 γ を，(全測地的である) 地平面と点 s_1 で交点を持つように拡張できるならば，地平面との交わりは横断的になっている．よって，標準ベクトル場 V は地平面に垂直であるから，$\mathbb{P} = -<\gamma', V>$ は $r_1 = \gamma(s_1)$ でゼロではない．逆を証明するためのポイントとなるのが次の結果である．

補題 4.4.1　場合 1 のとき，つまり $\mathbb{P}(r_1) \neq 0$ ならば，$s \to s_1$ としたとき，γ のカー・スター座標かスター・カー座標は有限の極限値を持つ．

証明　s_1 が有限であるから，補題 4.3.6 から，極限値の r_1 と ϑ_1 は有限である．命題 4.3.3 の 2 つの積分を考える．どちらについても，$s \to s_1$ のとき，ϑ の積分は有限の極限値を持つ．実際，s_1 が有限なので，ϑ_1 は，Θ のたかだか単純零点である．よって，ϑ の 2 つの積分は，

$$\int (\vartheta - \vartheta_0)^{-1/2}\, d\vartheta$$

の定数倍でおさえられ，有限となる．

r の積分については，分子の a と $r^2 + a^2$ は問題ない．不定積分

$$\int_{r_0}^{r_1} \frac{1}{\Delta} \left[\frac{\pm\mathbb{P}}{\sqrt{R}} \oplus 1 \right] dr$$

が有限かどうかを調べればよい．(ここで，$\oplus$ の符号は，カー・スター座標の場合はプラス，スター・カー座標の場合はマイナスを表す.) いま，$f = f(r) = \mathbf{q}r^2 - \mathcal{K}$ として，$R = \mathbb{P}^2 + f\Delta$ と書く．そこで $s \to s_1$ とすると，Δ はゼロに近づくが，$\mathbb{P}$ はゼロに行かない．よって，R もゼロに近づかない．ゆえに，

$$\mathbb{P}^2/R = 1 - f\Delta/R$$

で，2 項定理から，

$$\mathbb{P}/\sqrt{R} = \pm 1 \mp \frac{1}{2} f\Delta/R + O(\Delta^2)$$

となる．これを積分の式に代入して

$$\int_{r_0}^{r_1} \frac{1}{\Delta}\left[\pm 1 \mp \frac{1}{2} f\Delta/R + O(\Delta^2) \oplus 1\right] dr$$

を得る．

$\oplus$ の符号を $\pm$ と逆にとれば，有限の積分

$$\int_{r_0}^{r_1} \left[\mp 1 \frac{1}{2} f/R + O(\Delta)\right] dr$$

を得る．よって，γ の K^* 座標か ${}^*K$ 座標のどちらかでは，s_1 の先へ拡張できることになる．□

いま，カー・スター座標の方が拡張できるとする．このとき，測地線 γ は，K^* 細片内の短い地平面 $r = r_\pm$ と交わることになる．(図 4.1 を見よ.) 短い地平面は，1 つのカー細片内にある．上記のように $\oplus$ の符号を決める (厳密には命題 4.4.6 で設定する) ことで，測地線 γ が横断する細片が，K^* なのかそれとも ${}^*K$ なのかを知ることができる．

場合 2 とそれ以後の議論には，次の事実が必要となる．

補題 4.4.2　測地線 γ: $[\,s_0, s_1) \to M$ の座標関数を $r(s), \vartheta(s)$ とする．

(1) もし $s \to s_1 < \infty$ のとき $r(s) \to r_1$ となるならば，$\delta > 0$ が存在し，$[\,s_1 - \delta, s_1)$ において，$r'(s)$ は，恒等的にゼロである場合を除いてゼロにはならない．

(2) 同様なことが，$\vartheta(s)$ についても成立する．

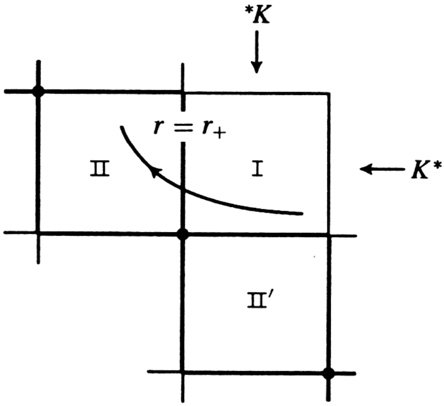


図 4.1　カー時空において，測地線 γ が短い地平面を通過している．スター・カー座標では，γ は無限大へ行くが，カー・スター座標では，K^* 細片内の地平面を横断しているのである．

(3) もし γ が正則で $\Delta(r_1) = 0$ ならば，$\epsilon > 0$ が存在し，区間 $[\, s_1 - \epsilon, s_1)$ では $\Delta(r(s)) \neq 0$ となる．

つまり，$r(s)$ と $\vartheta(s)$ は，定数でない場合，単調に極限へ近づくのである．

証明　(1) 第 3 の可能性がある．増加点列 $\{s_n\} \to s_1$ で，$r'(s_{2k}) = 0, r'(s_{2k+1}) \neq 0$ となる場合である．この場合を除くため，r の方程式 $\rho^4 r'^2 = R(r)$ を考える．多項式 $R(r)$ の零点の数は多くても 4 個であるから，部分列をとり，$r(s_{2k})$ がつねに同じ値になると仮定してよい．この値は極限値 r_1 である．ここで $r'(s_{2k+1}) \neq 0$ であるから，関数 $r(s)$ は (s_{2k}, s_{2k+2}) で定数ではない．よって，この区間内に別な点 s^*_{2k+1} が存在し，$r'(s^*_{2k+1}) = 0, r(s^*_{2k+1}) \neq r_1$ となっている．$r(s^*_{2k+1})$ に関して 3 つの値があるから，$s \to s_1$ のとき，$r(s)$ は収束しないことになり，仮定に反する．

(2) $\Theta(\vartheta)$ は多項式ではないが，次のように修正して，上記の論法を適用することにする．$\Theta(\vartheta)$ が $(0, \pi)$ に制限されないという場合でも，$\vartheta(s)$ が (有限の) 極限値へ近づくので，$[\, s_0, s_1)$ における ϑ の値は，ある有限区間 $[\, -k, k\,]$ 内にある．$\Theta(\vartheta)$ は ϑ の，恒等的にゼロではない解析関数であるから，$[\, -k, k\,]$ における零点の数は有限である．これにより，$r(s)$ の論法を $\vartheta(s)$ に使うことができることになる．

(3) 先ず，$\Delta'(s) = (d/ds)(\Delta(r(s)) = 2(r(s) - \mathrm{M})r'(s)$ である．もし $r(s)$ が $[\, s_1 - \delta, s_1)$ で一定ならば，その区間で $\Delta(s) = 0$ となり，γ は地平面に含まれることになり，

正則であることに反する．もし r' が $[\,s_1-\delta_1, s_1)$ でゼロにならないならば，$r(s)=\mathrm{M}$ でのみ $\Delta'(s)=0$ である．$r(s)$ は狭義に単調であるから，このような点は，存在するとしても，$[\,s_1-\delta, s_1)$ 内でたかだか 1 個である．もし存在するなら，$s_1-\epsilon$ とし，そうでないなら $\epsilon=\delta$ とすればよい．□

命題 4.4.3　極限カー時空 M_e において，正則な測地線は $\mathrm{mod}\ \Sigma$ で完備である．

証明　M_eの測地線を γ とし，その最大区間を $[\,s_0, s_1)$ とする．そこで，$s_1<\infty$, $\lim_{s\to s_1}\rho^2\neq 0$ のときに，s_1 の先まで拡張できることを示せばよい．もし，$r_1=\lim_{s\to s_1} r(s)$ に対して $\Delta(r_1)=0$ でないなら，命題 4.3.9 より，拡張できる．補題 4.4.2 より，s_1 に近い s に関しては $\Delta(r(s))\neq 0$ である．よって，1 つのボイヤー－リンキスト・ブロック内に γ が含まれていると仮定してよい．

M_e においては，場合 1 がつねに成立することを見る．つまり，$r_1=\mathrm{M}$ で $\mathbb{P}(r_1)\neq 0$ なのである．定義から $R=\mathbb{P}^2+\Delta(\mathfrak{q}r^2-\mathcal{K})$ である．いま s_1 は有限であるから，命題 4.3.7 から，R は r_1 で高々単純零点となるだけである．しかるに $\Delta=(r-\mathrm{M})^2$ であるから，$r_1=\mathrm{M}$ における Δ の零点は 2 次である．$\mathbb{P}$ は，R の式において 2 乗の形になっているから，r_1 で零点とはならない．

よって補題 4.4.1 から，$s\to s_1$, のとき，γ はカー細片内の地平面の点へ近づく．よって，測地線は，s_1 から先へ拡張できるのである．□

次に，遅速カー時空 M_s 内の測地線 γ について考える．場合 1 では，γ は短い地平面へ近づく．M_e の場合はこれだけであったが，M_s では，場合 2 も考えられ，このときは，γ は交叉球 $\boldsymbol{S}$ へ近づくことになる．以下で，これを示す．交叉球へ近づくための必要条件は $\mathbb{P}(r_1)=0$ である．実際，$\boldsymbol{S}$ は r の危点からなる集合であるから，$\gamma\to S$ のとき $r'=dr(\gamma')\to 0$ となる．よって，r の方程式 $\rho^4 r'^2=\mathbb{P}^2+\Delta(\mathfrak{q}r^2-\mathcal{K})$ から，$\mathbb{P}(r)\to 0$ であることが分かる．

命題 4.4.4　正則な測地線を $\gamma\colon[\,s_0, s_1)\to M_s$ と置く．もし，

$$\lim_{s\to s_1} r(s)=r_\pm, \mathbb{P}(r_\pm)=0$$

ならば，測地線 γ は拡張でき，KBL 領域 $\mathcal{D}(r_\pm)$ 内の交叉球 $\boldsymbol{S}(r_\pm)$ と交点を持つ (それゆえ，交叉球を横断する).

証明 ここでは $\lim_{s\to s_1} r(s) = r_+$ として証明する．補題 4.4.2 より，s_1 に近い s の値のとき，γ は 1 つのボイヤー－リンキスト・ブロックに含まれることが分かっている．つまり，1 つの領域 $\mathcal{D}(r_+)$ に含まれているのである．さて，γ の KBL 座標に関し，$s \to s_1$ のとき，ϑ と φ^+ が有限の極限値をもち，U^+ と V^+ がゼロへ近づくことも示せばよい．

以前と同様に，補題 4.3.6 から ϑ を調べることができる．φ^+ についてはあとで検討する．U^+ と V^+ の定義から，ボイヤー－リンキスト・ブロックごとに符号が変化する．先ず，γ が $\mathcal{D}(r_+)$ のブロック I に含まれている場合を調べる．命題 4.3.4 における t^* と ${}^*t$ の式から，$[\, s_0, s_1)$ において，ϑ の積分は有界である．r の積分を調べるため，$f(r) = \mathfrak{q}r^2 - \mathcal{K}$ として $R = \mathbb{P}^2 + f\Delta$ と置く．r_+ において $\mathbb{P}$ と Δ がゼロだから，R もゼロとなる．しかるに，s_1 が有限ゆえ，R の零点は単純である．そこで，$R \sim r - r_+$ と書くことができる．ここに，$\sim$の記号は，有界な**正**の項を省略したことを表している．同様にして，$\Delta = (r - r_+)(r - r_-) \sim r - r_+$ となる．また，r_+ で f はゼロにならないから，$f\Delta \sim r - r_+$ となる．$\mathbb{P}$ は $Er^2 + (\text{定数})$ という形であり，$\mathbb{P}(r_+) = Er_+^2 + (\text{定数}) = 0$ であるから，

$$\mathbb{P} = Er^2 - Er_+^2 = E(r - r_+)(r + r_+) \sim E(r - r_+)$$

となる．(E は，ゼロでないかどうか分からないので省略できない.)

これらの式を，命題 4.3.4 の t^* の方程式へ代入する．このとき，右辺第 1 項の ϑ 積分は，$s \to s_1$ のとき有限の極限値をもつから，省略できる．つまり，

$$t^*(s) - t_0^* \sim \int_{r_0}^{r(s)} \frac{1}{r - r_+} \left[\frac{\pm E(r - r_+)}{\sqrt{r - r_+}} \oplus 1 \right] dr$$

$$\sim \pm E \int_{r_0}^{r(s)} \frac{dr}{\sqrt{r - r_+}} \oplus \int_{r_0}^{r(s)} \frac{dr}{r - r_+}$$

となる．

この式で，E の積分は省略できるので，E については問題ない．よって，

$$t^*(s) - t_0^* \sim \oplus \ln(r - r_+)$$

となる．つまり

$$t^*(s) - t_0^* \sim \ln(r - r_+), \qquad {}^*t(s) - {}^*t_0 \sim -\ln(r - r_+)$$

を得る．定義 3.4.5 から

$$U^+ = \exp(-\kappa_+^* t) \sim (r - r_+)^{\kappa_+},$$
$$V^+ = \exp(\kappa_+ t^*) \sim (r - r_+)^{\kappa_+}$$

である．ここで $\kappa_+ > 0$ であるから，$s \to s_1$, つまり $r \to r_+$ のとき，U^+ と V^+ はゼロに近づくことになる．

他の象限についても，同様にして示すことができる．例えばブロック II では，$r < r_+$ なので符号が変わるが，

$$t^*(s) - t_0^* \sim \int_{r_0}^{r(s)} \frac{dr}{\Delta}$$

は成立する．ここで，$r(s) < r_0, \Delta \sim r - r_+ < 0$ であるから，$t^*(s) \sim -\ln(r_+ - r)$ となる．つまり，

$$U^+ = -\exp(-\kappa_+^* t) = -\exp(\kappa_+ \ln(r_+ - r)) = -(r_+ - r)^{\kappa_+}$$

であり，これもゼロへ近づくことが分かる．

γ の φ^+ 座標については，命題 4.3.4 から，φ^* と φ_0^* との差は，上記の意味で省略できることが分かる．例えばブロック I では，$\varphi^*(s) - \varphi_0^* \sim \oplus \ln(r - r_+)$ となる．K^* と $^*K$ とでは $\oplus$ の符号が逆であるから，$\varphi^* - {}^*\varphi$ と $t^* - {}^*t$ の部分は省略できる．つまり，$s \to s_1$ で有限の極限値を持つのである．定義から，$\mathcal{D}(r_+)$ で

$$\varphi^+ = \frac{1}{2}[\varphi^* + {}^*\varphi - a(r_+^2 a^2)^{-1}(t^* + {}^*t)]$$

であるので，φ^+ も有限の極限値を持つ．

測地線 γ の KBL 座標に関する以上の結果から，γ は拡張でき，$\mathcal{D}(r_+)$ の交叉球 $\boldsymbol{S}$: $U^+ = 0, V^+ = 0$ と交点をもつ (それゆえ，$\boldsymbol{S}$ を横断する) ことが分かる．□

系 4.4.5　遅速カー時空 M_s の正則な測地線は，mod Σ で完備である．

カー時空における測地線と地平面の関係について，この節で述べたことをまとめると次のようになる．

命題 4.4.6　M_s の測地線 γ に関して，交叉符号と呼ぶ関数 $\oplus(s) = -sgn(r'(s)\mathbb{P}(s))$ を定義する．いま，γ が (外側から), $r = r_\pm$ と点 $\gamma(s_1)$ において交わるとする．このとき次が成立する．

(1) $\oplus(s_1) = +1$ のときは，γ は，カー・スター細片 K^* 内の短い地平面 $H_\pm$ を横断する．

(2) $\oplus(s_1) = -1$ のときは，γ は，スター・カー細片 $^*K$ 内の短い地平面 $H_\pm$ を横断する．

(3) $\oplus(s_1) = 0$ のときは，γ は，交叉球 $\boldsymbol{S}(r_\pm)$ を横断する．

4.5 ϑ 座標について

測地線 γ は，始点とそこにおける方向ベクトルで決定する．多様体 M の性質を知るには，M の中で，与えられた初期条件の下で測地線がどのようにふるまうかを調べることが必要となる．カー・ブラックホールにおいては，定理 4.2.2 の第 1 積分の方程式を調べることで，実に多くの性質を知ることができるのである．

測地線 γ において，関数 $R(r(s))$ と $\Theta(\vartheta(s))$ は，2 乗の形をしているので，負になることはない．

この節では，Θ に関する不等式を調べ，カー測地線の ϑ 座標に関する数量的な性質を求めることにする．先ずそのための準備として，次の重要な性質を証明しておく．

系 4.5.1　カー測地線 γ がリング状特異領域へ近づくならば，カーター定数 Q はゼロである．

証明　証明すべきことは，$s \to b$ (有限でも無限でもよい) のとき，$\rho^2(\gamma(s)) \to 0$ ならば $Q = 0$ となることである．この仮定は，$s \to b$ のとき，$r(s) \to 0$ かつ $\vartheta(s) \to \pi/2$ となることを示している．全ての s に対して $R(r(s)) \geq 0$, $\Theta(\vartheta(s)) \geq 0$ であるから，連続性から，$R(0) \geq 0$, $\Theta(\pi/2) \geq 0$ となる．(なお，測地線がどの領域に入っている場合でも，R と Θ は実数全体で定義されていることを注意しておく.) ところで，

$$R(0) = (a^2E - La)^2 + a^2(-\mathcal{K}) = -a^2Q, \qquad \Theta(\pi/2) = Q$$

であるから，Q はゼロでなければならない．□

この証明から，次のことも分かる．(1) γ が咽喉 $T\colon r = 0$ へ近づくならば $Q \leq 0$ である．(2) γ が赤道平面 $\vartheta = \pi/2$ へ近づくならば $Q \geq 0$ である．

よって，主要零的曲線から分かるように，カー測地線でリング状特異領域へ近づくものは余りない．しかるに，シュワルツシルド時空の場合には，地平面を越えて落下した全ての粒子は，無情にも（途中で破壊されない限り）中心の特異点へ到達してしまうのである．系 4.5.1 の逆は成立しない．実際，(Θ を Q で表して) $\vartheta-$方程式からすぐ分かるように，**赤道面上の測地線では $Q=0$ となっている**．

測地線 γにおける ϑ のふるまいを調べるには，γ に関する，エネルギー E と因果的特性が重要となる．この 2 つが第 1 積分 $a^2(E^2+\mathfrak{q})$ に関係しているのである．この式を，γ の**回転エネルギー** (rotational energy) と呼び，(この節においてだけ) $\tilde{E}$ と表すことにする．シュワルツシルド時空の場合では，星が回転していないので，$a=0$ であり，全ての測地線において $\tilde{E}=0$ となる．補題 4.2.10 から，$\vartheta-$方程式は

$$\rho^4\vartheta'^2 = \Theta(\vartheta) = Q + C^2(\tilde{E} - L^2/S^2)$$

と書くことができる．これと

$$V(\vartheta) = C^2(-\tilde{E} + L^2/S^2)$$

を合わせて，$\vartheta-$方程式は，**エネルギー方程式** (energy equation)

$$\rho^4\vartheta'^2 + V(\vartheta) = Q$$

となる．これは，ϑ 軸を動いている点に関するエネルギー保存則であり，$V(\vartheta)$ がポテンシャル・エネルギーを，$\rho^4\vartheta'^2$ が運動エネルギーを表している．後者は，$\rho^4\vartheta'^2 \geq 0$ なので非負であり，$\rho^4\vartheta'^2=0$ ならば $\vartheta'=0$ となる．

確認 カー測地線の場合，$\rho^2 = r^2(s) + a^2\cos^2\vartheta(s)$ は変数である (ニュートン力学では，同様の式は定数であった)．よって，$\rho^4\vartheta'^2$ の情報からすぐに ϑ' の情報が分かるわけではない．しかし，$\rho^4\vartheta'^2 \to 0$ で，ρ^2 がゼロでなければ，$\vartheta' \to 0$ となっている．‖

ニュートン物理学においてエネルギー保存則を理解するときにもグラフを用いたが，余緯度の関数 $\vartheta(s)$ によって測地線 γ の第 1 積分がどのように変化するかを見るには，グラフを使うのが便利である．$V(\vartheta)$ のグラフを描き，高さ Q で水平線を引く．$\rho^4\vartheta'^2 \geq 0$ であるから，V のグラフがこの水平線以下になるような最大区間を I_γ としたとき，ϑ の座標は，この区間に制限される．この区間は，無限大の場合も，1 点の場合もある．完備性から，(γ は $r=\infty$ から出発することはないとして) $\vartheta(s)$ は，区間 I_γ 内の全ての値をとる．いま，$\vartheta(s)$ が区間 I_γ の終点 $\vartheta_1 \neq \pi/2$ へ行き，$\Theta(\vartheta_1)=0$ となったとする．4.4 節で見たように，($\rho^2 \not\to 0$ として) $d\Theta/d\vartheta|_{\vartheta_1} \neq 0$ ならば，$\vartheta(s)$

は ϑ_1 に到達し，それから方向を変え，逆向きに進むことになる．もし $d\Theta/d\vartheta|_{\vartheta_1} = 0$ ならば，$\vartheta(s)$ は ϑ_1 へ漸近するだけである．

定義 4.5.2　測地線 γ の回転エネルギー $\tilde{E} = a^2(E^2 + \mathfrak{q})$ について，(軸の周りの角運動量との関係を) 次のように定める．

$\tilde{E} > L^2$ のときは，**高い** (high)，という．

$\tilde{E} = L^2$ のときは，**臨界** (critical) である，という．

$\tilde{E} < L^2$ のときは，**低い** (low)，という．

E と L の 2 乗で上記の関係が定まることに注意しておく．E^2 によって $\tilde{E}$ も増えるわけだが，その範囲は $a^2\mathfrak{q}$ から ∞ である．したがって，γ が時間的の場合には，$\tilde{E}$ は負になることもある．

先ず，$L \neq 0$ の場合を考えることにする．

注意 4.5.3　関数 $V(\vartheta) = C^2(-\tilde{E} + L^2/S^2)$ の性質に関して，次のように名前を付けることにする．ここで，ϑ は開区間 $(0, \pi)$ を動く変数であり，$\tilde{E}$ と $L \neq 0$ は任意の定数であるとする．

1. **終点** (endpoint). $\vartheta \to 0$ または $\vartheta \to \pi$ のとき $V(\vartheta) \to \infty$ となる．

2. **零点** (zero). $\tilde{E} \leq L^2$ ならば $\pi/2$ が唯一の零点である．$\tilde{E} > L^2$ ならば，2 つの零点 $\vartheta_\pm$ があり，これらは $\pi/2$ に関して対称であり，$0 < \vartheta_- < \pi/2 < \vartheta_+ < \pi$ となっている．

3. **傾き** (slope). $dV/d\vartheta = 2SC(\tilde{E} - L^2S^{-4})$ である．よって，$\vartheta \to 0$ のとき $dV/d\vartheta \to -\infty$ で，$\vartheta \to \pi$ のとき $dV/d\vartheta \to +\infty$ となる．

4. **危点** (critical point). $\vartheta = \pi/2$ のとき $dV/d\vartheta = 0$ である．$\tilde{E} \leq L^2$ ならば，危点はこれだけである．$\tilde{E} > L^2$ ならば，危点はあと 2 個 $\vartheta_{c\pm}$ あり，

$$0 < \vartheta_{0-} < \vartheta_{c-} < \pi/2 < \vartheta_{c+} < \vartheta_{0+} < \pi$$

となっている．

5. **最小点** (minimum point). $\tilde{E} \leq L^2$ ならば，危点は $\vartheta_c = \pi/2$ だけなので，(1) より，これが最小点となる．$\tilde{E} > L^2$ ならば，$\vartheta_c \neq \pi/2$ なる危点において

$$V(\vartheta_c) = -\tilde{E}\cos^4\vartheta_c = -(\tilde{E}^{1/2} - |L|)^2$$

となる．これは，Carter (1968) によって初めて指摘されたものである．$V(\pi/2) = 0$ であるから，V は $\vartheta_{c\pm}$ で最小となる．‖

命題 4.5.4　カー測地線 γ の回転エネルギーが，低い，あるいは臨界であるとする．すなわち $\tilde{E} \leq L^2 \neq 0$ であり，カーター定数は $Q \geq 0$ であるとする．もし $Q > 0$ ならば，γ の ϑ 座標は，$\pi/2$ に関して対称的に振動する．$Q = 0$ ならば，γ は，赤道平面 $\vartheta = \pi/2$ 内で安定している．

証明　$\tilde{E} \leq L^2 \neq 0$ であるとき，エネルギー方程式から，Q は負の項の和になっていることが分かる．前述のことから，$Q > 0$ の場合は，図 4.2 より証明される．$Q = 0$ ならば，エネルギー方程式の 2 つの項はゼロでなければならない．$\rho^4\vartheta'^2 = 0$ より $\vartheta' = 0$ となるので，ϑ は定数である．

次に，$C^2(-\tilde{E} + L^2/S^2) = 0$ の場合を示す．もし $C^2 = 0$ ならば $\vartheta = \pi/2$ である．$-\tilde{E} + L^2/S^2 = 0$ ならば，$\tilde{E} = L^2/S^2$ であり，$\tilde{E} \leq L^2$ から $S^2 \geq 1$ となり，やはり $\vartheta = \pi/2$ となる．つまり，γ は赤道平面 $\vartheta = \pi/2$ 内にある．さらにこれは安定である．実際，(図 4.2 から分かるように) E や L が少し変化しても，ϑ は，$\pi/2$ を中心に少し振動するだけである．□

エネルギーが低いとき，ϑ 座標の状況は，ニュートン物理学の場合と質的には変わりがない．地球の中心を通る平面上を，衛星が，ケプラーの法則に従って楕円を描いて運行するとき，余緯度の値が振動することに相当する．エネルギーが高いときには，注意 4.5.3 と図 4.3 から分かるように，興味深い現象が表れる．

命題 4.5.5　カー測地線 γ の回転エネルギーが高いとする．すなわち$\tilde{E} > L^2 \neq 0$ であるとする．このとき，カーター定数の最小値は $Q_{\min} = -(\tilde{E}^{1/2} - |L|)^2$ となる．さらに，次の 4 つの状況が得られる．

(1) もし $Q > 0$ ならば，ϑ は，$\pi/2$ に関して対称に振動する．

(2) $Q = 0$ のときは，次の 2 つの場合のどちらかが成立する．

　(a) γ は (不安定に) 赤道平面内に含まれる．

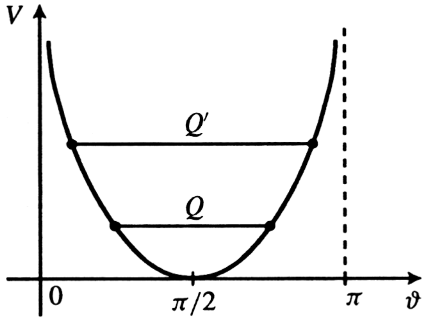


図 4.2　$\tilde{E} \leq L^2 \neq 0$ **の場合の** $V(\vartheta)$ **のグラフ．カーター定数の条件** $Q \geq 0$ **に対する水平線から，**ϑ **変数の区間が定まる．**

(b) γ は，赤道平面と交わらず，転回点 ϑ が 1 つあり，赤道平面かリング状特異領域へ漸近する．

(3) もし $Q_{\min} < Q < 0$ ならば，ϑ は a と b の間を振動する．ここに

$$\vartheta_- < a < \vartheta_{c-} < b < \pi/2 \qquad \text{(北半球の場合)}$$

$$\pi/2 < a < \vartheta_{c+} < b < \vartheta_+ \qquad \text{(南半球の場合)}$$

である．

(4) もし $Q = Q_{\min}$ ならば，ϑ は $\vartheta_{c\pm} \neq 0$ で定数で，$L^2 = \tilde{E}S^4$ である．

証明　カーター定数 Q が最小となる測地線は，$\pi/2$ 以外で V の値が最小となる点において与えられる．注意 4.5.3(5) により $Q_{\min}$ が得られる．

(1) と (2) の証明は，注意 4.5.3 から示される．なお，赤道平面内にある高いエネルギーの測地線は，L や E が少し変化しただけで (1) や (3) の場合へ大きく変化するので，**不安定**である．$Q = Q_{\min}$ の場合も注意 4.5.3 から示される．□

測地線が負のカーター定数 $Q < 0$ を持つとき，それを**渦** (vortical) と呼ぶことにする (de Felice 1968). ϑ ー方程式から，渦測地線は，高い回転エネルギーを持ち，赤道平面とは交わらず，北半球か南半球内に存在し，命題 4.5.5 の (3) の場合になっていることが分かる．ニュートン物理学とシュワルツシルド・ブラックホールの場合には，

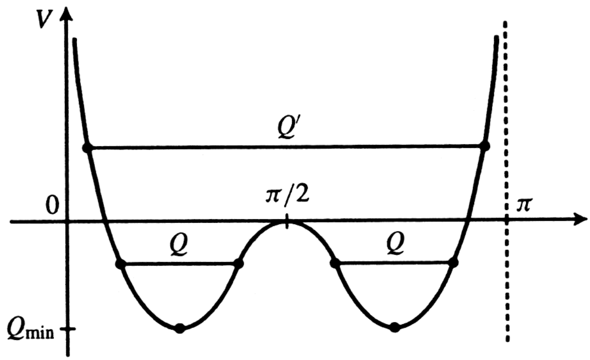


図 4.3　高いエネルギー，$\tilde{E} > L^2 \neq 0$ の場合の $V(\vartheta)$ のグラフ．$Q' > 0$ ならば，ϑ の区間は 1 つである．$Q < 0$ ならば，区間は 2 つで，それぞれ半球に含まれている．$Q = 0$ の場合は例外的である．

この状況が生じるのは，粒子が真っ直ぐに星の中心へ落下する $L = 0$ のときだけである．したがって，渦測地線は，相対論的な回転に特有な状況なのである．

前記の命題から，測地線の緯度方向運動とカーター定数 Q との関係が分かる．

系 4.5.6　カー測地線 γ が $L \neq 0$ を満たすとする．

(1) もし $Q > 0$ ならば，$\vartheta(s)$ は赤道平面 $\pi/2$ の周りを振動する．

(2) $Q = 0$ のときは，γ は，赤道平面に含まれる，赤道平面へ漸近する，リング状特異領域へ近づく，という 3 つの場合のどれかになる．

(3) もし $Q < 0$ ならば，$Q_{\min} \leq Q < 0$ となる．ここに $Q_{\min} = -(\tilde{E}^{1/2} - |L|)^2$ である．また，γ は赤道平面と交わらない．

次に，$L = 0$ を満たす測地線を考える．このときポテンシャル関数は $V(\vartheta) = -\tilde{E}C^2$ となり，したがってエネルギー関数は

$$\rho^4 \vartheta'^2 - \tilde{E}C^2 = Q$$

となる．前述の場合と同様に，回転エネルギーについて，高い，臨界，低い，の 3 つの場合が考えられる．以下，各々の場合について V のグラフを描いて状況を調べていくことにする．ニュートン物理学と似ている場合もあれば，異なる場合もある．

場合 1. $\tilde{E} < 0$ のとき．(図 4.4 を見よ.) この場合の測地線の r 座標は有界であることを，次の節で示す．

(a) $Q > -\tilde{E}$ のとき．このときは，$\rho^4\vartheta'^2 \geq b > 0$ で，$r(s)$ が有界ゆえ，ρ^2 も有界で，$|\vartheta'| \geq c > 0$ となる．したがって，γ は，北極と南極を繰り返し通過する極軌道内にある．

(b) $Q = -\tilde{E}$ のとき．このとき，γ は，軸内に (不安定で) 存在するか，漸近的に軸を出発して赤道平面を通過し，別の半球の軸へ漸近するか，のどちらかとなる．

(c) $0 < Q < -\tilde{E}$ のとき．このとき，ϑ は，$\pi/2$ のまわりを，軸から離れて，振動することになる．

(d) $Q = 0$ のとき．γ は，安定して赤道面内にある．

場合 2. $\tilde{E} = 0$ のとき．このときは $V = 0$ なので，エネルギー方程式は $\rho^4\vartheta'^2 = Q$ となる．

(a) $Q > 0$ のとき．場合 1(a) を見よ．

(b) $Q = 0$ のとき．任意の ϑ_0 で ϑ は定数である．

場合 3. $\tilde{E} > 0$ のとき．(図 4.4 を見よ.)

(a) $Q > 0$ のとき．余緯度 $\vartheta(s)$ は，全ての値をとって円を描く (そして，$r(s)$ は有界とは限らない).

(b) $Q = 0$ のとき．γ は，赤道面内に存在するか，命題 4.5.5 の (2) のように，一度軸を通過して，Σ に近づくか Eq へ漸近する (つまり，場合 1(b) と同じではない).

(c) $-\tilde{E} < Q < 0$ のとき．γ は，赤道面から離れて，軸のまわりを対称的に振動する (つまり，場合 1(c) と同じではない).

(d) $Q = -\tilde{E}$ のとき．γ は安定して，軸内に存在する．

系 3.5.6 と $L = 0$ の各場合分けを組み合わせると，次のような幾何学的な結果が得られることになる．

系 4.5.7　カー測地線 γ がカーター定数 $Q = 0$ を持つための必要十分条件は，次のうちの 1 つが成立することである．

(1) γ が赤道面内にある．

(2) γ が赤道面に漸近する．

(3) γ がリング状特異領域へ近づく．

主要零的測地線では ϑ が定数だから，上記の場合分けの中で主要零的測地線を見つけるのは簡単である．軸内にある場合には，

$$-Q = \tilde{E} = a^2 > L^2 = 0$$

であるから，図 4.4 の最小点である．赤道面内にある場合には，

$$\tilde{E} = a^2 = L^2, \qquad Q = 0$$

なので，図 4.2 の最小点である．他の場合には，

$$\tilde{E} > L^2 > 0, \qquad Q = Q_{\min}$$

であるから，図 4.3 の最小点である．

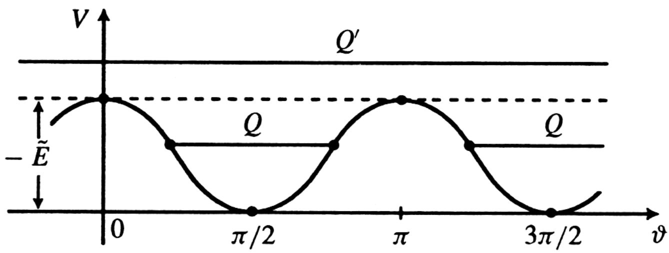
零的でない主要測地線は数少ない．軸 A の接空間は主要平面 Π であるから，軸 A 内の測地線は全て主要測地線である．しかし，**零的でない主要測地線でこれ以外のものは，$L = aE$ である赤道測地線のみである**．このことを証明しておく．先ず，軸以外の場所では，$\Pi^\perp$ は，∂_ϑ と標準ベクトル場 $W = \partial_\varphi + aS^2\partial_t$ で張られている．よって，測地線 γが主要測地線となる条件は，$<\gamma', \partial_\vartheta>= 0$ かつ $<\gamma', W>= 0$ である．最初の式から $\vartheta' = 0$ となる．つまり $\vartheta(s)$ は定数である．次の式から $L = aES^2$ を得る．そして，赤道面では $\vartheta = \pi/2$ であるから，$L = aE$ となるのである．

上記以外で $\vartheta(s)$ が定数となるのは，高い回転エネルギー状態における $V(\vartheta)$ の最小点の場合だけである．この場合，零的測地線のみが主要測地線となる．実際，命題 4.5.5 より $L^2 = \tilde{E}S^4$ であり，式 $L = aES^2$ から $L^2 = a^2E^2S^4$ を得るので，$\tilde{E} = a^2(E^2 + q) = a^2E^2$, つまり $\mathsf{q} = 0$ となる．

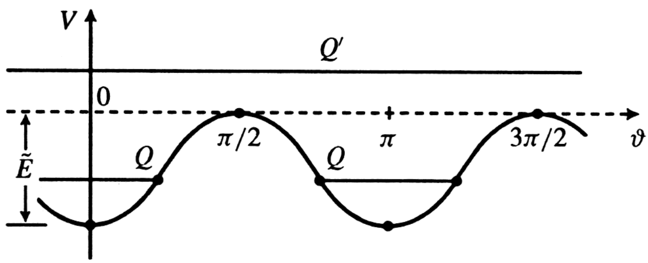
力学系の立場による $\vartheta(s)$ (それに，外部における $r(s)$) の研究については，Krivenko, et al, (1976) を見よ．

4.6　r 座標について

ここでは，カー測地線 γ の r 座標を，不等式 $R(r) \geq 0$ に関して調べる．前述の



場合 1.　$\tilde{E} < 0.$



場合 3.　$\tilde{E} > 0.$

図 4.4　$\tilde{E} < 0$ **と** $\tilde{E} > 0$ **の場合の** $V(\vartheta)$ **のグラフ．点線は，漸近的な軌跡に対する** ϑ **区間である．**

$\Theta(\vartheta) \geq 0$ ほど直接的な結果が出るのではないが，動径座標 r は，無限大への脱出や地平面の通過などと関係するので，余緯度 ϑ よりも重要である．

先ず，

$$\Delta = \rho^2 - 2\mathrm{M}r + a^2, \quad \mathbb{P} = (r^2 + a^2)E - aL$$

を

$$R(r) = \mathbb{P}^2 + \Delta(\mathfrak{q}r^2 - \mathcal{K})$$

へ代入して，基本となる次の結果が出る．

命題 4.6.1　測地線 γ において，$\mathfrak{q} = <\gamma', \gamma'>$ とし，エネルギーを E, 角運動量を

L, カーター定数を Q とすると，

$$R(r) = (E^2 + \mathfrak{q})r^4 - 2\mathrm{M}\mathfrak{q}r^3 + \mathfrak{X}r^2 + 2\mathrm{M}\mathcal{K}r - a^2 Q$$

となる．ここに，$\mathfrak{X} = a^2(E^2 + \mathfrak{q}) - L^2 - Q, \mathcal{K} = Q + (L - aE)^2$ である．

これで rー方程式 $\rho^4 r'^2 = R$ を考えれば，カー測地線の動径運動と第 1 積分 $\mathfrak{q}, L, E, Q$ との関連が，多項式 $R(r)$ の係数で示されることが分かる．

例えばパラメータを逆 $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(-s)$ にする場合のように，E と L をまとめて $-E, -L$ と符号を変えても，明らかに $R(r)$ は不変である．しかし，$\mathcal{K} = Q + L^2 - 2aLE + a^2E^2$ なる形をしているので，符号の変更が $E \to -E$ か $L \to -L$ の一方だけの場合には，$R(r)$ は変わる ($EL \neq 0$ は仮定しておく). したがって，カー時空において，$\mathfrak{q}, E, \mathcal{K}, |L|$ が等しい軌道では，順行と逆行は同一で，動径運動だけが変わることになる (特別な場合として $E = 0$ と $L = aE$ は除く). これは，カー時空が回転していることから生じる事実なので，シュワルツシルド・ブラックホールでは現れない (注意 4.14.11 を見よ).

カー測地線 γの第 1 積分 $\mathfrak{q}, E, L, Q$ によって多項式 $R(r)$ が決定され，γ の動径座標 $r(s)$ は，$R(r) \geq 0$ なる区間 J_γ に制限される．この区間は，無限大の場合も，1 点の場合もありうる．J_γ の終点 r_1 が通常の点のときには，$R(r_1)$ はゼロであり，系 4.3.8 から，それは $R(r)$ の単純零点であり，この点 r_1 は γ の rー転回点となっている．累次零点の場合には漸近するのである．

図 4.5～図 4.7 から分かるように，1 つの関数 $R(r)$ で，正となる区間が複数存在する場合もある．これは，第 1 積分は同じで初期値 r_0 が異なる測地線を表しているのである．

注意 4.6.2　式 $R(r) = \mathbb{P}^2 + \Delta(\mathfrak{q}r^2 - \mathcal{K})$ から $R(r_\pm) \geq 0$ であるから，多項式 $R(r)$ には $R(r) \geq 0$ となる区間 J が必ず存在する (退化している場合も含む). よって，$Q \geq 0$ ならば，$J_\gamma = J$ となる測地線 γ が存在する．(これは，命題 4.2.6 と 4.5 節から分かる.)　一方，$Q < 0$ の場合には，4.5 節から，関係式 $E^2 + \mathfrak{q} > L^2$, $Q \geq Q_{\min} = -\left[\, a(E^2 + \mathfrak{q})^{1/2} - |L| \,\right]^2$ が得られる (4.9 節を見よ). ‖

区間 J_γ には最大 2 個の終点があるから，**カー測地線 γ は，最大 2 個の rー転回点を持つ**. つまり，$dr/ds = 0$ となる r の値が最大 2 個存在するのである (それを与えるパラメータ値は多数あってもよい).

定義 4.6.3 カー測地線 $\gamma\colon R \to M$ において次のように**軌道のタイプ** (orbit type) を定義する．これは，それぞれ，0, 1, 2 個の r-転回点を持つことで定義している．

(0) **トランジット** (transit). s が R を動くとき，$r(s)$ は，極限値 $+\infty$ から極限値 $-\infty$ (あるいはこの逆) まで動く．

(1) **フライバイ** (flyby). s が R を動くとき，$r(s)$ は，$+\infty$ から $+\infty$ (あるいは $-\infty$ から $-\infty$) へと動く．

(2) **有界区間** (interval-bound). $r_1 < r_2$ に対して $r_1 \leq r(s) \leq r_2$ となる．

以上のタイプのとき，測地線は**通常** (ordinary) である，と呼ぶ．これ以外の測地線は，**例外** (exceptional) と呼ばれる．

測地線が**有界軌道** (bound orbit) を持つとは，その動径関数 $r(s)$ が有界であることを意味する．後述することから分かるように，この場合には，軌道は急激な運動をする．なにしろ転回点が 2 個なのである．

フライバイ軌道は，ニュートン物理学ではよく知られたものである．ケプラーの法則による双曲線である．そして，ケプラーの法則でいえば，有界軌道は楕円となる．

しかるに，**トランジット軌道**は，極めて相対論的な状況である．この状況は，シュワルツシルド時空でも発生しない．しかし，カー・ブラックホールではいろいろな形で現れてくる．例えば，赤道面上にない主要零的測地線がこれである．

例外軌道で一番単純なのが**球軌道** (spherical orbit), つまり，r 座標が定数 $r(s) = r_0$ となるものである．そしてこのとき，4.5 節の ϑ のように，r_0 に隣接して最大 2 個の r-区間が存在し，そこには，$r(s)$ が r_0 へ漸近する (例外) **漸近的軌道** (asymptotic orbit) が存在する．R が累次零点 r_0 で最大値を持つならば，漸近するものは存在しない．r_0 が R の変曲点ならば，γ は一方の側から漸近し，r_0 が最小点ならば，両側から漸近する．(図 4.5～図 4.7 を見よ．図の中で，点線で描いたのが漸近的軌道である.)

他の例外軌道はリング状特異領域 Σ から導かれる．つまり，ϑ 座標も関連するのである．測地線 γ において，パラメータの 1 方向で Σ と交わり，他の方向では $r = \pm\infty$ へ行くとき，この測地線を**衝突・脱出軌道** (crash-escape orbit) と呼ぶ．あと戻りしないわけである．この軌道に乗った宇宙飛行士は，$r' \neq 0$ の符号次第で，Σ に衝突するか，ブラックホールから無事に脱出するかが決定される．赤道面内の主要零的測地線はこの軌道を持つ．

有限区間で定義された測地線で，区間の両端で Σ と交わる場合は，**衝突・衝突軌道** (crash-crash orbit) と呼ぶ．最悪の場合である．

これらの Σ と関係する軌道は，例外的と名付けたが，特に奇妙なものというわけではない．真上に投げ上げた小石が地上に落ちてくる場合が衝突・衝突軌道であり，その小石が脱出エネルギーを持っている場合には衝突・脱出軌道となるわけである．

次に，軌道の安定性を各タイプごとに調べる．いま M の接ベクトルを v とするとき，γ_v で，初期ベクトル $\gamma_v'(0) = v$ を持つ最大測地線を表す．この場合，パラメータの変換 $\gamma(s) \to \gamma(cs+d)$ は考えないことにする．つまり，1 つの測地線に多くの表現を許すのである．

いま，測地線 γ_v の 1 つの性質を考える．γ_v がこの性質を持つ，ということで定義された $v \in TM$ の全体が TM で開集合となるとき，この性質は**開** (open) である，と呼ぶことにする．例えば，測地線が時間的 (あるいは空間的) であることは，測地線の開性質である．零的であることは，開性質ではない．おおまかにいえば，2 つの測地線がこの開集合の概念の下で〈隣り合っている〉ならば，近い位置にあり，ほとんど同じ第 1 積分を持っているのである．

ここで，多項式の安定性に関する 2 つの性質が必要となる．n は固定しておく．R^{n+1} の点 $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ に対し，多項式 $a_n r^n + \cdots + a_1 r + a_0$ を $p_A(r)$ と書くことにする．$N_\delta(A)$ は A の δ 近傍，つまり，$|A - B| < \delta$ を満たす $B \in R^{k+1}$ の集合であるとする．このとき，次の性質が成立することが容易に示される．

P1.ある閉区間 I (無限大も含む) において $p_A(r)$ が解を持たないならば，$\delta > 0$ が存在し，$B \in N_\delta(A)$ に対して $p_B(r)$ は I で解を持たないようにできる．($p_A(r)$ の全ての解は，ある有限区間 $[\,-k, k\,]$ 内に存在する.)

P2.もし $p_A(r)$ が r_1 で単純解を持つならば，$\delta > 0$ が存在し，$B \in N_\delta(A)$ に対して $p_B(r)$ は $(r_1 - \delta, r_1 + \delta)$ で 1 つの単純解を持つようにできる．(dR/dr に P1 を適用すればよい.)

補題 4.6.4　最大カー時空において，通常の軌道タイプ (つまり，フライバイ，有界区間，トランジット) は開性質である．

証明　トランジットの場合は，P1 から明らかである．フライバイの場合は，有界区間の場合を変形してすぐに分かる．

いま，γ_v が有界区間軌道であるとする．γ_v に対する多項式 $R_v(r)$ は，開区間 (r_1, r_2) で正であり，r_1 と r_2 で単純解を持っている．

第 1 積分 $\mathsf{q}, L, E, \mathcal{K}$ は，TM 上の連続関数である．よって，TM における v の十分小さい近傍内にあるベクトル w に対し，第 1 積分 $\mathsf{q}, L, E, \mathcal{K}$ の w における値は，v における値へ任意に近づけることができる．命題 46.2.1 の公式は，多項式 $R_w(r)$ を

$R_v(r)$ へ任意に近づけることができることを示している．つまり，5 個の係数をならべて R^5 の点としたとき，近くに存在するのである．

性質 P2 を用いて $\delta_1 > 0$ をとり，$w \in N_{\delta_1}(v)$ に対して，$R_w(r)$ が $(r_1 - \delta_1, r_1 + \delta_1)$ で単純解を持つようにする．同様にして，δ_2 と $(r_2 - \delta_2, r_2 + \delta_2)$ を与える．P1 を用いて δ_3 をとり，$w \in N_{\delta_3}(v)$ に対して，$[\, r_1, r_2 \,]$ で $R_w(r) > 0$ となるようにする．そして $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ と置く．このとき，$w \in N_\delta(v)$ に対して，γ_w は有界軌道となっている．□

このことから，例えば，測地線 γ がフライバイのタイプとするとき，別の測地線 β に関して，ある $\beta'(s_1)$ がある $\gamma'(s_0)$ に十分近いならば，β はフライバイ軌道である，と結論することができる．

例外タイプは開性質ではない．例えば，衝突・衝突，あるいは衝突・脱出軌道では $Q = 0$ なので，少し変形しただけで $Q \neq 0$ となる(それゆえ，このタイプは稠密ではないのである).

有界軌道を持つ測地線 γは，その近くの任意の測地線もまた有界軌道を持つなら，**安定有界軌道** (stably bound orbit) である，と呼ばれる．補題 4.6.4 より，有界区間軌道は安定有界である．球軌道も，$R(r)$ の最大値を与える点 r_0 において安定有界である．これ以外の球軌道，つまり漸近的軌道に近接したものは不安定有界になっている．この球軌道の中で生じる差違については，命題 4.8.1 で述べることにする．

因果的特性を別として，カー測地線に関する最も重要な性質は，多項式 $R(r)$ の係数の符号である．

補題 4.6.5　カー測地線において，$S^2 \to \pm\infty$ のとき $|r(s)| \to \infty$ となるならば，$E^2 + \mathsf{q} \geq 0$ である(ここに，$S = \sin\vartheta$ である).

証明　もし $E^2 + \mathsf{q} < 0$ ならば，十分大きい $|r|$ において，$R(r) < 0$ となる．□

自由落下する質点で $\mathsf{q} = -m^2$ を満たすものの場合，上記の条件は，$E^2 \geq m^2$ が，カー重力場から脱出するための必要条件であることを示している．よって，一般に，$E^2 + \mathsf{q} \geq 0$ のとき，γ は**脱出エネルギー** (escape energy) を持つ，と呼ぶことにする．こまかくいえば，$E^2 + \mathsf{q} > 0$ のとき，**強い意味の脱出エネルギー** (strict escape energy) を持つ，$E^2 + \mathsf{q} = 0$ のとき，**周辺脱出エネルギー** (marginal escape energy) を持つ，と呼ぶことにする．トランジット・タイプ，フライバイ・タイプの軌道を持つ測地線は脱出エネルギーを持っている．

強い意味の脱出エネルギーを持つ測地線はたくさん存在する．すなわち，空間的測地線，$E \neq 0$ を満たす零的測地線，多くの時間的測地線，例えば高い回転エネルギー $a^2(E^2-1) > L^2$ を持つ時間的測地線，等がこれに相当する．もちろん，強い意味の脱出エネルギーを持つ，ということは開性質である．

この場合の r 区間を図示するために，$R(r)$ のグラフを描き，$R(r) \geq 0$ となる r-区間 J を調べることにする．(求める区間は，グラフの**下側**になる．いわゆる〈有効ポテンシャル〉である)．(水平方向である) r 軸の位置を指定しなければ，1つのグラフから複数の多項式が作られる．例えば図4.5では，水平線のどれもが r 軸となりうるので，$R \geq 0$ の例としていくつかを図示したわけである．

図4.5から分かるように，脱出エネルギーを持つことは，無限大へ脱出するための必要条件であるが十分条件ではない．脱出に満たないエネルギーの場合には，制限が多くなる．

系 4.6.6　測地線 γ が脱出に満たないエネルギーを持つ，つまり，$E^2 + \mathfrak{q} < 0$ とする．このとき，γ は，時間的であり，有界軌道を持ち，カーター定数は $Q \geq 0$ であり，$r < 0$ 領域とは交わらない．さらに，$Q = 0$ となる必要十分条件は γ が赤道面内に存在することである．

証明　明らかに $\mathfrak{q} < 0$ であり，方程式

$$\Theta(\vartheta) = Q + C^2[\, a^2(E^2 + \mathfrak{q}) - L^2/S^2 \,]$$

において右辺第2項がゼロ以下であるから $Q \geq 0$ となる．もし $Q = 0$ ならば $C = \cos\vartheta = 0$ となり，これは γ が赤道面内に存在することを示している．(逆はつねに成立する.)

次に，命題4.6.1の式

$$R(r) = (E^2 + \mathfrak{q})r^4 - 2\mathrm{M}\mathfrak{q}r^3 + \mathfrak{X}r^2 + 2\mathrm{M}\mathcal{K}r - a^2Q$$

を考える．十分大きい r について $R(r) < 0$ である．全ての $r < 0$ について $R(r) < 0$ となることを示す．$Q \geq 0$ かつ $E^2 + \mathfrak{q} \leq 0$ であるから

$$\mathfrak{X} = a^2(E^2 + \mathfrak{q}) - L^2 - Q \leq 0$$

となる．また，$\mathcal{K} = Q + (L - aE)^2 \geq 0$ である．よって，$r < 0$ のとき，上式の各項とも非正で，$2\mathrm{M}r^3$ も負であるから，$R(r) < 0$ となる．□

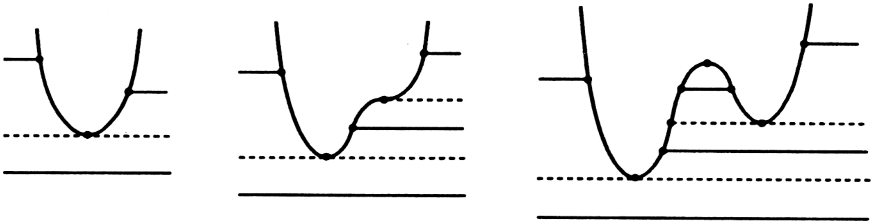


図 4.5 **強い意味の脱出エネルギーを持つ，つまり $E^2+\mathsf{q}>0$ である場合の $R(r)$ のグラフ．水平線は r 軸が取りうる位置を表している．実線は通常軌道，点線は例外軌道を示している．あと 2 つ，上図を垂直軸に関して対称に移した場合の図は省略した．**

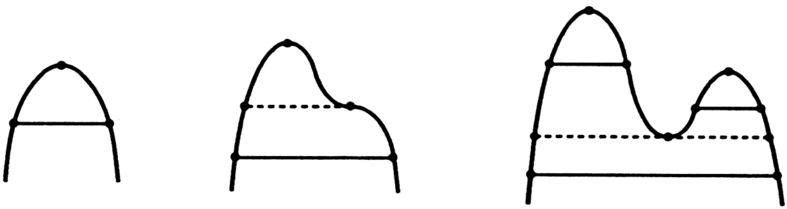


図 4.6 **脱出に満たないエネルギーを持つ，つまり $E^2+\mathsf{q}<0$ である場合の $R(r)$ のグラフ．**

図 4.6 の R のグラフは，形としては，図 4.5 のグラフを逆にしたものである．しかし，r 区間の状況は大きく異なっている．無限大への脱出が不可能であることを示しているのである．

$R(r)$ における r^4 の係数が $E^2+\mathsf{q}$ であるから，$E^2+\mathsf{q}\neq 0$ であることは，$R(r)$ の次数が 4 であることを示している．これより次数が低い場合には，次のようになる．

- 次数 3 の場合．このとき，$E^2+\mathsf{q}=0$ で $\mathsf{q}\neq 0$ ゆえ $\mathsf{q}<0$ である．よって，γ は，時間的測地線で，周辺脱出エネルギーを持っている．一般に，測地線で $|r|\to\infty$ とすると，

$$r'^2|_\infty = \lim_{|r|\to\infty} R(r)/\rho^4 = E^2+\mathsf{q}$$

である．よって，γ が脱出するときには，動径の速さがゼロのときに無限大へ到達することになる．容易に，$\Theta(\vartheta)\geq 0$ から $Q\geq 0$ であることが分かる．また，$R(r)\geq 0$ より，$r<0$ において $R(r)<0$ である．よって，この測地線は $r<0$ の領域には入らない．(図 4.7 を見よ.)

- 次数 2 の場合．これはかなり特別な場合である．先ず，次数が 2 以下ならば，γ は零的で，$E=0$ となる．よって，$\Theta(\vartheta)\geq 0$ から $Q\geq 0$ となり，$\mathfrak{X}=-(L^2+Q)<0$ となる．したがって，

$$\begin{aligned}R(r)&=-(L^2+Q)r^2+2\mathrm{M}(L^2+Q)r-a^2Q\\&=-L^2r(r-2\mathrm{M})-Q\Delta\end{aligned}$$

  である．そこで，次数がちょうど 2 ならば，$L^2+Q\neq 0$ で，グラフは，頂点が $r=\mathrm{M}$ の下に開いた放物線となる．この軌道は有界で，$r<0$ の領域には入らない．(赤道面の例については 4.14 節を見よ.)

- 次数が 1 か 0 の場合．このような測地線は存在しない．上記の計算から，$\mathcal{K}=L^2+Q=0$ より $R(r)=-a^2Q, Q\leq 0$ となるから，次数が 1 となることはない．もし $Q<0$ ならば次数が 0 であるが，$\Theta(\vartheta)\geq 0$ から $Q\geq 0$ を得る．

最後に次数がない，$R(r)$ が恒等的にゼロの場合を調べる．これは，$R(r)$ の係数が全てゼロなのだから，4 個の第 1 積分は全てゼロとなる．このような測地線も存在する．4.2 節で見たように，静止光子がそれである．(なお，ここでゼロなのは，**多項式** $R(r)$ であり，**関数** $s\to R(r(s))$ ではないことを注意しておく．例えば球測地線の場合には $R(r(s))=0$ となっている.)

以上のグラフの検討から，漸近の場合も含めた，軌道のリストを作り上げることができる．

これらをまとめ上げて，次のような，カー・ブラックホール特有の結果を得る．

系 4.6.7　領域 $r<0$ と交わる測地線 γ は，強い意味の脱出エネルギー $E^2+\mathfrak{q}>0$ を持つ．

証明　もし $E^2+\mathfrak{q}<0$ ならば，系 4.6.6 から，γ は $r<0$ と交わらない．もし $E^2+\mathfrak{q}=0$ ならば，$R(r)$ の次数は 2 か 3 であり，この場合も同じ結果となる．□

つまり，咽喉 $r=0$ を横断するのは，ブラックホールに小石を投げ入れるようなわけにはいかない．大きなエネルギーが必要となり，しかも，それだけでは十分ではないのである．

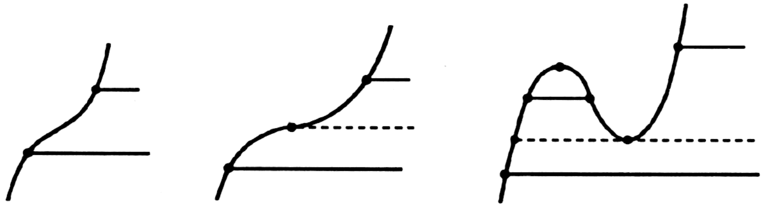


図 4.7　次数 3 の場合の $R(r)$ のグラフ．ほとんどの軌道が，$r=+\infty$ からのフライバイである．

4.7　r–L 図

ここからの数節では，カー測地線の第 1 積分によってカー・ブラックホールの大域的な軌道が決定されることを調べていく．場合分けがむやみに増えるのを避けるため，時間的測地線についてのみ調べることにする (もっとも，因果的特性に依存しない性質も出てくる). 零的測地線についても同様な取り扱いができ，計算も簡単なのであるが，時間的測地線よりも因果的特性が弱いので，いろいろな軌道が可能となってしまう．その 1 例として，4.14 節において赤道測地線を調べる．

第 1 積分が軌道のタイプを決定することを，図示して調べることにする．一般に，カー・パラメータ M と因果的特性のパラメータ q を固定する．このとき，命題 4.6.1 の関数 $R(r)$ は，E, L, Q にも依存するので，$R\colon R^4 \to R$ と見ることができる．ここで，E, L, Q の値が与えられたとき，r の曲線は領域 $R<0$ に入らない．したがって，$R<0$ となる境界を与えるのが R^4 における $Z\colon R=0$ であるから，これがポイントとなる．いま，(E と Q に適当な定数を与えて) R を r と L のみの関数と考え，軌道の質的な特性を決定することができる．(もちろん，図から状況が分かったら，それをきちんと証明しなければならない.)

r–L 平面における Z の補集合は連結開集合，つまり領域である．$R>0$ の場所を**許容領域** (allowed region), $R<0$ の場所を**禁止領域** (forbidden region) と呼ぶことにする．この設定で描かれた図を r–L 図と名付ける (4.8 節の図を見よ). いま L_0 が与えられたとき，高さ $L=L_0$ の水平線と，許容領域における共通部分が，軌道タイプを決定する区間 J になっているのである (4.6 節).

一般に，集合 $Z\colon R=0$ は，曲線，つまり r–L 平面における滑らかな 1 次元部分多様体である．Z の点 (r, L) が R の危点であるとき，その場所で曲線に角ができる．

記号の整理：

1. $e = E^2 + \mathfrak{q}$ と書くことにする．この第 1 積分は**有効エネルギー** (effective energy) と呼ばれる．また，補題 4.6.5 から，**脱出パラメータ** (escape parameter) と呼ぶこともある．(文献によっては Γ と記すこともある.)
2. エネルギー E の符号を特定する必要がある場合には，$E > 0$ とする．符号を $E, L \to -E, -L$ と 2 重に変えても $R(r)$ は不変であるから，$E < 0$ における r–L 図が必要なときには，r 軸を中心にして対称に移せばよい．
3. 時間的測地線については $\mathfrak{q} = -1$, $e = E^2 - 1$ とする．時間的な r–L 図は，このパラメータで描くことにする (図 4.8 の $e - Q$ 図を参照せよ). ‖

先ず，因果的特性に関係しない r–L 図の性質を調べることにする．

命題 4.6.1 の式は，r についての多項式 $R(r)$ と見るのが自然であるが，ここでは r–L 図を検討するので，r と L の関数 $R(r, L)$ と見ることにする．さらに場合によっては，L の多項式 $R(L)$ と見て，他の第 1 積分と r を係数と見ることもある．つまり，

$$R(L) = r(2\mathrm{M} - r)L^2 - 4\mathrm{M}aErL + R(r, 0)$$

で，ここに $R(r, 0)$ は，関数 R を r 軸，$L = 0$ へ制限したものである．

多項式 $R(L)$ は最大次数 2 で，$R(r)$ は最大次数 4 であるから，r–L 図において，**垂直線** $r =$ **(定数) と** $R = 0$ **の交点は最大 2 個で，水平線** $L =$ **(定数) と** $R = 0$ **の交点は最大 4 個となる**．これを 2–4 **ルール** (two-four rule) と呼ぶことにする．

$R(L)$ を用いて，集合 $R = 0$ に関する次の公式を得る．

補題 4.7.1　r–L 図において，集合 $R = 0$ は，2 つの関数

$$L_\pm(r) = (2\mathrm{M}aEr \pm D(r)^{1/2})/(r(2\mathrm{M} - r))$$

の (実数値の) グラフの共通部分である．ここに，$r \neq 0, \neq 2\mathrm{M}$, であり，$D(r) = r\Delta(r)\phi(r)$ は $R(L)$ の**判別式**の 4 分の 1 であり，多項式 $\phi(r)$ は

$$\phi(r) = (E^2 + \mathfrak{q})r^3 - 2\mathrm{M}\mathfrak{q}r^2 - Qr + 2\mathrm{M}Q$$

で与えられる．

証明　$R(L) = 0$ は L の 2 次方程式であるから，これを解く．$R(L) = 0$ の判別式を

$\mathcal{D}$ とすると，$D(r) = \mathcal{D}(r)/4$ として，上式 $L_\pm$ を得る．すなわち，

$$D(r) = 4a^2E^2\mathrm{M}^2r^2 + r(r - 2\mathrm{M})R_0(r)$$
$$= r[4a^2E^2\mathrm{M}^2r + (r - 2\mathrm{M})R_0(r)]$$

である．$D(r)$ が $\Delta(r)$ を商に持てば $D(r_\pm) = 0$ となるが，上式のように $\phi(r)$ を置くと，直接の計算から $D(r) = r\Delta(r)\phi(r)$ を得る．□

多項式 $R(L)$ は，$r = 0, r = \mathrm{M}$ のときを除いて，L の 2 次式であり，$L_v(r) = 2\mathrm{M}aE/(2\mathrm{M} - r)$ を**頂点**とする放物線となっている．r 座標を r としたときの垂直線との交点の数 $\mu(r)$ は，判別式 $D(r)$ の値が負，ゼロ，正のそれぞれに対して，0, 1, 2 となる．もちろん，$\mu(r) = 2$ の場合，2 つの交点は $L_v(r)$ に対して対称にならんでいる．このことから，r–L 図において，曲線 $r \to (r, L_v(r))$ を**中央線** (midline) と呼ぶことにする．この曲線は，r 軸と直線 $r = 2\mathrm{M}$ を漸近線とする直角双曲線で，($E > 0$ のとき) $r < 2\mathrm{M}$ ならば r 軸の上，$r > 2\mathrm{M}$ ならば下，となっている．

$\mu(r) = 1$ のとき，つまり，曲線 $L \to (r, L)$ 上で $R = 0$ となる点が 1 個のときには，その点は頂点 $(r, L_v(r))$ である．この頂点は，曲線上で $\partial R/\partial L = 0$ となる唯一の点でもある．この式を満たす点は，$R(r, L)$ の危点か，接線が垂直となる点である．つまり，中央線と $R = 0$ の交点は，$R = 0$ の接線が垂直となる点，それに，$R = 0$ 上の危点，なのである．これらのことを念頭において，次の節で，r–L 図上に中央線を描くことにする．

もう 1 つ，許容・禁止の両領域に関する，簡単だが重要な性質が $R(L)$ の式から得られる．もし $0 < r < 2\mathrm{M}$ ならば $r(2\mathrm{M} - r) > 0$ であるから，十分 $|L|$ が大きいときには，$R(r, L) > 0$ となる．つまり，$|L|$ が小さいときを考えなければ，r 直線は許容領域に存在するのである．対称的に，$r < 0, r > 2\mathrm{M}$ ならば，$r(2\mathrm{M} - r) < 0$ であるから，$|L|$ が大きければ $R(r, L) < 0$ となり，これは禁止領域となる (図 4.9, 図 4.12 を見よ).

$R(L)$ の式から，$r = 0$ と $r = 2\mathrm{M}$ の所では状況が異なることが分かる．$r = 0$ の場合には，R は定数 $-a^2Q$ となる．直線 $r = 2\mathrm{M}$ の上とその近くでは，R は次のようになる．

補題 4.7.2 r–L 図において，関数 $L \to R(2\mathrm{M}, L)$ は，($E > 0$ のとき) 傾きが負の直線となる．よって，$L > L_0$ ならば $R(2\mathrm{M}, L) < 0$, $L < L_0$ ならば $R(2\mathrm{M}, L) > 0$ となる臨界運動量 L_0 が存在する．さらに $0 < \delta \ll \mathrm{M}$ のとき，十分に大きい $|L|$ に対して $R(2\mathrm{M} + \delta) < 0$, $R(2\mathrm{M} - \delta) > 0$ である．

証明　$R(L)$ の式に $r = 2\mathrm{M}$ を代入すれば，関数 $L \to R(2\mathrm{M}, L)$ は，$E > 0$ のとき，傾きが $-8\mathrm{M}^2 aE < 0$ である直線となる．この関数は $L_0 = R(2\mathrm{M}, 0)/(8\mathrm{M}^2 aE)$ でゼロとなる．後半は，上記に述べたことから分かる．あるいは，$r = 2\mathrm{M} \pm \delta$ を直接 $R(L)$ へ代入すればよい．□

このことを r–L 図で記述すると，垂直線 $r = 2\mathrm{M}$ が，曲線 $R(r, L) = 0$ で $L \to +\infty$，$L \to -\infty$ としたときの漸近線となっているのである．詳しくいうと ($E > 0$ として)，$L \to +\infty$ のときは左 ($r < 2\mathrm{M}$) から近づき，$L \to -\infty$ のときは右 ($r > 2\mathrm{M}$) から近づくことになる．このことは，図 4.9, 図 4.12 から明らかである．

r–L 図は，垂直方向の帯を調べるのに役立つ．ボイヤー－リンキスト・ブロック II の帯 $r_- < r < r_+$ においては，非空間的測地線は，とくに単純なふるまいをする．実際、この測地線は II へ戻らないので，R はゼロとなることはない．

補題 4.7.3　遅速カー時空において，時間的 (あるいは零的) 測地線 γ を r–L 図で描けば，閉じた垂直方向の帯 $r_- \leq r \leq r_+$ 上で $R > 0$ となる．ただし，

$$L_\pm = L_v(r_\pm) = 2\mathrm{M}aE/(2\mathrm{M} - r_\pm) = 2\mathrm{M}aE/r_\mp = 2\mathrm{M}r_\pm E/a$$

を満たす 2 点 (r_-, L_-), (r_+, L_+) では $R = 0$ となる．この 2 点においては，曲線 $R = 0$ は，直線 $r = r_-$ と $r = r_+$ に (帯の外側から) 滑らかに接している．

証明　一般に，測地線に関して，式 $R = \mathbb{P}^2 + \Delta(\mathbf{q}r^2 - \mathcal{K})$ は $R(r_\pm)^2 = \mathbb{P}(r_\pm)^2$ となる．ここに，$\mathbb{P}(r_\pm) = ({r_\pm}^2 + a^2)E - La$ である．よって，$L_\pm$ において $\mathbb{P}(r_\pm) = 0$ となる以外は $R(r_\pm) > 0$ である．残りの式は，$r_- + r_+ = 2\mathrm{M}$, $r_- r_+ = a^2$ より出る．これらは，中央線が直線 $r = r_\pm$ と交わる所である．

前に述べたように，直線 $r = \mathrm{M}$ において $R > 0$ である．よって，帯 $r_- < r < r_+$ で R がゼロとなることはないから，この帯上で $R > 0$ となる．

$L_\pm$ は $r = r_\pm$ 上の最小点であるから，$(r_\pm, L_\pm)$ において $\partial R/\partial L = 0$ である．あとは，これらの点において $\partial R/\partial r \neq 0$ であることを示せばよい．しかるに，

$$\partial R/\partial r = 2\mathbb{P}\ \partial\mathbb{P}/\partial r - 2(r - \mathrm{M})(r^2 + \mathcal{K}) - 2r\Delta$$

であるから，$(r_\pm, L_\pm)$ において $-2(r_\pm - \mathrm{M})({r_\pm}^2 + \mathcal{K}) \neq 0$ を得る．□

注意 4.7.4　軌道を調べる上でなぜカーター定数 Q が便利かというと，L に関して 2 次である関数 R が，Q に関しては 1 **次**だからなのである．実際，$R = \mathbb{P}^2 - \Delta(r^2 + \mathcal{K})$

と $\mathcal{K} = Q + (L - aE)^2$ から，$R(r) = -\Delta(r)Q + R_0(r)$ となる．ここに，$R_0(r)$ は $Q = 0$ とおいて得られる．(つまり，$R_0(r)$ は，赤道面における測地線の r－方程式なのである.) 他の第 1 積分を一定にしておくと，**Q が増えるにしたがって禁止領域が増えていく**. 実際，帯 $r_- \leq r \leq r_+$ においては，$\Delta \leq 0$ であり，(境界の 2 点を除いて) 禁止領域になっていて，Q が増えれば，$R(r)$ が減少している．‖

次に，補題 4.7.1 の判別式に表れる多項式 $\phi(r)$ を詳しく調べることにする．これを調べることの重要性は，この多項式の解が $D(r)$ を与え，r–L 図における $\mu = 1$ なる点を決定する，という点にある．ひいては，r–L 図における禁止領域を決定し，これにより軌道の状況を調べることが可能となるのである．

補題 4.7.5　時間的測地線において $\phi(r) = er^3 + 2\mathrm{M}r^2 - Qr + 2\mathrm{M}Q$, $e = E^2 + \mathfrak{q}$ を考える．

(1) $Q > 0$ のとき，ϕ は $0 \leq r \leq 2\mathrm{M}$ で解を持たない．さらに $e > 0$ ならば，負の解は 1 個だけであり，他の解はゼロか正である．もし $e < 0$ ならば，負の解はなく，1 個か 3 個の正の解を持つ．$e = 0$ のときは，実数解は存在しない．

(2) $Q < 0$ のとき，$e > 0$ であり，ϕ は，$0 < r < 2\mathrm{M}$ において 1 個の解を持ち，$r < 0$ においては 2 個か 0 個の解を持つ．

証明　(1) 先ず，$e > 0$ とする．$r < 0$ においてデカルトの定理における符号は $(- + ++)$ であるから，負の解が 1 個存在する．$Q \neq 0$ であるから，$r = 0$ は解とならない．$0 < r \leq 2\mathrm{M}$ においては $\phi(r) > 0$ であることは，$r > 0$ で $er^3 + 2\mathrm{M}r^2 > 0$, $r < 2\mathrm{M}$ で $-Qr + 2\mathrm{M}Q > 0$ から分かる．

もし，$e < 0$ ならば，$r < 0$ のとき $\phi(r)$ の各項は正である．$0 > e \geq -1$ であるから，$0 < r < -2\mathrm{M}/e(\geq 2\mathrm{M})$ において $er^3 + 2\mathrm{M}r^2 > 0$ となり，$r < 2\mathrm{M}$ において $-Qr + 2\mathrm{M}Q > 0$ である．そして，$e = 0$ ならば，M と Q が共に正であるから，実数解はない．

(2) デカルトの符号規則の定理から，正の解は唯一であることが分かる．また，$\phi(0) < 0$, $\phi(2\mathrm{M}) > 0$ である．□

特別な場合 $Q = 0$, $Q < 0$ については，この章の後半で述べる．なお，$Q > 0$ のとき，**ϕ の解は，**$D = r^2\Delta\phi$ **の解** $0, r_-, r_+$ **と異なる**ことを注意しておく．

この補題で，0 個か 2 個，1 個か 3 個，といったあいまいな表現をしたが，これを正確にしておく．3 次実多項式の判別式 d は実数解の個数を調べるものである．$d<0$ ならば 1 個，$d>0$ ならば 3 個，$d=0$ ならば重解，となる．一般に $ar^3+br^2+cr+d=0$ の判別式 discrim は

$$\mathrm{discrim}(ar^3+br^2+cr+d) = -4ac^3 - 4b^3d + b^2c^2 - 27a^2d^2 + 18abcd$$

であるが，これを多項式 ϕ に用いると，

$$f(e,Q) = -eQ^2 + Q\mathrm{M}^2(27e^2+18e-1) + 16\mathrm{M}^4$$

として

$$d = d(e,Q) = \mathrm{discrim}(\phi, r) = -4Qf(e,Q)$$

となる．目的とするのは，r–L 図において，$d>0$, $d=0$, $d<0$ となる領域を調べることである．そこで，$\beta=\beta(e)=27e^2+18e-1$ として

$$Q_\pm(e) = \mathrm{M}^2[\,\beta \pm (\beta^2+64e)^{1/2}\,]/(2e)$$

のとき $f=0$ を解く．

もちろん，上式が実数値関数となるのは $\beta^2+64e \geq 0$ の場合である．この不等式は，$e>0$ のときつねに成立する．因数分解で

$$\beta^2 + 64e = (27e^2+18e-1)^2 + 64e = (e+1)(9e+1)^3$$

となるから，$\beta^2+64e>0 \Leftrightarrow e>-1/9$ である．($e=-1$ でゼロになることは，このときは $Q<0$ となるので，除くことができる.) したがって

$$Q_\pm(e) = (\mathrm{M}^2/2e)[\,27e^2+18e-1 \pm (e+1)^{1/2}(9e+1)^{3/2}\,]$$

を得る．

2 つの関数 $Q_-(e), Q_+(e)$ を，$e \geq -1/9$ で調べる．2 つは，$e=-1/9$ においては同じ値 $12\mathrm{M}^2$ を持つが，その他では大きく異なっている．Q_+ の場合，極限値をとって $Q_+(0)=16\mathrm{M}^2$ とする．そして，$e \gg 1$ では，$Q_+(e) \sim \beta(e)/e \sim \mathrm{M}^2(27e+18)$ であり，図 4.8 のように，ほとんど直線となっている．

一方 Q_- については，負の方から $e \to 0$ のとき，$+\infty$ となる．($e<0$ においては $Q_-(e) > Q_+(e)$ である.) このことは，$e=0$ の近くで Q_+ が有界であることと

$$\frac{1}{2}(Q_-(e)+Q_+(e)) = \mathrm{M}^2(27e^2+18e-1)/(-2e)$$

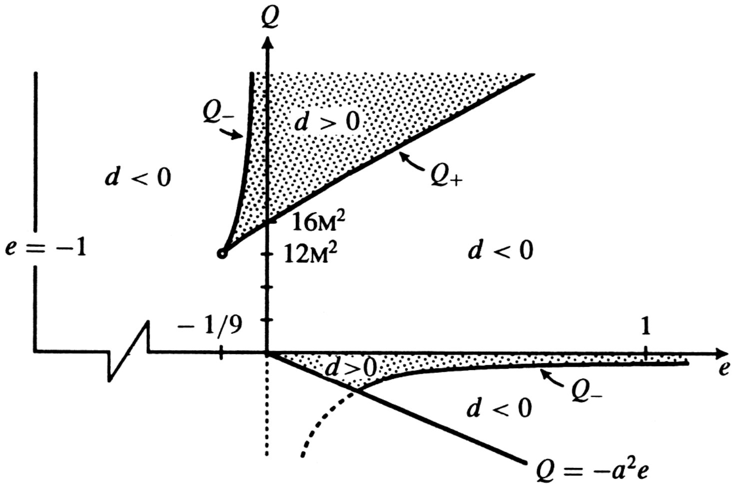


図 4.8　$e-Q$ 座標における式 $d(e,Q)=\mathrm{discrim}(\phi,r)$ の符号．$d(e,Q)<0$ の場合，この条件で描かれる $r-L$ 図上の曲線 $R=0$ には，$(r_\pm, L_\pm)$ 以外に，接線が垂直となる点が 1 個ある．$d>0$ ならば，そのような点は 3 個ある．$d=0$ の場合に重解となる．Q 軸の負の範囲は，見やすいように目盛を修正してある．

であることから分かる．例えば，$e=-.01$ で $\mathrm{M}=1$ のときは，$Q_+(-.01)\approx 15.6$ であり，一方 $Q_-(-.01)>100$ である．

$e>0$ においては，$Q_-(e)$ はつねに負で，$e\to 0$ のとき $-\infty$ に近づき，$e\to+\infty$ のとき 0 に近づく．

e–Q 平面の全体が r–L 図と対応しているのではない．対応するのは次の 3 つの領域である．(1) $e=E^2-1$ から，$e\geq -1$ の所．(2) 渦測地線は脱出エネルギーを持つから，$e<0$ のときは，$Q>0$ の所．(3) $e>0$ のときは，カーターの不等式から，$Q>-a^2e$ の所．したがって，図 4.8 において，第 3 象限と第 4 象限の直線 $Q=-a^2e$ の下の部分は除かれることになる．

注意 4.7.6　まとめると次のようになる．有効エネルギー $e=E^2+\mathfrak{q}$ とカーター定数 Q で与えられる r–L 図は，判別式 $\phi(r)=er^3-2\mathrm{M}\mathfrak{q}r^2-Qr+2\mathrm{M}Q$ によって決定される．とくに，ϕ の解の数が問題となる．e と Q を与えたとき，この数は，もう 1 つの判別式 $d(e,Q)=\mathrm{discrim}(\phi,r)$ によって決定される．よって，図 4.8 のよう

に，d は e–Q 平面上の関数となる．この平面における $d>0$ と $d<0$ の 2 つの領域は，関数

$$Q_{\pm} = (\mathrm{M}^2/(2e))[27e^2 + 18e - 1 \pm (e+1)^{1/2}(9e+1)^{3/2}]$$

のグラフにより確定される．よって，例えば $e>0$ とすると，$0<Q<Q_{\pm}$ のとき，ϕ の負の解が唯一であり，$Q>Q_{\pm}$ のとき，3 個の解があることが分かる．これらは単純解であり，e と Q で決定する r–L 図の垂直な接線を表している．これについては次の節で説明する．同様にして，$e<0$ のときは，ϕ は，$-1/9<e<0$ かつ $Q_{+}<Q<Q_{-}$ においては 3 個の解があり，それ以外では，解は負の解が 1 個あるだけである．‖

次に，$R=0$ において，接線が垂直となる点と危点とを，判別式 ϕ を用いて区別できることを示す．本節のここからは，このような危点の近くにおける r–L 図について検討する．

補題 4.7.7　いま，$e \neq 0, Q>0$ とし，$\phi(r)$ の解を r_0 として $L_0 = L_v(r_0)$ と置く．このとき次が成立する．

(1) $R=0$ が，(r_0, L_0) において垂直な接線を持つ．$\Leftrightarrow$ r_0 は $\phi(r)$ の単純解である．

(2) (r_0, L_0) が関数 $R(r,L)$ の危点である．$\Leftrightarrow$ r_0 は $\phi(r)$ の重解である．もし $\phi''(r_0)>0$ ならば，(r_0, L_0) は鞍点であり，中央線に沿って許容領域と隣接している．もし $\phi''(r_0)<0$ ならば，(r_0, L_0) は最大値を与える孤立点であり，禁止領域の中にある．

証明　r_0 の近くで

$$L_{\pm}(r) = [2\mathrm{M}aEr \pm (r\Delta(r)\phi(r))^{1/2}]/(r(2\mathrm{M}-r))$$

を考える．$0 \le r \le 2\mathrm{M}$ において $\phi(r)$ は解を持たないから，この式において r_0 の近くでゼロとなる項は ($\phi(r)$ 以外) ない．

r_0 が単純解ならば，つまり $\phi(r_0)=0, \phi'(r_0) \neq 0$ ならば，$\phi(r)$ は，r_0 の一方で正，他方で負となる．以下 $\phi'(r_0)>0$ としても一般性は失われない．(これは，中央線上にある点で (r_0, L_0) の近くにあるものは，$r>r_0$ ならば許容領域，$r<r_0$ ならば禁止領域であることになる.) このとき，r_0 の近くの $r>r_0$ において，$f(r_0)>0$

であり $\phi(r) \approx (r-r_0)f(r)$ と書くことができる．つまり $L_\pm(r) \approx L_0 \pm (r-r_0)^{1/2}B$ である．ここに，B はゼロでない実数値である．よって，$R=0$ は (r_0, L_0) において垂直な接線を持つことになる．

次に，r_0 が重解を持つとする．もし $\phi''(r_0) > 0$ ならば，r_0 に近い $r \neq r_0$ で $\phi(r) > 0$ である．よって，$B \neq 0$ で $L_\pm(r) \approx L_0 \pm |r-r_0|B$ と書ける．これは，(r_0, L_0) が $R(r, L)$ の鞍点で，(r_0, L_0) の両側の中央線に沿っては許容領域であることを示している．

r_0 が重解で $\phi''(r_0) < 0$ ならば，r_0 の近くの $r \neq r_0$ で $\phi(r) < 0$ となる．よって，(r_0, L_0) の周りに帯 $r_0 - \epsilon < r < r_0 + \epsilon$ が存在し，そこでは $R(r_0, L_0) = 0$ 以外 $R < 0$ となる．よって，(r_0, L_0) は関数 $R(r, L)$ の最大値を与える点であり孤立点である．□

注意しなければならないのは，図 4.8 の $d \geq 0$ における点 $(e, Q) = (-1/9, 12\mathrm{M}^2)$ で与えられる時間的 r–L 図である．この点は，代数的には，多項式 $\phi(r)$ が 3 重解となる所である (つまり，補題 4.7.7 で言及しなかった $\phi''(r_0) = 0$ の場合なのである)．実際，方程式 $\phi(r) = e(r-r_0)^3$ の係数から

$$-3er_0 = 2\mathrm{M}, \qquad 3e{r_0}^2 = -Q, \qquad -e{r_0}^3 = 2\mathrm{M}Q$$

となり，$r_0 = 6\mathrm{M}$, $(e, Q) = (-1/9, 12\mathrm{M}^2)$ となる．これから得られる r–L 図では，点 (r_0, L_0) は，**退化**している危点であり，中央線上にあるので $L_0 = L_v(6\mathrm{M}) = -a\sqrt{2}/9$ である．この r–L 図は，図 4.12 と似たようなものであるが，許容領域が水平方向に突出している．

$R(r, L) = 0$ 上の危点は，r–L 図の $d(e, Q) = 0$ であるが，$Q > 0$ の場合には，次の結果から，危点と垂直な接線の位置が分かる．

命題 4.7.8 $Q > 0$ のとき，$d(e, Q) = 0$ となる (e, Q) の $r - L$ 図を考える (つまり，$e \geq -1/9$, $Q = Q_\pm(e) > 0$ である)．$e = -1/9$ を除けば，$R = 0$ は，接線が垂直となる点 (r_1, L_1), $r_1 \neq r_\pm$ を 1 個，危点 (r_2, L_2) を 1 個持っている．両方とも中央線上にあり，$L_i = L_v(r_i)$ である．さらに，次のようになる．

(1) $e \geq 0$, $Q = Q_+(e)$ の場合，$r_1 < 0 < 2\mathrm{M} < r_2$ である．さらに，(r_2, L_2) は関数 $R(r, L)$ の鞍点であり，中央線に沿っては許容領域になっている．

(2) $-1/9 < e < 0$, $Q = Q_+(e)$ の場合，$2\mathrm{M} < r_2 < r_1$ である．つまり，

$$2\mathrm{M} < r_2 < 2\mathrm{M}/(3|e|) < r_1 < 2\mathrm{M}/|e|$$

であり，(r_2, L_2) は，上記と同じように鞍点となる．

(3) $-1/9 < e < 0,\ Q = Q_-(e)$ の場合，$2\mathrm{M} < r_1 < r_2$ である．つまり，

$$2\mathrm{M} < r_1 < 2\mathrm{M}/(3|e|) < r_2 < 2\mathrm{M}/|e|$$

であり，(r_2, L_2) は，禁止領域内で $R = 0$ を満たす点である (孤立点).

証明　(1) $e > 0,\ d = 0$ の場合，補題 4.7.5 から，$\phi(r)$ は，$r < 0$ で単純解を持ち，$r > 0$ で重解を持つ．また，$\phi(0) = 2\mathrm{M}Q > 0,\ \phi'(0) = -Q < 0$ で，$r \to +\infty$ のとき $\phi(r) \to +\infty$ となる．よって，$r > 0$ における重解では $\phi''(r_2) > 0$ である ($\phi'' = 0$ の場合は，先に除いてある). 許容領域の鞍点であることは，補題 4.7.7 から分かる．

(2) $e < 0$ の場合，補題 4.7.5 から，負の解はなくて正の解のみで，その重複度は全部で 1 か 3 であることが分かる．$d = 0$ ゆえ，重複度が 1 の場合は考えなくてよい．また $e = 1/9$ の場合は除くから，単純解 r_1 が 1 個，重複解 r_2 が 1 個，ということになる．

(3) も同様に示すことができる．□

次の節でいろいろな r–L 図を描く．上記の命題の (1) は図 4.11 で，(2) と (3) は図 4.15 で確認することができる．

命題 4.7.8 で述べた危点 (r_2, L_2) は次のようになる．r_2 は，2 つの 2 次方程式

$$\mathrm{M}r^2 - Qr + 3\mathrm{M}Q = 0, \quad er^2 - \mathrm{M}(3e-1)r - 4\mathrm{M}^2 = 0$$

の解である．この 2 式は，$\phi(r) = 0$ と $\phi'(r) = 0$ から e と Q を消去したものである．このとき，中央線に関する性質から $L_2 = L_v(r_2) = 2\mathrm{M}aE/(2\mathrm{M} - r_2)$ である．

4.8　第 1 積分と軌道

時間的カー測地線の第 1 積分により，測地線の軌道タイプばかりでなく，遅速カー時空の半径関数 $r(s)$ と 水平線半径 $0 < r_- < r_+ < 2\mathrm{M}$ の関係までも決定されることを，r–L 図を使って調べることにする．これを基にして，4.10 節において，ボイヤー－リンキスト・ブロックの大域的なパターンにおける測地線の軌道を決定する．

時間的測地線に関して最も重要なことは，それが脱出エネルギーを持っているかどうか，である (つまり $e = E^2 - 1$ の符号である). 次に重要なのが，カーター定数 Q

の符号である．この節では〈標準的な〉場合として $Q>0$ とする．この場合では，測地線は $r=0$ に届かず，ϑ が $\pi/2$ に関して振動することになる．この現象は，$Q<0$, $Q=0$ の場合には生じない．渦の場合である $Q<0$ については 4.9 節で，$Q=0$ については 4.14 節と 4.15 節で述べる．

$Q>0$ の場合，$r-L$ 図は，e の符号と Q の相対的な大きさにより，4 つの基本的な形に分けることができる．それを 1 つずつ調べることにする．

大陸形

$r-L$ 図の中でいちばん普通なものは，脱出エネルギーが正 $e>0$ で，カーター定数が通常な範囲 $0<Q<Q_+(e)$ にあるものである．ここに，$Q_+(e)\sim 16+27e$ で，これは注意 4.7.6 の式から得られるものである．図 4.9 はこれを描いたものであり，$r>0$ の側では 2 つの〈大陸〉があることが分かる．この状況はニュートン力学の場合に似ている．粒子が $r=+\infty$ から落ちてくる場合，その角運動量 $|L|$ が大きいときには，フライバイ軌道となる．もし $|L|$ が小さいなら，粒子は地平面を通って進行する．これについては第 4.10 節で詳しく述べる．

範囲 $0<r<2\mathrm{M}$ では多くの有界軌道がある．順行，逆行どちらもある．粒子が $r=0$ に届くことは (エネルギーの状態に関わらず) ない．注意 4.7.6 と補題 4.7.7 で述べたように，危点は存在せず，$r=r_\pm$ 以外に垂直な接線は 1 つしかない．それは (r_0,L_0) を通るものであり，$r<0$ において $r=0$ に一番接近しているのである．この r_0 は，判別式 $\phi(r)$ の唯一の実数解であり，中央線の上にある．もちろん，図 4.9 の右図の 2 点 $(r_\pm,L_\pm)$ も中央線上にある．

軌道のタイプに関する妥当な質問は，多項式を使って答えることができる．しかし，多項式自体は妥当であるとは限らない．例えば球軌道の位置決定は，その前後で軌道のタイプが変化するので，重要な問題である．その半径は，方程式 $R=0$ と $dR/dr=0$ の共通解で与えられるが，これらの水平な接線の位置を定めるのは，垂直な接線の場合よりもむずかしい．時間的赤道測地線という単純な場合では，補題 4.14.9 から，実数解が円軌道の半径である (最小の) 次数が 6 の多項式が 1 つ得られる．いまの場合も同様に考えると次数 10 の多項式となり，実際の解が求まるわけではない．具体的に調べるために，$R=0$, $dR/dr=0$ の解を数値計算で求めることもある．例えば図 4.9 の場合には，$(r_n,L_n)\approx(1.63,3.06)$, $(r_s,L_s)\approx(4.56,-6.52)$ となる．

図 4.9 に表れた $r-L$ 図のいろいろな性質は，一般的にも成立する．この図では，有界区間はなく，カー外部に安定球軌道はない (不安定球軌道は存在する)．これは，次の D. C. Wilkins (1972) の結果によれば，Q の大きさに関係せずに成立するものである．

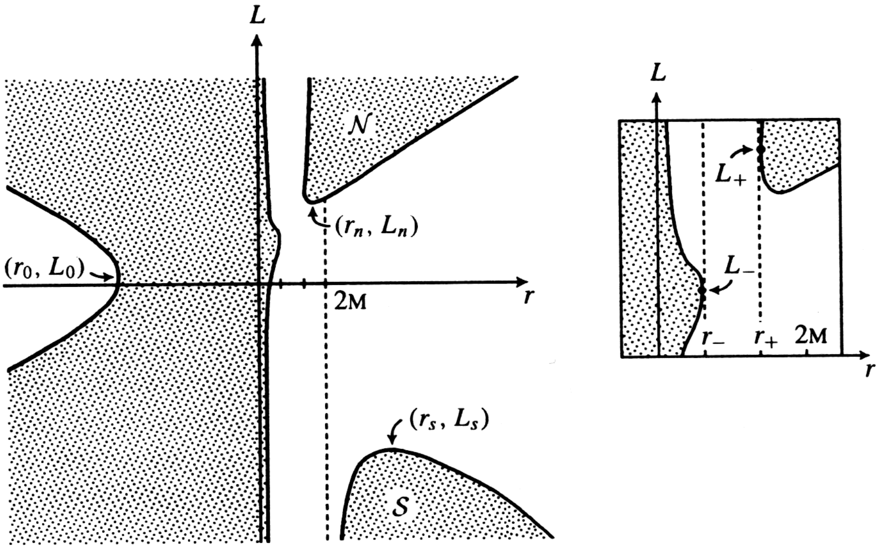


図 4.9　大陸形．時間的測地線で，脱出速度が $e > 0$ (実際 $E > 1$) で，カーター定数が $0^+ < Q < Q_+(e)$ であるものの標準的な $r-L$ 図．禁止領域は灰色で示してある．各水平線 $L =$ (定数)t に対して，$R \geq 0$ である最大区間が，その角運動量を持つ測地線の $r(s)$ の範囲になっている．右図は，ブロック II での細図である．粒子で $r = +\infty$ から落ちてくるもののほとんどは，フライバイ軌道となっている．一方，$r < 0$ では全ての粒子がフライバイ軌道である．(パラメータの値は $\mathbf{M} = 1, a^2 = .84$, $e = E^2 - 1 = 0.4$, $Q = 1$ である．注意　この値 $a^2/\mathbf{M}^2 = .84$ は，回転効果を強調するための大きさである．また，$r_- = .6\mathbf{M}$, $r_+ = 1.4\mathbf{M}$ は，地平面の半径として都合のよい値である.)

命題 4.8.1　遅速カー時空あるいは極限カー時空において，ブロック I もしくはカー外部にある時間的測地線を γ とする．この γ が脱出エネルギー $e = E^2 - 1 \geq 0$ を持つなら，γ は，有界区間も安定球軌道も持たない．

証明　もし γ が上記の軌道を持ち，$e \geq 0$ であるならば，矛盾が生じることを示す．先ず，軌道が有界区間を持つとする．つまり転回点 r_1, r_2 があり，$r_+ < r_1 < r_2$ であり，dR/dr が，r_1 では正，r_2 では負であるとする．このとき，$R(r)$ は，r_1 の左側と r_2 の右側で負となる．もし e が 0 以上であるならば，式

$$R(r) = er^2 + 2\mathrm{M}r^3 + \mathfrak{X}r^2 + 2\mathrm{M}\mathcal{K}r - a^2Q$$

の最初の 2 項から，R は，もう 1 つの零点 r_3 を持つことになる．ここに $r_3 > r_2$ である．左側を考えれば，補題 4.7.3 から，$r_- < r < r_+$ で $R > 0$ であるから，もう 1 つの零点 r_0 が $0 < r_0 < r_1$ の範囲にあることになる．これで $R(r)$ は正の範囲で 4 個の零点を持つことになるが，$R(r)$ は 4 次であり，その解の和が $-2\mathrm{M}/e \leq 0$ となることから，これは矛盾である．

また，$r_1 = r_2$ のとき安定球軌道で，$r_1 = r_2$ の左側と右側では $R(r)$ は負となり，同様な結果を得る．□

これについて，Wilkins (1972) は間接的な証明を行っている．なお，Krivenko, et al, (1976) も参照せよ．上記のことから分かるように，この節でとりあげている $r-L$ 図では，カー外部では不安定球軌道となるのが普通である．図 4.9 に示した 2 番目の性質は，$Q \geq 0$ 全体で成立する．

命題 4.8.2　時間的カー測地線で $Q \geq 0$ であるものについては，$r < 0$ における軌道は全て，$r_\tau \leq -2\mathrm{M}/e$ を転回点とするフライバイ・タイプである．ここに $e = E^2 - 1$ である．

証明　(Robert Steinberg による) 各測地線 γ に対して，多項式 $R(r)$ は，少なくとも負の解を 1 個持つ．実際，$Q > 0$ ならば $R(0) = -a^2 Q < 0$ であり，$Q = 0$ ならば $(dR/dr)(0) = 2\mathrm{M}\mathcal{K} > 0$ である．よって，十分小さい $r < 0$ に対して $R(r) < 0$ である．しかるに γ は脱出エネルギーを持ち $\lim_{r \to -\infty} R(r) = +\infty$ だから，負の解が存在する．そこで，負の解はこれだけであり，$-2\mathrm{M}/e$ よりも小さいことを示す．(測地線に関して，$r < 0$ では $e > 0$ であることに注意.)

先ず，$\mathfrak{X} = a^2 e - L^2 - Q$ が非正であるとする．このとき，$r < 0$ において

$$R(r) = er^4 + 2\mathrm{M}r^3 + \mathfrak{X}r^2 + 2\mathrm{M}\mathcal{K}r - a^2 Q$$

の符号は $(+- \sim --)$ である (ここに $\sim$ は $\mathfrak{X} \leq 0$ を示す). よって，デカルトの符号規則から，負の解が 1 個あることが分かる．また，区間 I: $-2\mathrm{M}/e < r < 0$ において $er^4 + 2\mathrm{M}r^3 = r^3(er + 2\mathrm{M}) \leq 0$ で，$r < 0$ で ($\mathfrak{X} \leq 0$, $\mathcal{K} > 0$, $Q \geq 0$ ゆえ) $\mathfrak{X}r^2 + 2\mathcal{K}r - a^2 Q < 0$ であるから，区間 I で $R(r) < 0$ である．

また，$\mathfrak{X} > 0$ とする．多項式 $R(r)$ を

$$R_1(r) = (r^2 + 2\mathrm{M}r/e)(er^2 + \mathfrak{X}), \quad R_2(r) = 2\mathrm{M}(\mathcal{K} - \mathfrak{X}/e)r - a^2 Q$$

の和として考える．区間 I: $-2\mathrm{M}/e < r < 0$ において $R(r) < 0$ であることが，次の事から分かる．

1. 区間 I において $R_1(r) < 0$ である．**証明**：区間 I で $r^2 + 2\mathrm{M}r/e < 0$, 全ての r に対して $er^2 + \mathfrak{X} > 0$ である．□

2. 範囲 $r < 0$ において $R_2(r) < 0$ である．**証明**：仮定 $Q \geq 0$ より，直線 $r \to R_2(r)$ の傾きが非負であることを示せばよい．つまり，$e\mathcal{K} - \mathfrak{X} \geq 0$ を示す．

しかるに，

$$\begin{aligned} e\mathcal{K} - \mathfrak{X} &= (E^2 - 1)(Q + (L - aE)^2) - a^2(E^2 - 1) + L^2 + Q \\ &= E^2Q + E^2(L - aE)^2 + 2aEL - 2a^2E^2 + a^2 \\ &= E^2Q + (E(L - aE) + a)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

となる．□

さて，曲線 $R(r)$ は，0 と $-2\mathrm{M}/e$ の間で r 軸の下側にあるから，それ以外で $d^2R/dr^2 \geq 0$ となること，つまり，少なくとも $r < -2\mathrm{M}/e$ では上に凸であることを示せばよい．しかるに，

$$d^2R/dr^2 = 12er^2 + 12\mathrm{M}r + 2\mathfrak{X} = 12r(er + \mathrm{M}) + 2\mathfrak{X}$$

であるから，$r < -2\mathrm{M}/e$ において上に凸であることが分かる．□

図 4.9 の大陸 $\mathcal{N}$ と $\mathcal{S}$ の岸を形成する曲線は，因果的特性にかかわらず，脱出エネルギーを持つ全てのカー測地線について成立するある性質を示唆している．つまり，$r - L$ 平面において，曲線 $R = 0$ は，交差する 2 つの直線に (4 つの象限全てにおいて) 漸近しているのである．この 2 つの直線は，個別に，$e = E^2 + \mathfrak{q} > 0$ と M に従属している．したがって，中心から十分離れたところでは，回転の影響を無視できるのである．

これらの岸を表す式は，補題 4.7.1 の

$$L_{\pm}(r) = (2\mathrm{M}aEr \pm D(r)^{1/2})/(r(2\mathrm{M} - r)$$

である．

補題 4.8.3　脱出エネルギーを持つ任意のカー測地線 γ に対して，

$$A_{\pm}(r) = \mp(E^2 + \mathfrak{q})^{1/2}(r + \mathrm{M}E^2)/(E^2 + \mathfrak{q})$$

と置くと，$|r| \to \infty$ のとき，$L_\pm(r) - A_\pm(r) \to 0$ となる．

証明　これらの漸近線は次のようにして得られる．いま $r \gg 1$ とすると，上式 $L_\pm$ の分子で $2\mathrm{M}aEr \ll r^2$ は無視できるから，

$$L_\pm(r) \approx \pm D(r)^{1/2}/(r(r-2\mathrm{M}))$$

となる．ここに，

$$D(r) = r\Delta(r)\phi(r) \quad ,\phi(r) = (E^2+\mathfrak{q})r^3 - 2\mathrm{M}\mathfrak{q}r^2 - Qr + 2\mathrm{M}Q$$

である．分母の $r(r-2\mathrm{M})$ を平方根の中に入れて，$L_\pm(r) \approx F(r)^{1/2}$ と書ける．ここに

$$F(r) = \Delta(r)\phi(r)/(r(r-2\mathrm{M})^2) = (E^2+\mathfrak{q})r^2 + 2\mathrm{M}E^2r + (\text{定数})$$

とした．2 項定理から，$r \to [\ ar^2+br+c\ ]^{1/2}$ は直線 $\sqrt{a}(r+b/(2a))$ に漸近することが分かる．したがって，$A_\pm$ の式が得られる．

極限についての結果も同様にして得られる．□

これらを使って，脱出エネルギーと適当なカーター定数を持つ軌道タイプを特徴づけることができる．

命題 4.8.4　脱出エネルギー $e>0$ とカーター定数 $0<Q<Q_+(e) \sim 16+27e$ を持つ時間的測地線の $r-L$ 図 では，禁止領域が 3 つ存在する．もし $r>\mathrm{M}$ ならば，(連結した) 禁止領域の $\mathcal{N}$ と $\mathcal{S}$ は極限境界点を持つ．$\mathcal{N}$ では L が (r_n, L_n) の最小値であり，$\mathcal{S}$ では L が (r_s, L_s) の最大値となっている．そして，$L_s < L_n$ である．

範囲 $r<0$ においては，全ての測地線はフライバイ軌道を持つ．また，$r>0$ においては，角運動量が $L>L_n$ あるいは $L<L_s$ である測地線は，r が小さいときには両方の地平面と交わる有界軌道 を持ち，r が大きいときには地平面と交わらないフライバイ軌道を持つ．角運動量が $L_s<L<L_n$ の場合には，両方の地平面と交わるフライバイ軌道を持つ (ただし，Q が小さい場合には，$(0, aE)$ の近くの小さい有界軌道となる)．

証明　注意 4.7.6 より，判別式 ϕ の解は 1 個であり，その値は負である．いま $r \gg 1$ とすると，補題 4.8.3 より $\mu(r)=2$ となる．つまり，直線 $r=$ (定数) 上に $R=0$

となる点が 2 個存在する．しかるに，ϕ は正の解を持たないから，$r > r_+$ に対して $\mu = 2$ となる．ただし，$r = 2\mathrm{M}$ の場合は除く (これは補題 4.7.2 で述べた)．したがって，$r > 2\mathrm{M}$ では，中央線は $R = 0$ と交わらない．実際，$|L|$ が大きいときには $R < 0$ であるから，中央線は $R > 0$ にある．

いま，(1) $r > \mathrm{M}$ かつ $L > L_v(r)$ あるいは (2) $r_- < r \leq 2\mathrm{M}$，のどちらかと $R(r, L) < 0$ を満たす点 (r, L) の集合を $\mathcal{N}$ とする．明らかにこれは開集合である．また，これが連結であること，つまり，任意の 2 点 (r_1, L_1) と (r_2, L_2) が，$R < 0$ において，曲線で結べることを示す．

場合 1. $L_1 = L_2 \gg 1$ のとき．水平線 $L = L_1 = L_2$ を考える．多項式 $R(r)$ の最高次の係数 e が正であるから，この直線は，$R = 0$ と，それぞれ $r < 0$ および $r > 2\mathrm{M}$ の範囲で 1 回ずつ交わる．また，$R = 0$ は，L 軸と $r = 2\mathrm{M}$ に漸近するから，この直線は，$R = 0$ と，それぞれ $0 < r < r_-$ および $r_+ < r < 2\mathrm{M}$ の範囲でも 1 回ずつ交わる．この直線が $R = 0$ と交わるのは最大 4 回であるから，r_1 と r_2 の範囲においては $R < 0$ となっている．

場合 2. $r_1 > 2\mathrm{M}, r_2 > 2\mathrm{M}$ のとき．この場合，定義より，2 点 (r_1, L_2) と (r_2, L_2) は中央線上にある．したがって，各直線 $r = r_i$ $(i = 1, 2)$ において，$L > \max\{L_1, L_2\}$ と置くと，区間 $[L_i, L]$ は $R < 0$ に在る．範囲 $L \gg 1$ では，場合 1 より，2 点 (r_1, L) と (r_2, L) は $R < 0$ でつなぐことができる．よって，(r_1, L_1) と (r_2, L_2) は，$[L_1, L] \cup [r_1, r_2] \cup [L_2, L]$ により $R < 0$ でつなげることができる．

場合 3. 2 点 (r_1, L_1) と (r_2, L_2) の少なくとも一方の r 座標が $r_+ < r_i \leq 2\mathrm{M}$ である場合 (図 4.9 を見よ)．前記と同様にして，直線 $L = L_i$ 上に R の零点が 4 個存在する．したがって，この直線の線分により，(r_i, L_i) と場合 2 の連結成分とを，$R < 0$ の範囲で，つなげることができる．

以上より $\mathcal{N}$ は連結である．同様にして $\mathcal{S}$ も調べることができる．$\mathcal{S}$ は，$r > 2\mathrm{M}$ の範囲で中央線の下にある点 (r, L) の集合である．これが連結であることは，上記と同様にして示すことができる (場合 2 は，一般の所で成立するから，そのままである)．

作り方から，$\mathcal{N}$ と $\mathcal{S}$ が，$r > r_+$ で，$R < 0$ である点を全て含んでいることが分かる．いま，$r > 2\mathrm{M}$ では $\mu = 2$ であるから，集合 $\mathcal{N}$ は $L = +\infty$ まで延びている．しかるに，$\mathcal{N}$ は，補題 4.8.3 より，水平線の下の部分ではコンパクトな閉包を持つから，L の極限点 (r_n, L_n) がある．同様にして，$\mathcal{S}$ には最大点 (r_s, L_s) がある．2–4 ルールから，この最小点と最大点は唯一であり，R の孤立零点である．したがって，これらは不安定球軌道である．

不等式 $L_n > L_s$ が成立する (つまり，$\mathcal{N}$ と $\mathcal{S}$ は交わらない)．実際，$R(r)$ は負の解を持つので，$L_n \leq L_s$ ならば 5 個の解を持つことになる．軌道に関する主張は明ら

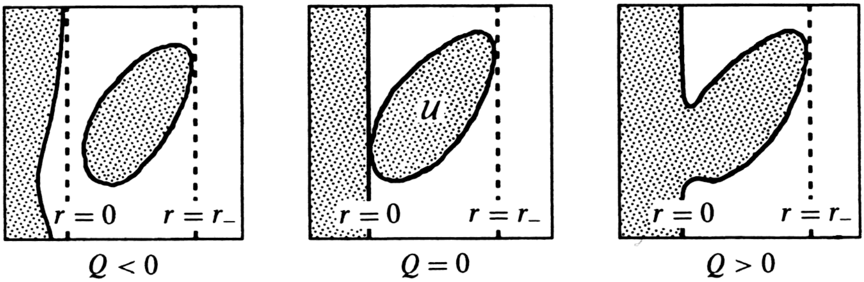


図 4.10 危点 $(0, aE)$ の近くの $|Q|$ が十分小さい場合の禁止領域．もし $Q=0$ ならば，$\mathcal{U}$ は卵形 で L 軸に接している．そして，Q の値が減少すると，$\mathcal{U}$ は孤立した島となる．逆に，Q の値がゼロから増加すると，$\mathcal{U}$ は岸と繋がって瘤のようになる．さらに増加すると，図 4.9, 図 4.12 のような，滑らかな海岸線となる．補題 4.7.3 に述べたように，全ての Q の値に対して，曲線 $R=0$ は点 (r_-, L_-) とつながっている．

かである．□

次の基本的な形に進む前に，$(0, aE)$ の近くの例外有界軌道について考える．この状況は，$|Q|>0$ が小さいときに，全てのエネルギーレベルで生じるものであり，この軌道が存在するのは点 $(0, aE)$ の近傍である．図 4.9 で分かるように，L 軸に沿った狭い禁止領域 (〈岸〉である) は，直線 $r=r_-$ に向かって膨れている．いま，$|Q|$ が十分小さい範囲でこの形がどう変わっていくかを見るために，先ず $Q=0$ を調べ，それから Q を少しずつ変化させてみることにする．

先ず $Q=0$ の場合には，点 $(0, aE)$ は $R=R(r, L)$ の危点である．実際，L 軸では $R=0$ なので $\partial R/\partial L=0$ であり，$r=0$ のとき $\partial R/\partial r = 2\mathcal{K} = 2(L-aE)^2$ となり，これがゼロとなるのは $L=aE$ のみである．したがって，$(0, aE)$ の近くで，関数 $R(r, L)$ は (よって禁止領域の形は) 第 1 積分での変化に大きく影響されることになる．

補題 4.8.5 時間的 $r-L$ 図において，$Q=0$ ならば，全ての E に対して，帯 $0<r<r_-$ に禁止領域 $\mathcal{U}$ が 1 つずつ存在する．この $\mathcal{U}$ は有界であり，$r=0$ から $r=r_-$ まで延びている．実際，この境界 ($R=0$ の 1 部分である) は，滑らかな単純閉曲線で，L 軸に $L=aE$ で接しており，直線 $r=r_-$ に $L_-=2\mathrm{M}Er_-/a$ で接している．(図 4.10 の $Q=0$ の場合を見よ.)

証明　先ず，危点 $(0, aE)$ の近くでの R のふるまいを考える．いま，

$$F(r) = er^3 + 2\mathrm{M}r^2 + \mathfrak{X}r + 2\mathcal{K}$$

として $R(r) = rF(r)$ とおく．このとき $(0, aE)$ において

$$\partial F/\partial r = \mathfrak{X} = a(E^2 - 1) - a^2E^2 = -a^2 < 0$$

である．よって，陰関数定理より，曲線 $F = 0$ は (したがって $R = 0$ は) $(0, aE)$ の近くで滑らかな関数 $r = f(L) \leq 0$ のグラフとして表現できる．したがって，$R = rF$ は $(0, aE)$ で L 軸に接している．

同様にして，補題 4.7.3 より，$R = 0$ は直線 $r = r_-$ に接していることが分かる．範囲 $0 \leq r \leq r_-$ においては，中央線は，危点 $(0, aE)$ と垂直な接点 (r_-, L_-) を通る．したがって，$\mathcal{U}$ が L 軸から直線 $r = r_-$ まで延びていることを示すには，補題 4.7.1 の判別式 D が $0 < r < r_-$ で正であることをいえばよい．さて，$D(r) = r\Delta(r)\phi(r)$ で，$Q = 0$ より $\phi(r)$ は $r^2(er + 2\mathrm{M})$ となる．したがって，$e < 0$ でも，$0 \leq r < 2\mathrm{M}$ で $\phi(r) > 0$ となる．よって，$0 < r < r_-$ において，集合 $R = 0$ は L_- と L_+ のグラフの和集合である．しかるに，前に述べたように，終点 0 と r_- の近くでは，$R = 0$ は，垂直な直線 $r = 0$ と $r = r_-$ に接する滑らかな曲線である．これから，$\mathcal{U}$ の境界は，滑らかな単純閉曲線であることが分かる．とくに，$0 < r < r_-$ の $R < 0$ では，L は有界である．□

いま $Q = 0$ とすると，この補題で述べた領域 $\mathcal{U}$ は，図 4.10 の卵形である．注意 4.7.4 より，Q が少し増加すると，$\mathcal{U}$ は少し広がって，図 4.10 のような〈瘤〉となることが分かる．

また，L 軸においては $R = -a^2Q < 0$ であるから，瘤は，L 軸に沿う細い禁止領域と滑らかにつながっている．そしてこの形のために，ブラックホールの咽喉 $r = 0$ の近くで小さい有界軌道が生じるのである．

そして Q が増加を続けると，先ず $L < aE$ の有界軌道がなくなり，次に $L > aE$ の有界軌道がなくなる．それで，禁止領域は図 4.9 のようになる．範囲 $E > 0$ では，最初になくなるのは下側の軌道である．なぜなら，$aE < L_- = 2\mathrm{M}r_+E/a$ で，これは，最初の $\mathcal{U}$ の卵形の上側の曲線だからである．例えば，前に述べたように，数値計算を行うと，$e = .4$ として (図 4.9 の値である), 図 4.10 のような 4 つの球軌道が表れるためには，$Q > 0$ は 0.005 より小さくなければならない．

範囲 $0 < r < r_-$ で $\mu(r) = 2$ であることから，このような瘤は 1 個しかなく，L 軸の近くの〈海岸線〉は，$|L| \to \infty$ でこの軸に漸近することが分かる．

防壁形

上に述べたように，Q の値が小さい値から増えていくと，(禁止領域のように) 大陸 $\mathcal{N}$ と $\mathcal{S}$ は大きくなり，$\mathcal{N}$ の最南端の点 (r_n, L_n) と $\mathcal{S}$ の最北端の点 (r_s, L_s) も移動していく．そして Q が $Q_+(e) \sim 16 + 27e$ となると，2 つの点は一致する (関数 $R(r, L)$ の危点である．命題 4.7.8 の (1) を見よ)．さらに増えると，図 4.11 のように，大陸は 1 つの**防壁** (barrier) となってしまう．これで，ブラックホールの中にあるブロック II の帯 $r_- \leq r \leq r_+$ を外部と分けてしまうのである．

Q の値が大きくなると防壁が生じることについては，直接的に，注意 4.7.4 の式 $R(r) = -\Delta(r)Q_+R_0(r)$ からも分かる．実際，$r_0 > 2\mathrm{M}$ ならば，$Q > R_0(r_0)/\Delta(r_0)$ のとき，直線 $r = r_0$ 全体で $R < 0$ となっている．

この場合，禁止領域の構造は簡単である．

命題 4.8.6　脱出エネルギー $E > 1$ とカーター定数 $Q > Q_+$ を持つ時間的測地線の $r - L$ 図において，集合 $R = 0$ は，4 つの滑らかな関数 $r_i = f_i(L)$ のグラフで構成される．ここに，

$$f_0 \leq c_0 < 0 < f_1 \leq r_- < r_+ \leq f_2 < f_3$$

である．したがって，禁止領域は 2 つ存在する．f_0 と f_1 の間，それに f_2 と f_3 の間である (後者が防壁)．

軌道で，$r < 0$ あるいは $r \gg 1$ にあるものはフライバイである．後者のタイプでは地平面に届かない．他の軌道は，全て有界であり，r_+ と r_- と交わり，$r > 0$ の範囲にある．球軌道は存在しない．

証明　4.7 節から，$Q > Q_+(e)$ なので，ϕ は 3 つの異なる (単純) 解を持つことが分かる．解のうち 2 つは正である．いま，$2\mathrm{M} < r_1 < r_2$ とする．これは，補題 4.7.7 より，垂直な接線の点であり，$2\mathrm{M} < r < r_1$ では $\phi > 0$ なので，r_1 と r_2 の間では $\phi < 0$ でなければならない．したがって $r_1 < r < r_2$ で $\mu = 0$ で，よってそこでは $R < 0$ となる．

任意の水平線 $L =$ (定数) について考える．この直線と $R = 0$ との交点が 4 つあることが分かる．1 つは $r < 0$ の範囲で，1 つは $0 \leq r \leq r_-$ の範囲にある (前と同じ)．しかるに，今の場合は防壁があるので，$r_+ \leq r \leq r_1$ の範囲に 1 つ，$r \geq r_2$ の範囲に 1 つ存在する．つまり，任意の L に対して，4 次の多項式 $R(r, L_0)$ は相異なる 4 個の実数解を持つのである．したがって，これらの解は，順番に並べて，$R(r)$

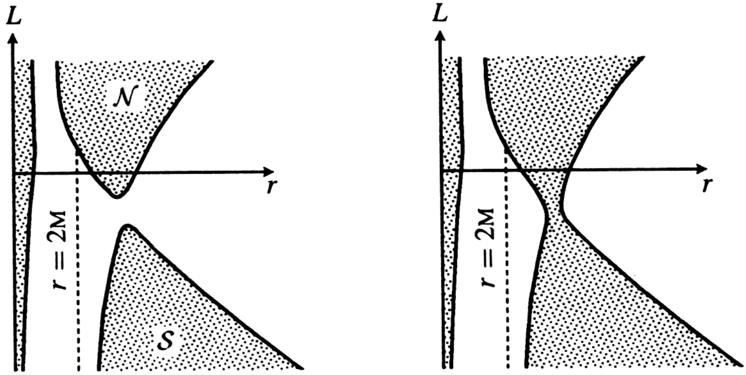


図 4.11　Q が増えていくと，図 4.9 の大陸 $\mathcal{N}$ と $\mathcal{S}$ は，接近し，ついには 1 つに連結して，$r=+\infty$ と地平面の間の防壁となる．(パラメータの値は，左図は $Q=27.5$，右図は $Q=28$ で，それ以外の値は図 4.9 と同じである.) 危点が生じるのは $Q=Q_+(0.4)\approx 27.74$ のときであり，この点はほぼ (3.42, -1.52) の所にある．

の係数に (今の場合は L に) 滑らかに依存することになる．そして，この 4 つの関数 $f_0<f_1<f_2<f_3$ は，求める性質を有している．(命題 4.8.2 より，$c_0\leq -2\mathrm{M}/e$ であることが分かる.)

軌道についての主張はすぐに分かる．特に，集合 $R=0$ においては $\partial R/\partial r=0$ であることから，滑らかな関数 f_i のうちの 1 つは無限回微分でき，球軌道は存在しない．□

いまの場合では，全ての L に対して，$R(r)$ の零点がすでに 4 個あるから，瘤は存在しない．ちょうど $Q=Q_+(e)$ のとき，軌道の構造は防壁の場合と同様になる．もちろん，危点における不安定球軌道とそれに隣接する漸近的軌道は除く．これ以外に球軌道は存在しない．

図 4.9 の大陸形は，ニュートン力学における重力源への普通の自由落下と比較すれば，ある意味では，時間的カー測地線の〈常識的〉な形である．しかしながら，回転している場合には，一般相対性理論によれば，カーター定数 Q が大きければ (角運動量 L がどんなに小さくても) ブラックホールへ落下して破壊することはないことが保証されている．

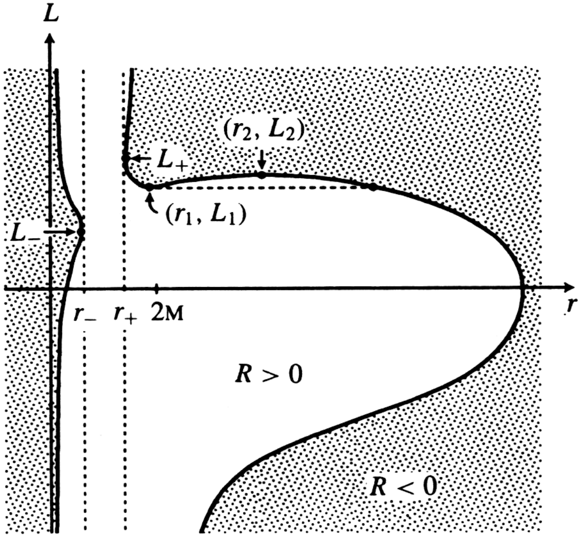


図 4.12 港湾形．時間的測地線で脱出エネルギーを持ち，$e < 0$ かつ $d(e, Q) < 0$ であるものの $r - L$ 図．全ての軌道は有界であるが，全てカー外部に含まれるものは $L_1 \leq L \leq L_2$ の範囲にあるものだけである．範囲 $r < r_-$ においては，図 4.9 の $e > 0$ の場合と似ている．(パラメータの値は，$\mathfrak{q} = -1, e = E^2 - 1 = -0.2, Q = 1$, M $= 1$, $a^2 = .84$ である.)

港湾形

脱出エネルギーより小さい場合の最も顕著な特徴は，全ての軌道が，有界であり，$r < 0$ では交わらないことである．図 4.12 は，この場合の $r - L$ 図である．許容領域は範囲 $0 < r \leq r_1$ にあり，ほとんどの有界軌道は地平面を通る．

図 4.9 と比較すれば，Q が同じ値の場合，$e > 0$ から $e < 0$ への (つまり $E > 1$ から $E < 1$ への) エネルギーの減少が，大きい許容領域を $r > 0$ の側に閉じこめており，$r < 0$ での許容領域は $r = -\infty$ へ押されてしまっている，ということを生じている．

しかしながら，ブラックホールの核では，前と同じように 2 つの禁止領域がブロック II の範囲 $r_- \leq r \leq r_+$ を垂直な接線で囲んでおり，大きな違いはない．

カー外部に有界軌道が欠落していることが顕著である．範囲 $e > 0$ には存在せず，図 4.12 から分かるように，運動量が正である狭い範囲において存在するだけである．

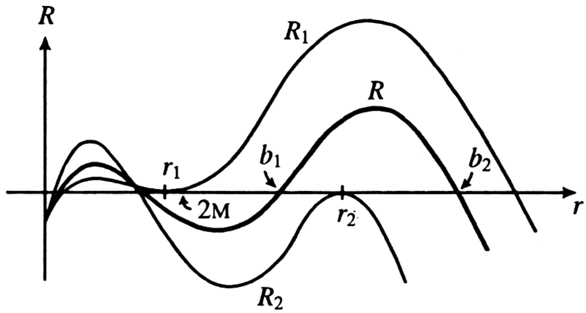


図 4.13　範囲 $L_2 < L < L_2$ の場合の $R(r)$ のグラフ．ここに，L_1 と L_2 は，図 4.12 と同様に，角運動量の臨界値である．各 L に対し，関数 $R(r)$ は 2 つの有界軌道を与えることが分かる (太線のもの)．$[b_1, b_2]$ の範囲がカー外部であり，他はブラックホールの核である．L_1 は，r_1 における不安定球軌道を与え，漸近的軌道が隣接している．L_2 の球軌道は安定である．

(この場合の多項式の状況を表したのが図 4.13 である.)

いま Q を固定すると，ゼロに近い $e < 0$ のとき，軌道は順行と同時に逆行もするが，e が -1 に近いときには，有界軌道はなくなってしまう．(図 4.14 を見よ.)

ある意味では，量的な結果は，$e > 0$ の場合よりも $e < 0$ の場合の方が難しい．なぜなら，$e > 0$ の場合には垂直な接線 $(\partial R/\partial L = 0)$ に大きく依存しているが，$e < 0$ の場合では，基本的な問題は有界軌道により決定され，それは (上に述べたように) 微妙な位置に存在するのである．

これまでの結果をまとめたのが次の系である．

系 4.8.7　時間的測地線で $e < 0$ なる (よって $Q > 0, d(e,Q) < 0$ である) ものの $r - L$ 図では，許容領域は 1 つしかなく，それは $0 < r < r_1$ の範囲に存在する．ここに，r_1 は判別式 $\phi(r)$ の唯一の解である．全ての軌道は有界である．球軌道となるのは次の場合である．もし Q が十分小さいならば，$0 < r < r_-$ における $(0, aE)$ の近くに有界軌道が存在する (球軌道も含む)．もし $e < 0$ が小さいならば，カー外部に有界軌道が存在する (球軌道も含む)．

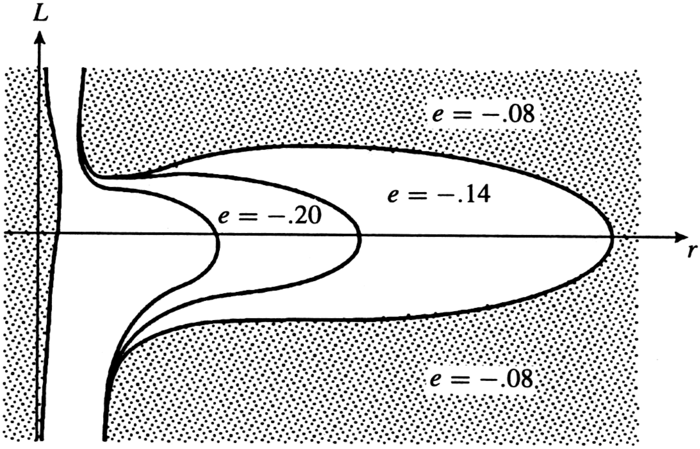


図 4.14 時間的 $r - L$ 図で，$Q < 12$ が定数のとき，e を $e < 0$ の範囲で変化させたときの図．灰色で表示されている場所は，$e = -.08$, $Q = 5$ の場合である．(図にはないが) $e = -.04$ とすると，その禁止領域は，脱出エネルギーが限界である $e = 0$ の場合の禁止領域とほとんど区別がつかない．それで，順行の有界軌道とともに逆行のものも出てくる．e の値が小さくなるにしたがって，許容領域は小さくなり，$e = -.08$ では順行有界領域のみとなり，さらにはなくなってしまう．

湖形

図 4.8 から分かるように，$e < 0$ が小さくて Q がやや大きいとき，詳しく書けば $-1/9 < e < 0$ で $Q_+(e) \leq Q \leq Q_-(e)$ のとき，形が港湾形から極端に変化する．これを調べるため，図 4.15 の状態，つまり $e = -.08$ かつ $Q = 5$ の場合から検討する．これは $-1/9 < e < 0$, $Q < Q_+(e)$ である．(質的には図 4.12 の状態と同じである.) ここで Q が大きくなると，禁止領域も大きくなる．$e > 0$ の場合と同様に，突起の部分も引き延ばされていく．とくに $Q = Q_+(e)$ (この値は，命題 4.7.8 の (2) から分かるように $R(r, L)$ の鞍点である) となると接触し，それ以後は切れて，図 4.15 のような〈湖〉となる．

条件 $-1/9 < e < 0$, $Q_+(e) < Q < Q_-(e)$ を満たす $r - L$ 図はこの湖を持つ．実際，$d > 0$ であるから，ϕ は 2 つの単純解 $2\mathrm{M} < r_1 < r_2$, $\mu = 2$ を，r_1 と r_2 の間に持つ．この湖の境界は，2 つの曲線 $L_-(r)$ と $L_+(r)$ から構成されている単純閉曲線

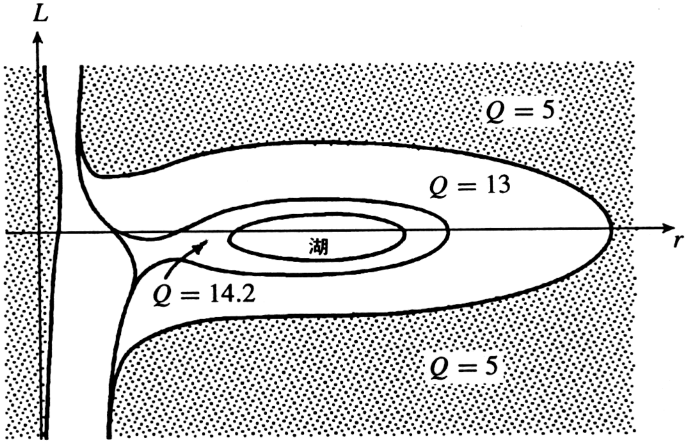


図 4.15　**時間的** $r-L$ **図で条件** $-1/9<e<0$ **を満たす場合，**Q **を変化させたときの図．図 4.14 の場合と同じように，**$e=-.08$, $Q=5$ **からスタートしている (禁止領域は灰色で示してある)．**Q **の値が増大して** $Q=13$ **を過ぎ，**$Q_+(.08)=13.28^+$ **で禁止領域の突起部分は閉じ，湖が作られる (図は** $Q=14.2$ **の場合を示してある)．さらに** Q **が増えると，湖は小さくなり，**$Q_-(.08)=15.06^-$ **で消滅する．**

である．この 2 つの曲線は，垂直な接線を持つ直線と r_1 と r_2 で交わる．中央線は湖の中心線になっている．

カー外部の有界軌道は，湖の水平線分であり，数多くあり，それらは安定有界である．

Q が増えていく場合を考える．$e>0$ の場合には質的な変化は 1 度だけであったが，今度の場合には 2 度ある．湖は，増大する禁止領域のために小さくなり，$Q=Q_-(e)$ で消滅する．しかしながら，命題 4.7.8 の (3) にあるように，$R(r,L)$ の孤立した最大点 (r_m,L_m) は残り，そこでは $R=0$ となっている．この点は，極限安定球軌道を表している．

このあと，$Q>Q_-(e)$ で，図 4.12 の港湾形が表れる．図 4.8 から分かるように，$12<Q<16$ で固定すると，つまり，Q を定数としてエネルギーを変化させると，同様な変化が生じることになる．

図 4.8 の原点 $(e,Q)=(0,0)$ に関する $r-L$ 図において，$r<0$ では禁止領域であり，範囲 $0<r<r_-$ における禁止領域は，補題 4.8.5 で述べた卵形である．さもなければ，点 (0,0) の図は図 4.9 の形となる．範囲 $r<0$ において禁止であることを除け

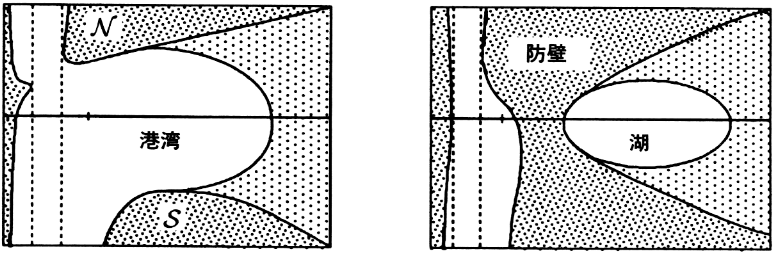


図 4.16 時間的カー測地線で $Q > 0$ を満たすものが形成する 4 つの基本的な形．濃い灰色の所は，脱出エネルギー $e > 0$ を持つ禁止領域である．$0^+ < Q < Q_+(e)$ のときには大陸形となり，$Q_+(e) < Q$ ならば防壁となる．(また，Q が小さいときには，$(0, aE)$ の近くで瘤が生じる．) $e < 0$ の場合に薄い灰色の所が加わり，$-1/9 < e < 0$ かつ $Q_+(e) < Q < Q_-(e)$ の場合には湖となり，それ以外の場合は港湾となる．

ば，周辺脱出エネルギー $e = 0$ の図は $e > 0$ の場合と同様である．Q が増大するにつれて，北側と南側の 2 つの大陸は接近し，$Q = 16\mathrm{M}^2$ のときに危点 $(4\mathrm{M}, -\mathrm{M})$ で 1 つになって防壁を形成するのである．

この節で述べた形は図 4.16 のようにまとめることができる．

カー測地線関係の論文については Sharp (1979) を見よ．カー外部の測地線に関しては Stewart and Walker (1973) が推薦できる．

4.9 時間的渦測地線

渦測地線 (つまり $Q < 0$ であるもの) では $r > 0$ と $r < 0$ の間の防壁がなくなる．そして，全ての渦測地線は，$r = +\infty$ から咽喉 $r = 0$ を通って落下していく．さらにあるものは (全てではない) $r = -\infty$ へ行き，トランジット軌道を形づくることになる．(前に述べたように，非赤道主要零的測地線に十分近い測地線はトランジット・タイプの軌道を共有する.)

系 4.9.1 時間的 ($\mathsf{q} = -1$) 測地線 γ で $Q < 0$ を満たすものでは，

$$e = E^2 - 1 > 0, \mathfrak{X} > -Q > 0, |L| + |Q|^{1/2} < a\sqrt{e}$$

が成立する．とくに，$R(r)$ は $r \geq 0$ で解を持たない．

証明　4.5 節において，$Q < 0$ のとき回転エネルギーが高く $a^2 e = a^2(E^2 - 1) > L^2$ となることをみた．したがって，$e > 0, \mathfrak{X} = a^2 e - L^2 - Q > -Q > 0$ である．また，Q はカーター不等式

$$Q \geq Q_{\min} = -[(a\sqrt{e}) - |L|]^2$$

を満たす．これは，$a^2 e > L^2$ ゆえ，

$$|Q|^{1/2} \leq |(a\sqrt{e}) - |L|| = a\sqrt{e} - |L|$$

となる．

したがって，多項式

$$R(r) = er^4 + 2\mathrm{M}r^3 + \mathfrak{X}r^2 + 2\mathrm{M}\mathcal{K}r - a^2 Q$$

の係数は全て正となり，負の解しか存在しない．□

とくに，$Q < 0$ を満たす質点が $r > 0$ の所からブラックホールへ落下する場合には，地平面と咽喉を通り，$r < 0$ へ向かっていく．よって渦の $r - L$ 図に関しては，$r < 0$ の範囲で調べればよい．さらに，実際に測地線を表す水平線は，**カーター水平範囲** (Carter horizontal band) $|L| < L_{\max}$, $L_{\max} = a\sqrt{e} - |Q|^{1/2}$ の部分に存在する．(注意 4.6.2 を見よ.) 例えば図 4.17 の場合では，$R = 0$ に沿って考えれば，r の範囲を大陸 $\mathcal{N}'$ と小さい島の間としたときに有界軌道があることが分かる．しかし，帯に制限すれば，存在しないのである．

デカルトの符号規則によれば，$R(r)$ の負の解に制限はない．当然ながら 4 個まで許されるわけだが，最大個数の 4 個になることはない．

命題 4.9.2　時間的渦測地線においては，多項式 $R(r)$ の解の個数は最大 2 個である．

この命題の証明をする前に，これから導かれる軌道について述べておく．

系 4.9.3　時間的渦測地線の軌道のタイプは次のようになる．

(1) トランジット軌道.

(2) $r < 0$ におけるフライバイ軌道.

(3) $r = +\infty$ からのフライバイ軌道で $r < 0$ で転回する．

(4) $r_0 < 0$ における不安定球軌道で，漸近的軌道に隣接している．

証明 多項式 $R(r)$ は $r \geq 0$ の範囲に解を持たないから，命題より，$R(r) = 0$ は，(1) 実数解を持たない，(2), (3) $r_0 < 0$ で 1 つの重解を持つ，(4)2 つの負の実数解を持つ，のどれかとなる．□

図 4.17 から分かるように，これらの場合は全て実際に生じる．しかし安定有界軌道はないので，(4) の場合を除いて，τ が $+\infty$ または $-\infty$ であるとき $|r| \to \infty$ となる．また，カー外部のみでフライバイ軌道は存在しない．(2) の場合を除いて，ここに述べた軌道は $Q > 0$ では存在しない．

命題 4.9.2 を示すには，$R(r)$ **がただ** 1 **つ危点を持つことを示せば十分である**．そのためには，

$$R(0) = -a^2 Q > 0, \quad (dR/dr)(0) = 2\mathrm{M}\mathcal{K} > 0, \quad \lim_{r \to -\infty} R(r) = +\infty$$

なる関係を使う．これらから，r が 0 から減少すると，$R(r)$ は，唯一の危点まで減少し，その後は $+\infty$ へ増加する．したがって，負の解の個数は，R の危点における符号により，それぞれ，0 個，1 個，2 個，となる．

補題 4.9.4 渦カー測地線に関して，多項式

$$F(r) = \frac{1}{2} dR/dr = 2er^3 + 3\mathrm{M}r^2 + \mathfrak{X}r + \mathrm{M}\mathcal{K}$$

は，$2e\mathcal{K} \geq \mathfrak{X}$ ならば，解を 1 つしか持たない．

証明 先ず，

$$F' = dF/dr = 6er^2 + 6\mathrm{M}r + \mathfrak{X}$$

で，判別式は $12(3\mathrm{M}^2 - 2e\mathfrak{X})$ となる．

場合 1. もし $2e\mathfrak{X} > 3\mathrm{M}^2$ ならば，F' は実数解を持たない．また，$F'(0) = \mathfrak{X} > 0$ であるから $F' > 0$ である．よって単調増加で，F の解は (負で) 1 つである．

場合 2. もし $2e\mathfrak{X} = 3\mathrm{M}^2$ ならば，F' は実数解を 1 つ持ち，F は単調増加である．

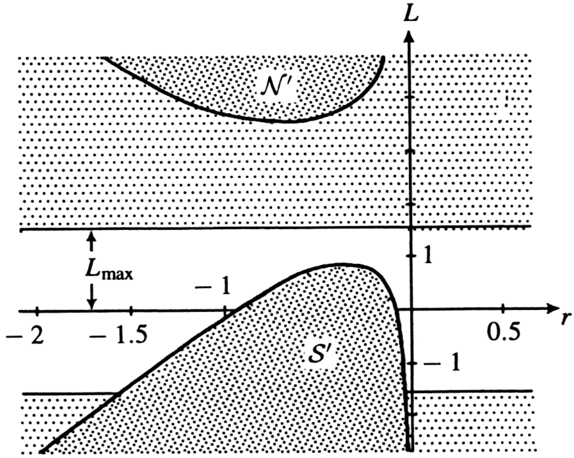


図 4.17　この渦 $r-L$ 図において，禁止領域 $R<0$ は濃い灰色の部分で示してある．カーター不等式で除外されるのが，水平線の範囲 $|L|<L_{\max}$ の外側の薄い灰色で示した所である．この範囲では，$r>0$ において禁止領域を持たない．(パラメータの値は $\mathrm{M}=1, a^2=.84$, $E=3$, $Q=-1$ で，それゆえ $L_{\max}\approx 1.59$ である.)

場合 3. もし $2e\mathfrak{X}<3\mathrm{M}^2$ ならば，F' は実数解を 2 つ持ち，それらは F の危点である．具体的には

$$\rho_{\pm}=-\mathrm{M}/(2e)\pm(3\mathrm{M}^2-2e\mathfrak{X})^{1/2}/(\sqrt{12}e)$$

であり，$-\mathrm{M}/e<\rho_-<-\mathrm{M}/2e<\rho_+<0$ である．さて，$F(0)=\mathcal{K}>0, F'(0)=\mathfrak{X}>0$ であるから，r が 0 から減少するにつれ，F は，ρ_+ における極小値へと減少し，次に ρ_- における極大値へと増加し，その後，($e>0$ ゆえ) $r\to-\infty$ につれて $-\infty$ となる．よって，$F(\rho_+)>0$ から，F は $r<0$ で唯一の解を持つことが分かる ($r\geq 0$ では $F>0$ なので，これが唯一の解である).

ρ_+ は区間 $-\mathrm{M}/(2e)<r<0$ 内にあるから，$F(\rho_+)>0$ を証明するには，$-\mathrm{M}/(2e)<r<0$ で $F(r)>0$ となることを示せばよい．いま，$F_1(r)=r^2(2er+3\mathrm{M}), F_2(r)=\mathfrak{X}r+\mathrm{M}\mathcal{K}$ として $F=F_1+F_2$ と書く．明らかに，広い区間 $-3\mathrm{M}/(2e)<r<0$ において $F_1(r)>0$ である．同様に，0 から $r=-\mathrm{M}\mathcal{K}/\mathfrak{X}$ まで $F_2(r)>0$ である．しかるに，$2e\mathcal{K}\geq\mathfrak{X}$ と仮定したので $-\mathrm{M}\mathcal{K}/\mathfrak{X}\leq-\mathrm{M}/(2e)$ である．□

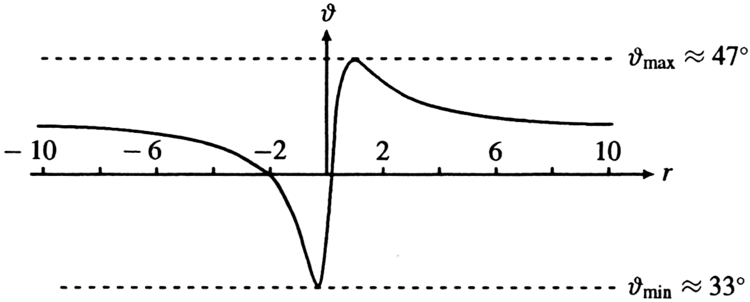


図 4.18 時間的トランジット軌道に対する $(r(\tau), \vartheta(\tau))$ の図．(パラメータの値は図 4.17 のように，M $= 1$, $a^2 = .84$, $E = 3$, $L = 1.5$, $Q = -1$ で，$L = 1.5 < L_{\max} \approx 1.59$ である．) 北緯でいえば，ϑ の変化の幅は 14 度ほどである．図 4.17 から分かるように，L の値が 0.9 程度になると，軌道はフライバイ軌道になる．

命題 4.9.2 の証明 つねに $2e\mathcal{K} \geq \mathfrak{X}$ が成立することを示せばよい．前述の補題により，F の解は 1 個である．つまり，$R(r)$ は危点を 1 個だけもつ．

系 4.9.1 から，$0 < c < 1$ として $|Q|^{1/2} = ca\sqrt{e}$ とおく．このとき，$|L|$ の最大値は $(1-c)a\sqrt{e}$ であるから，$L = \lambda(1-c)a\sqrt{e}$ である．ここに $|\lambda| < 1$ である．そして，

$$\mathfrak{X} = a^2e - Q - l^2L^2 = a^2e(1 + c^2 - \lambda^2(1-c)^2),$$
$$\begin{aligned}\mathcal{K} &= Q + (L - aE)^2 = -c^2a^2e + (\lambda(1-c)a\sqrt{e} - aE)^2 \\ &= -c^2a^2e + \lambda^2(1-c)^2a^2e + a^2(e+1) - 2\lambda a^2(1-c)\sqrt{e}E\end{aligned}$$

となる．もし $\lambda \geq 0$ ならば，不等式 $\sqrt{e}E = (e^2+e)^{1/2} < e + \frac{1}{2}$ から

$$\begin{aligned}(2e\mathcal{K} - \mathfrak{X})/a^2 &> 2(1-c^2)e^2 + e(1-c^2) + 2\lambda^2(1-c)^2e^2 \\ &\quad + \lambda^2(1-c^2)e - 4\lambda(1-c)e^2 - 2\lambda(1-c)e \\ &= e^2[2(1-c^2) + 2\lambda^2(1-c)^2 - 4\lambda(1-c)] \\ &\quad + e[1 - c^2 + \lambda^2(1-c^2) - 2\lambda(1-c)] \\ &= (1-c)(1+2e)e[(1-\lambda)^2 + c(1-\lambda^2)]\end{aligned}$$

となる．この式の右辺は正であるから，$2e\mathcal{K} - \mathfrak{X} > 0$ である．もし $\lambda < 0$ ならば，不等式 $\sqrt{e}E > e$ から，同様な結果を得る．□

渦測地線のみがトランジット軌道を持つことができるのであるから，基本的な問題

は，どの渦測地線がトランジット軌道になるか，である．そのための準備として，$r<0$ に制限すれば (系 4.9.1 から分かるように) 時間的な渦 $r-L$ 図では 2 種類の形しかないことを示すことにする．先ず，Q がゼロから減少し，禁止領域が減少する場合を考える．$Q<0$ が小さいときには，$r<0$ の禁止領域 (図 4.9 参照) は，図 4.10 のように，L 軸から離れている．そして，$r<0$ で防壁を作っている ($r>0$ の小さい島も防壁を成している). これは、$Q>0$ の場合ならば $r>0$ の部分に相当する．Q が減少していくと，防壁は薄くなり，図 4.17 のように，2 つの大陸 $\mathcal{N}'$ と $\mathcal{S}'$ に分かれる．(図 4.9 の $r>0$ の場合と比較せよ.)　4.7 節の結果でいえば，渦 $r-L$ 図は，カーター不等式の条件より，図 4.8 の (e,Q) 座標における第 4 象限の $-a^2e<Q<0$ の範囲となる．$d(e,Q)>0$ のときには $r<0$ で垂直な接線が 2 つあり，防壁形である．$d(e,Q)<0$ のときには，$r<0$ で垂直な接線はなく，大陸形である．

防壁はトランジット軌道を遮るから，図 4.8 から分かるように，有効エネルギーが非常に小さい渦測地線はトランジット軌道を持たない．実際，直線 $Q=-a^2e$ と曲線 $Q_-(e)$ が交わる e の値を $e_\#$ とすると，この $e_\#$ は，許される Q の値の中で $r-L$ 図が防壁形を持つ e の最大値である．したがって，時間的トランジット測地線の有効エネルギーの下限が $e_\#$ である．注意 4.7.6 で述べた Q_- に関する式を用いて，$e_\#$ は，カー・パラメータ M,a を変数とする多項式の解として表すことができる．例えば，$\mathrm{M}=1,a^2=.84$ ならば，$e_\#\approx.72$ となる．しかるに，命題 4.9.5 からは約 1.09 となり，防壁が大陸に変化しても，そのうちの 1 つがカーター水平範囲 $|L|<L_{\max}$ を制限していることが分かる．

この状況は複雑なものである．実際，$Q<0$ が減少すれば，禁止領域は減少する (トランジットが容易になる) が，範囲の幅 $L_{\max}=a\sqrt{e}-|Q|^{1/2}$ も減るのである (トランジットが難しくなる).

命題 4.9.5　パラメータ M,a を持つカー・ブラックホールにおいて，有効エネルギー e を持つ時間的トランジット測地線が存在するための必要十分条件は $e>\mathrm{M}/a$ である．

証明　4 つのステップに分けて証明する．

ステップ 1. 任意の $e>\mathrm{M}/a$ に対して脱出エネルギー e を持つトランジット測地線が存在する．

ステップ 1 の証明 任意の $e>0$ に対して，Q の最小値を考える．つまり $Q=-a^2e$ である．このとき，$L=0$ でカーター不等式が成立するので，このような測地線は実際に存在する．(式 $0\leq\Theta=-a^2e+C^2a^2e$ から $C=1$ となるので，この測地線は軸上にある．これについては，4.11 節で再説する.) 関数 $R(r)$ の第 1 積分を考える．い

ま，$\mathcal{K} = Q + (L - aE)^2$ は $-a^2e + a^2E^2 = a^2$ となるから

$$R(r) = er^4 + 2\mathrm{M}r^3 + 2a^2er^2 + 2\mathrm{M}a^2r + a^4e$$
$$= (r^2 + a^2)(er^2 + 2\mathrm{M}r + ea^2)$$

である．よって，この測地線はトランジット軌道である．つまり $R(r) > 0$ となる必要十分条件は，全ての r に対して $er^2 + 2\mathrm{M}r + ea^2 > 0$ となることである．ここで $ea^2 > 0$ であるから，これは，判別式が負 $4\mathrm{M}^2 - 4e^2a^2 < 0$ であること，つまり $e > \mathrm{M}/a$ と同値である．

したがって，$e > \mathrm{M}/a$ に対して，測地線はトランジット軌道を持つ．□

ステップ 2. 任意の $e > 0$ に対し，γ が，第 1 積分 e, Q_0, L_0 を持つトランジット軌道ならば，同じ e を持ち，$Q_1 \leq Q_0, L_1 = a\sqrt{e} - |Q_1|^{1/2}$ (カーター範囲の上限) であるようなトランジット測地線がもう 1 つ存在する．

ステップ 2 の証明 上述したように，もし $Q_0 = -a^2e$ ならば $L = 0$ であり，証明は終わりとなる．また，$e \geq \mathrm{M}/a$ ならばつねに $Q_1 = -a^2e$ となるから，$e < \mathrm{M}/a$, $Q_0 > -a^2e$ と仮定してよい．いま，Q が，$-a^2e$ から Q_0 へ増大するとする．値 $Q = -a^2e$ (ここでは $L = 0$ である) に対する $r - L$ 図において，r 軸は大陸と交わる．なぜなら，ステップ 1 より，$L = 0$ なる測地線はトランジット・タイプを持たないのである．実際，中央線は r 軸の上なので，南側の大陸 $\mathcal{S}'$ と交わっている．値 Q が増加すると，交わっている大陸の大きさは減少し，カーター範囲の幅も減少する．仮定より，Q が Q_0 になると，ある直線 $L =$ (定数) が大陸から外れることになる．したがって，こうなる以前に，カーター範囲の端が大陸 $\mathcal{S}'$ に接するようになる Q の最小値が存在する．そして，この後の値 Q_1 では，カーター範囲の端 $L_1 = a\sqrt{e} - |Q|^{1/2}$ をさえぎるものはなく，トランジット軌道となるのである．

いま $L = L_{\max}$ としたときに第 1 積分 $\mathfrak{X}, \mathcal{K}$ は

$$\mathfrak{X} = a^2e - Q - (a\sqrt{e} - |Q|^{1/2})^2 = a^2e - Q - a^2e$$
$$- |Q| + 2a\sqrt{e}|Q|^{1/2} = 2a\sqrt{e}|Q|^{1/2},$$
$$\mathcal{K} = Q + (a\sqrt{e} - |Q|^{1/2} - aE)^2 = Q + a^2(E - \sqrt{e})^2$$
$$+ |Q| + 2a(E - \sqrt{e})|Q|^{1/2},$$
$$= a^2(E - \sqrt{e})^2 + 2a(E - \sqrt{e})|Q|^{1/2}$$

であり，これはあとで必要となる．□

ステップ 3 (重要なステップ). 測地線で $e = \mathrm{M}/a$ を満たすものはトランジット軌道を持たない.

ステップ 3 の証明 ステップ 1 の測地線で $e = \mathrm{M}/a$ とすると，式 $R(r)$ は

$$R(r) = (\mathrm{M}/a)(r^2 + a^2)(r + a)^2$$

となる．よって，この式の最小値 0 は $r = -a$ で与えられる．そこで，$e = \mathrm{M}/a$, $Q > -a^2 e = -\mathrm{M}a$ を満たす測地線は $R(-a) < 0$ を満たし，よってトランジット・タイプではないことを示す．ステップ 2 より，この測地線は $L = a\sqrt{e} - |Q|^{1/2}$ を満たすと仮定してよい．式 $R(r)$ の最初の 2 つの項は $(\mathrm{M}/a)a^4 - 2\mathrm{M}a^3 = -\mathrm{M}a^3$ なので，

$$R(-a) = -\mathrm{M}a^3 + \mathfrak{X}a^2 - 2\mathrm{M}\mathcal{K}a - a^2 Q$$

となる．ここに，$\mathfrak{X}, \mathcal{K}$ はステップ 2 で述べたものである．また，$|Q| = -Q < a^2 e = \mathrm{M}a$ であるから，この式の右端と左端の 2 項の和は $-\mathrm{M}a^3 - a^2 Q < -\mathrm{M}a^3 + \mathrm{M}a = 0$ となる．したがって，$R(-a)$ の他の 2 項の和が負になること，つまり $a\mathfrak{X} - 2\mathrm{M}\mathcal{K} < 0$ を示せばよい．ステップ 2 で得られた値を代入して，

$$\begin{aligned} a\mathfrak{X} - 2\mathrm{M}\mathcal{K} &= 2a^2\sqrt{e}|Q|^{1/2} - 2\mathrm{M}[a^2(E - \sqrt{e})^2 + 2a(E - \sqrt{e})|Q|^{1/2}] \\ &= -2\mathrm{M}[a^2(E - \sqrt{e})^2] + 2a|Q|^{1/2}[a\sqrt{e} - 2\mathrm{M}(E - \sqrt{e})] \end{aligned}$$

となる．ここに，$|Q| = -Q$ は最大値 $\mathrm{M}a$ を持つので，ステップ 1 から $R(-a) = 0$ となる．また，右端と左端の 2 項の和 $-\mathrm{M}a^3 - a^2 Q$ はゼロである．よって $a\mathfrak{X} - 2\mathrm{M}\mathcal{K} = 0$ となる．(これは，直接の計算で確認できる.) 式 $a\mathfrak{X} - 2\mathrm{M}\mathcal{K}$ は $|Q|^{1/2}$ で線形であり，定数項は負であるから，$e = \mathrm{M}/a$ のとき $a\sqrt{e} - 2\mathrm{M}(E - \sqrt{e})$ が**正**になることを示せばよい．ここに

$$E = (e + 1)^{1/2} = (\mathrm{M} + a)^{1/2}/a^{1/2}$$

であるから

$$a\sqrt{e} - 2\mathrm{M}(E - \sqrt{e}) = (\mathrm{M}a)^{1/2} - 2\mathrm{M}[(\mathrm{M} + a)^{1/2} - \mathrm{M}^{1/2}]/a^{1/2}$$

となる．これに $(\mathrm{M}a)^{1/2}$ を掛けて

$$f(a) = \mathrm{M}a - 2\mathrm{M}\sqrt{\mathrm{M}}(\mathrm{M} + a)^{1/2} + 2\mathrm{M}^2$$

となる．あとは，$0 < a < \mathrm{M}$ で $f(a) > 0$ であることを示せばよい．いま，$f(0) = 0$, $df/da = \mathrm{M} - \mathrm{M}\sqrt{\mathrm{M}}/(\mathrm{M} + a)^{1/2}$ である．しかるに，全ての $a > 0$ に対して

$M(M+a)^{1/2} - M\sqrt{M} > 0$ なので $f(a) > 0$ である．したがって，$a\sqrt{e} - 2M(E-\sqrt{e})$ は正であることが示された．□

ステップ 4. 測地線で $e < M/a$ を満たすものはトランジット軌道を持たない．

ステップ 4 の証明 この証明はステップ 3 を改良すればよい．ステップ 1 より，測地線で $Q = Q_{\min} = -a^2e$ を満たすものは，$L = 0$ であるから，$R(r) = (r^2 + a^2)(er^2 + 2Mr + ea^2)$ を持つ．これは $r = -M/e$ で最小値を持ち，$e < M/a$ なので $R(-M/e) < 0$ である．

測地線で $e < M/a$ かつ $Q > -a^2e$ を満たすものは $R(-M/e) < 0$ も満たすことを示す．ステップ 2 より $L = a\sqrt{e} - |Q|^{1/2}$ と仮定してよい．式 $R(-M/e)$ の最初の 2 つの項は

$$e(-M/e)^4 + 2M(-M/e)^3 = -M^4a^3$$

であるから，

$$R(-a) = -M^4/e^3 + M^2\mathfrak{X}/e^2 - 2M^2\mathcal{K}/e - a^2Q$$

となる．ここに，$e < M/a$ なので

$$-M^4/e^3 - a^2Q < -M^4/e^3 + a^4e = (-M^4 + a^4e^4)/e^3 < 0$$

である．よって，$\mathfrak{X} - 2e\mathcal{K} < 0$ であることが分かれば $R(-1/e) < 0$ となる．ステップ 1 の $\mathfrak{X}$ と $\mathcal{K}$ の式より，

$$\mathfrak{X} - 2e\mathcal{K} = -2ea^2(E-\sqrt{e})^2 + 2a|Q|^{1/2}[\sqrt{e} - 2e(E-\sqrt{e})]$$

を得る．よって，全ての $e > 0$ に対して $\sqrt{e} - 2e(E-\sqrt{e}) > 0$ ならば結果が出る．とくに $e = 1$ ならば，この式は $3 - 2\sqrt{2} > 0$ となる．いま $\sqrt{e} - 2e(E-\sqrt{e}) = 0$ とすると

$$\sqrt{e}(1+2e) = 2eE = 2e(1+e)^{1/2}$$

$$\Downarrow$$

$$e(1 + 4e + 4e^2) = 4e^2(1+e)$$

$$\Downarrow$$

$$e = 0$$

となる．以上で命題 4.9.5 は示された．□

図 4.17 から分かるように，$E > 0$ では，トランジット軌道に到達するのは，逆行よりも順行の方が容易である．

注意 4.9.6　測地線 γ で $E > 0$, $L < 0$ を満たすものがトランジット軌道を持つならば，角運動量 L_1 が $|L_1| \leq |L|$ である以外は同じ第 1 積分を持つ測地線 γ も同じようにトランジット軌道を持っている．実際，このような γ_1 が存在してトランジット軌道を持つためには，カーター不等式が $|L_1| < a\sqrt{e} - |Q|^{1/2}$ で，任意の r に対して $R_1(r) > 0$ でなければならない．γ が存在することから $|L| < a\sqrt{e} - |Q|^{1/2}$ なので，L_1 の条件は明らかである．‖

γ に対する式 $R(r)$ と，γ_1 に対する式 $R_1(r)$ との差異は $\mathfrak{X}r^2 + 2\mathrm{M}\mathcal{K}r$ の項である．しかるに，$|L_1| \leq -L$, $E > 0$, より $\mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X} \geq 0$, 及び

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_1 - \mathcal{K} &= L_1^2 - 2aEL_1 - L^2 + 2aEL \\ &= L_1^2 - L^2 + 2aE(L - L_1) \leq 0\end{aligned}$$

が出る．よって，$r < 0$ で $R_1(r) \geq R(r) > 0$ である．したがって，上で述べたように，全ての r に対して $R_1(r) > 0$ となる．図 4.17 から分かるように，$L > 0$ ではこれは成立しない．

それにもかかわらず，逆行軌道をもつトランジット軌道は存在する．なぜなら，トランジット軌道である条件は開集合であり，前に見たように，$e > \mathrm{M}/a$ かつ $L = 0$ はトランジット・タイプである．よって，Q の値を $-a^2e$ の近くにとれば，逆行するトランジット軌道を得る．

4.10　大域的な時間的軌道

ブラックホールの外部で軌道を研究している観測者にとっては，地平面の中へ入った粒子の運命については無視してさしつかえない．それを見ることは 2 度とないのである．しかしながら，遅速カー・ブラックホールの完備な軌道自身にしてみれば，地平面を通ったことは，旅のはじまりにすぎない．この節では，定義 4.6.3 で述べた通常の軌道タイプについて，大域的な状況を調べることにする．不安定球軌道とそれに付随する漸近的軌道は省くが，他の例外的な場合 (リング状特異領域へ近づく場合) については 4.15 節で述べる．ここでは，時間的測地線で軸や地平面に含まれない場合を調べる．軸に含まれる場合は 4.11 で，地平面に含まれる場合は 4.12 節で述べる．(大域

的な零的測地線軌道については，Helliwell and Mollinckrodt 1975 を見よ.)

前に得た地平面に関する 3 **つの規定**が基本となる.

1. 時間的測地線 γ は任意の地平面を，最大 1 回だけ通ることができる．よって，(いま，考える地平面を $r=r_+$ としたとき) もし座標関数 $r(s)$ が $r=r_+$ に 2 度目に近づくときには (前に見たように，この現象は希ではない), γ は別な地平面を通ることになる.

2. 測地線 γ が $r=r_\pm$ を通るときには，命題 4.4.6 の関数 $\oplus$ の値により，$\boldsymbol{S}(r_\pm)$ を通るのか，それとも，K^* あるいは $^*K$ 細片の短い地平面を通るのか，が分かる.

3. 短い地平面 H の外側より来た測地線 γ は，H と交わる所で r 転回点を持つことはない．もし持つなら，γ' は H と接することになる (これは，H が全測地的部分空間であるから，ありえない). しかしながら，γ が交叉球 $\boldsymbol{S}(r_\pm)$ と交わるときには，そこで r 転回点を持つ．もっとも第 3 章で見たように，測地線自体が転回するのではない．測地線は $\boldsymbol{S}(r_\pm)$ と横断的に交わっている．関数 $r(s)$ のみが〈転回〉するのである.

時間的測地線で $Q=0$ を満たすものは，咽喉 $r=0$ を横断することができない．(実際，$R(0)=0$, $(dR/dr)(0)=2\mathrm{M}\mathcal{K}>0$ であるから，十分小さい $r<0$ については $R(r)<0$ となる.)

この節では，ボイヤー－リンキスト・ブロック I, II, III に，K^* 細片の普通の時間的向き付けから与えられた時間的向き付けが入っているとする．なお，$<V,V>=-\Delta\rho^2$ であるから，標準ベクトル場 V は，ブロック I と III では未来向きの時間的ベクトル場で，II では空間的，水平線では零的である．エルゴ球の外側とくに $r\geq 2\mathrm{M}$ では，∂_t についても同じことが成立する．よって，時間的向き付けが逆になる I' と III' では，上記の〈未来向き〉は〈過去向き〉となる.

注意 4.10.1　上記の状況において，時間的あるいは零的測地線 γ は次のような符号を持つ.

1. E の符号．もし (未来向き) γ がブロック I あるいは III で ∂_t が時間的である領域からスタートするなら，$E=-<\gamma',\partial_t>>0$ である．よって，γ は，ブロック I', III' の対応する領域 (そこでは $E<0$ である) に到達することはない.

2. $\mathbb{P}(r)$ の符号．もし (未来向き)γ が I あるいは III に存在するときは，$\mathbb{P}(r) = -<\gamma', V>> 0$ である．I' あるいは III' では $\mathbb{P}(r) < 0$ である．‖

例外として，下記に述べるように，地平面と交わる時間的測地線はカー外部，ブロック I に到達する．時間的測地線は，ブロック II 内あるいは地平面内に留まることはできない．ブロック III 内に留まる測地線は簡単に記述することができる．ほとんどがフライバイ軌道となる．このように，多くの種類の測地線が外部と交わるので，未来向きと過去向き，内向と外向，などを都合のよいように適当に選択しておく方がよい．この選択が大域的な軌道に影響を与えることはない．

定義 4.10.2　遅速カー時空 M_s における**標準的粒子** (standard particle) とは，時間的 (q = −1) 未来向き測地線 γで，K^* 細片のブロック I 内の 1 点 $\gamma(s_0)$ を始点として $r'(s_0) < 0$ を満たすものである．

補題 4.10.3　(上で定義した) 標準的粒子 γ は，$r' < 0$ で r_+ に近づく $r(s)$ を持つならば，K^* 細片で短い地平面 H_+ を横切る．したがって，ブロック I から K^* のブロック II へ入るのである．

証明　いま $r' < 0$ であるから，γ は $r = r_+$ を通ってブロック I を離れる．γ がブロック I にいるときには $\mathbb{P} = -<\gamma', V>> 0$ である．よって，$r(s)$ が r_+ に到達すると，命題 4.4.6 の交叉符号 $\oplus = -sgn(r'\mathbb{P})$ は $sgn\,\mathbb{P}(r_+) \geq 0$ となる．したがって，γ がブロック I を離れるのは，$sgn\,\mathbb{P}(r_+) = +1$ で K^* の短い地平面 H_+ を通る場合か，$sgn\,\mathbb{P}(r_+) = 0$ で交叉球 $\boldsymbol{S}(r_+)$ を通る場合のどちらかとなる．この後者は，次の理由から除外してよい．

γ が $\boldsymbol{S}(r_+)$ を通るとし，そのときのパラメータ値を s_1 とする．よって，γ は s_1 が r 転回点となっているので，それ以後は $r' > 0$ である．しかるに，$E > 0$ なので，関数 $\mathbb{P}(r) = (r^2 + a^2)E - La$ は s_1 で最小値をとり，その値は $\mathbb{P}(r_+) = 0$ である．よって，s_1 のあとでは $\mathbb{P}(r) > 0$ である．ところが，交叉点では，γ は，$\boldsymbol{S}(r_+)$ で交わるどちらの長い地平面 (これらは全測地的部分空間である) とも接していない．したがって，横断的に交わり，$^*K$ 細片のブロック I' へ入ることになる (図 4.19, 図 4.20 を見よ). 一方，前に見たように，ブロック I' では V は過去向きであり，s_1 のあとでは $\mathbb{P}(r) = -<\gamma', V>< 0$ となる．これは前記の不等式と矛盾する．□

時間的フライバイ軌道

ニュートン力学は一般相対性理論の近似であるから，ケプラーの双曲線や楕円に相当するものを時間的カー軌道のなかで探すことができる．宇宙空間でブラックホールへ初めて近づく者は，双曲線に似た軌道でブラックホールを眺める計画を立てるはずである．だが，これ以外の軌道も考えられる．

- **外部フライバイ軌道**.　これは，ケプラー軌道と類似のものである．γ が $r=+\infty$ から落下し，地平面 $r=r_+$ に到達する前に向きを変え，同じブロックIの $r=\infty$ へ戻っていくのである．測地線で $r \gg 1$ から来るものは，$|L|$ が十分大きいなら，全てこの軌道タイプとなる (防壁が存在するなら L は任意でよい). 一般に，$|L|$ が大きいほど向きを変えるのは早くなる．また，$|L|$ が一定のときは，順行軌道の方が，逆行軌道よりも ($E>0$ なら) 向きを変えるのが早くなる．これは，$L>0$ では $R_{-L}(r) > R_L(r)$ となるからである．

- **全てブロックIII内にあるフライバイ軌道**.　ブロックIIIにあるホワイトホール効果のため，IよりもIIIの方が，この短いフライバイ軌道は頻繁に生じる．実際，$r<0$ を許す $Q>0$ なる時間的測地線は，全てこの軌道タイプとなる．

- **長いフライバイ軌道**.　つまり，地平面を通るフライバイ軌道である．このような時間的軌道が可能なのは，$r=+\infty$ **から落下する場合のみ**である ($-\infty$ からの場合はない). 実際，$Q \geq 0$ を満たす $r<0$ の測地線は，地平面へ向かうための咽喉を通ることができない．そして，4.9 節で見たように，$r<0$ となる渦測地線は，トランジット軌道や短いフライバイ軌道を持たない．
  時間的測地線 γ で $r=+\infty$ から入ってくるものは，標準的な粒子とみてよい．しかも，注意 4.10.1 より，ブロックIにおいては $\mathbb{P} = -<\gamma', V>> 0$ となっている．補題 4.10.3 より，γ は K^* の短い地平面 H_+ を通るから，$\mathbb{P}(r_+) > 0$，つまり $(r_+^2 + a^2)E > aL$ である．よって γ はIIへ入り，そこでは r- 転回はできない．よって，$r' < 0$ のままである．さて，フライバイ軌道となるためには，IIを出なければならない．その場所は $r = r_-$ でなければならないが，問題は，どの地平面か，ということである．これは，交叉符号 $\oplus(r_-) = sgn\mathbb{P}(r_-)$ によって決まる．すなわち，3 つの場合 (A) $\oplus = +1$, (S) $\oplus = 0$, (B) $\oplus = -1$ が考えられることになる．

場合 (A)　このときは，

$$\oplus = +1 \Leftrightarrow \mathbb{P}(r_-) > 0 \Leftrightarrow (r_-^2 + a^2)E > aL \Leftrightarrow L < 2(\mathrm{M}/a)Er_-$$

という関係が成立する．図 4.9 のような $r-L$ 図でいえば，これは，γ を表す L が一定である直線が垂直線 $r = r_-$ と，$r = r_-$ 上で $R = 0$ となる唯一の点 (r_-, L_-) の**下で**交わることを示している．とくに，$L < 0$ であるフライバイ軌道は ($E > 0$ で) 全て含んでいる．

軌道の筋道で考えれば，$\oplus = +1$ ということは，γ が，同じ K^* 細片の短い地平面 H_- を通って II を離れることを意味している．それゆえ，ブロック III に入って行くのである．この進行で $r(s)$ は減少し，$r(s) \to +\infty$ でもあるので，γ は III で転回していることになる．この (唯一の) 転回のあと，つねに $r' > 0$ であるから，$\oplus = -sgn\,\mathbb{P}$ となる．したがって，$r = r_-$ で III を離れてからは $\oplus = -sgn\,\mathbb{P}(r_-) = -1$ となる．これは，III に含まれる K^* 細片の H_- を通って III を離れ，この細片のブロック II' へ入ることを意味している．さらに，$\oplus = -sgn\mathbb{P}(r_+) = -1$ で II' を離れる (上記より $\mathbb{P}(r_+) > 0$ である). これは，H_+ から，同じ $^*K$ 細片のブロック I へ入ることを意味している．ところで $r' > 0$ であるから，これ以上横断することはなく，図 4.19 のように，I の $r = +\infty$ へと離れていく．

場合 (S)　このときは，

$$\oplus = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(r_-) = 0 \Leftrightarrow (r_-^2 + a^2)E = aL \Leftrightarrow L = L_- = 2(\mathrm{M}/a)Er_-$$

という関係が成立する．つまり，L と E は比例している．図 4.9 のような $r-L$ 図では，直線 $L = L_-$ は，$r = r_-$ 上で唯一の $R = 0$ となる点 (r_-, L_-) を通る．また，$r = r_-$ で $\oplus = 0$ であるから，これは，γ が交叉球 $S(r_-)$ を通って II を離れることを意味している．そして，r- 転回をするので，相対のしているブロック II' へ入る．(図 4.9 から分かるように，III へ入るのは不可能である.) フライバイ軌道ではこれ以上転回しないから，このあとは $r' > 0$ のままであり，$\oplus = -sgn\mathbb{P}$ となる．明らかに γ は I I' を離れるが，その点は $r = r_+$ である．ちなみにそこでは $\oplus = -sgn\,\mathbb{P}(r_+) = -1$ である．つまり，γ は，II' を含む $^*K$ 細片の H_- を横断し，ブロック III へ入ることになる．そして，図 4.19 のように，前の場合と同様にしてこのブロックで $r = +\infty$ となるのである．

場合 (B) このときは，

$$\oplus = -1 \Leftrightarrow \mathbb{P}(r_-) < 0 \Leftrightarrow (r_-^2 + a^2)E < aL \Leftrightarrow L > 2(\mathrm{M}/a)Er_-$$

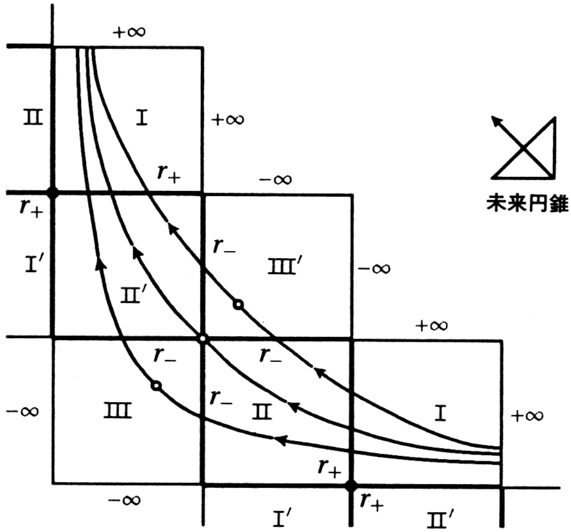


図 4.19　遅速カー・ブラックホールにおける時間的測地線の，長いフライバイ軌道．考えられる 3 つの場合 (A), (S), (B) を示してある．場合 (A) では，III で転回点を持つ (図の白丸の点)．場合 (S) では，交叉球 $S(r_-)$ を通る．場合 (B) では，III' で転回点を持つ．

という関係が成立する．この場合には，大きい角運動量が必要となる．図 4.9 において L が一定である直線は，北の大陸の下側を通り，点 (r_-, L_-) で $r = r_-$ を通る．この場合の $\oplus = -1$ であることは，γ が，II を含む $^*K$ 細片の短い地平面 H_- を通って $^*K$ のブロック III' に入ることを示している．(図 4.19 を見よ.) ここに $r(s) > +\infty$ であるから，γ は III' を離れることになる．III' へ入ると r は減少するから，γ は III' で転回しなければならない．転回のあとは，$r' > 0$ が成立するので，γ が $r = r_-$ に近づくと，再び $\oplus = -sgn\mathbb{P}(r_-) = +1$ となる．つまり，γ は，III' を含む $K^{*\prime}$ 細片内の H_- を横断し，II' に入るのである．また，II' を離れるときには，$r = r_+$ で $\oplus = -sgn\mathbb{P}(r_+) = -1$ でなければならない．よって，このあとブロック I に入り，前の場合と同様に，$r = +\infty$ へと進行する．

これらの長いフライバイ軌道はブロック III(あるいは III') で転回し，その転回点 $r_\tau < r_-$ はカーター定数 Q によって決定される．つまり，

$$Q > 0 \Rightarrow r_\tau > 0, \qquad Q < 0 \Rightarrow r_\tau < 0, \qquad Q = 0 \Rightarrow r_\tau \geq 0$$

である．

これらの，ブラックホールを横断する大胆な宇宙探査では，操縦士はブロックⅠへ戻ってくる．しかし，このブロックは元のものではない．彼らは，2度と故郷に帰れないし，そこへメッセージを送ることすらできない．しかしながら，故郷からのメッセージを受け取ることはできるし，後発の入植者と会うこともできるのである．

時間的有界軌道

ここでは，ニュートン力学におけるケプラーの楕円に相当する軌道を考える．楕円の半径は，$r_1 = r_{\min}$ (**近点** (pericenter)) と $r_2 = r_{\max}$ (**遠点** (apcenter)) の間にある．エネルギーが脱出エネルギーに達しない時間的測地線は有界軌道を持ち，4.8節で見たように，範囲 $0 < r < 2M$ においては，有界軌道は，どのエネルギー・レベルででも存在する．しかし $r < 0$ では存在せず (不安定球軌道は除く), $r < 0$ と $r > 0$ の間で振動することもない．

先ず，1つのボイヤー－リンキスト・ブロックだけに存在する**小さい**有界軌道を考える．

- **ブロックⅠのみに存在する有界軌道**. γ はブロックⅠのみに存在するのだから $r_+ < r_1 < r_2$ である．これは，太陽の周りを回る地球が描くケプラー楕円で，4.8節から分かるように，順行の場合でも逆行の場合でも，このような軌道は多く存在する．
- **ブロックⅢのみに存在する有界軌道**. この軌道は余り存在しない．前に見たように，$r < 0$ では存在しないし (不安定球軌道は除く), 咽喉を横断するものも存在しない．だが，4.8節から分かるように，$Q > 0$ が小さいときには一時的に〈瘤〉ができるので，ブロックⅢの範囲 $0 < r < r_-$ においては，この軌道が存在することになる．$E > 0$ のときには，これらは全て順行し，L の値は aE の近くにある．

- **大有界軌道**. 時間的測地線 γ が大有界軌道を持ち，ブロックⅠと交わるとする．このような測地線は，防壁と港湾では普通に存在する (図4.16を見よ). 始点 $r_0 = \gamma(s_0)$ を $r_2 = r_{\max}$ のあとに取ると，γ は普通の粒子となる．前と同じように，γ は短い地平面 H_+ を通り，Ⅱを横断し，$r = r_-$ を通って行く．ここでも，場合(A), 場合(S), 場合(B)のように分類ができる．

場合 (A) この場合，γ は，同じ細片 K^* 内のブロックⅢへ入る．そして，γ は，$r_1 = r_{\min} < r_-$ で2度目の r 転回をし，Ⅲを含んでいる $^*K$ のⅡ'へ入る．これを図示したのが図4.20である．

場合 (S) この場合，γ は，$\boldsymbol{S}(r_-)$ を通って，場合(A)と同じブロックⅡ'へ入る (図

4.20 を見よ). 合流点が r 転回なので, $r_1 = r_{\min} = r_-$ である.

場合 (C) この場合, γ は, Ⅱ を含んでいる $^*K$ 細片のブロック Ⅲ' に入る. また $r' < 0$ である. これは, $r = -\infty$ と $r_1 = r_{\min} < r_-$ におけるの 2 度目の転回の間で成立する. このあと, 場合 (A), 場合 (S) と同じように, γ は同じ Ⅱ' に入っていく.

このように, これら 3 つの場合の測地線は, Ⅱ' で再会する. そのあと, γ は I' に入れず, $\mathbb{P}(r_+) > 0$ なので, $\boldsymbol{S}(r_+)$ と交わることもない. したがって, $r' > 0$ で, H_+ を横断し, この細片 $^*K$ のブロック I へ入っていく. $r(s)$ が最初の転回点の半径になると, γ は再び転回する. このようなブロック I から次のブロック I への旅行は, 未来, 過去の両方に複写することができる. したがってこれらの有界軌道は, 時空の全てのブロック I, ブロック Ⅱ, Ⅱ' を通るのである. そして, 場合 (A) では全てのブロック Ⅲ を通り, 場合 (C) では全てのブロック Ⅲ' を通る. これらの軌道はブロック Ⅲ に入るが, (上に見たように) 咽喉 $r = 0$ を横切るものはない. もちろん, これらは相対論的な飛行である. ニュートン物理学の衛星 β では, 有界軌道を辿って最初の事象に戻ることはないが, 宇宙空間のスタート地点には戻ってくる. 出発を見送った人々に迎えられるのである. しかしながら, 上に述べた γ の軌道では, 2 周のあと, 元のボイヤー—リンキスト・ブロックからは離れ, 出発を見送った人々とは永遠に再会できないのである.

- **ブロック I と交わらない大有界軌道**. このような軌道は, $Q > 0$ における 4 つの形において表れる. これらでは $L = L_+ = 2(\mathrm{M}/a)Er_+$ であり, $r - L$ 図では, $L = L_+$ 直線は, $0 < r_1 < r_-$ なる (r_1, L_+) と (r_+, L_+) の間の線分である. したがってこの軌道は, ブロック Ⅲ から Ⅱ' を通り, $\boldsymbol{S}(r_+)$ を通って Ⅱ に入り Ⅲ に戻る, という繰り返しになっている (図 4.20 と比較せよ).

時間的測地線でブロック Ⅱ に全て含まれるものはないが, I とも Ⅲ とも交わらない測地線は存在する. これらは相対性理論特有のものであり, ニュートン物理学の中で類似のものを探すことはできない.

- **タイムトラベラー**. 式 $r_- = r_1 < r_2 = r_+$ が成立する場合. この測地線 γ では, 交叉球 $\boldsymbol{S}(r_-)$ と $\boldsymbol{S}(r_+)$ を交互に横切るところで $r-$ 転回点を持つ. また $\mathbb{P}(r_\pm) = ({r_\pm}^2 + a^2)E - aL = 0$ であるから, γ は短い地平面と交わらず, ブロック Ⅱ と Ⅱ' に永久に留まっている. 全ての交叉球と交わりながら, これらの 2 つのブロックに軌道を描いているのである. 方程式 $\mathbb{P}(r_+) = \mathbb{P}(r_-) = 0$ より $({r_+}^2 - {r_-}^2)E = 0$ となる. よって $E = 0$ で $L = 0$ となる. つまり, γ は, ∂_t と ∂_ϑ に垂直であり, 極平面 (時間的な P_{III} である) 内にある (3.6 節を見よ).

これらの軌道は, 適当な $\boldsymbol{S}(r_\pm)$ で預けた荷物が未来の交叉球で受け取れる, という宅配便と考えればよい.

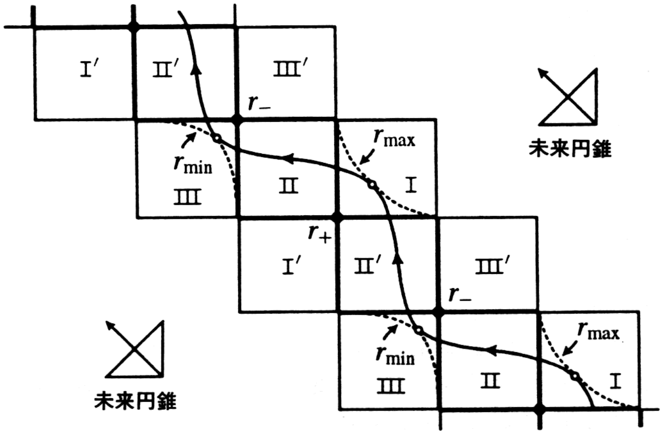


図 4.20　遅速カー・ブラックホールにおける大有界軌道．標準的な場合 (A) では，測地線は $0 < r_{\min} < r_- < r_+ < r_{\max}$ の範囲にあり，ブロック I, II, II', III を通る．咽喉 $r=0$ は通らない．白丸は rー転回点を表している．ここで，測地線が 2 つの超曲面 $r = r_{\min}$, $r = r_{\max}$ と接しているのである．

トランジット・タイプを持つ時間的軌道

ここでは，ニュートン力学における，$r = +\infty$ から垂直に落下して小質量の星を通過してまた無限遠方へ戻る粒子の運動，に相当するものを考える．カー測地線は，安全にブラックホールの咽喉を通り，$r = \pm\infty$ から $r = \mp\infty$ まで動く．つまり渦である．前に述べたように，主要零的測地線に近い測地線はトランジット・タイプを持つから，このような軌道は通常の形態ではない．

補題 4.10.4　遅速カー時空においてトランジット・タイプを持つ時間的測地線 γは，1 つのカー細片内に留まる．

証明　いま，γ は，ブロック I の $r = +\infty$ から来る標準的な粒子と仮定してよい．そして，H_+ を横断して K^* のブロック II へ入る．$r(s)$ の範囲は $+\infty$ から $-\infty$ であるから，関数 $\mathbb{P}(r) = (r^2 + a^2)E - La$ は $r = 0$ で最小値をとり，$\mathbb{P}(0) = a(aE - L)$ である．この γ は渦 (かつ $E > 0$) であるから，カーター不等式は

$$|L| < a\sqrt{e} - |Q|^{1/2} \leq aE$$

となる．したがって，任意の r で $\mathbb{P}(r) \geq \mathbb{P}(0) > 0$ である．しかるに，

$$\oplus(r_-) = -sgn(-\mathbb{P}(r_-)) = \mathbb{P}(r_-) > 0$$

が成立する．よって，$r(s)$ が r_- を通るとき，γ は K^* の短い地平面 H_- を通過する．この γ は r- 転回点を持たないので，符号 $r' < 0$ は変わらず，γ は，K^* で $r = -\infty$ へ行くことになる．□

4.11 軸測地線

2 つの等長な成分を持つ軸は，任意のカー時空で，矛盾なく定義される．これは，全測地的な時間的閉曲面である (2.5 節参照). 軸は，地平面を横切るが，リング状特異領域は通らない．そして，対称的な位置にもかかわらず回転の影響が出てくるのである．

この節の最初の目的は，軸が測地的に完備であることを示すことである．次に，その測地線の軌道の形を調べる．第 3 章で，最大カー時空では，時空自体が K^* と $^*K$ を集めたものであると同様に，K^* と $^*K$ の軸を集めて軸が出来ていることを示した．この 2 つの軸の成分の 1 つを A とおく．

この A においては，第 1 積分は次のようになる．A において $\partial_\varphi = 0$ なので $L = 0$，ϑ の方程式より $\mathcal{K} = -\mathfrak{q}a^2$. したがって $Q = -a^2(E^2 + \mathfrak{q})$ であり，脱出エネルギーを持つ全ての測地線は渦となる．また $C = \pm 1$ ゆえ，ρ^2 は $r^2 + a^2$ となり，$\mathbb{D} = 0$ である．よって，軸の上では，r－方程式は

$${r'}^2 = \mathfrak{q}\Delta/(r^2 + a^2) + E^2$$

となる．この節と次の節では，この一般的な関係式を活用する．

補題 4.11.1 いま，$F: R \to R$ を滑らかで上に有界な関数とする．もし $F(y_0) \geq 0$ ならば，初期条件 ${y'}^2 = F(y), y(s_0) = y_0$ を満たす微分方程式には，解として，2 つの滑らかな関数が存在する．この 2 つの関数は ($F(y_0) = F'(y_0) = 0$ では定数 $y = y_0$ のみが解となるので，この場合は除く) 実数軸全体で定義される．

証明 先ず，局所的に与えられる解を考える．もし $F(y_0) \neq 0$ ならば，唯一の解は $y' = \pm F(y)^{1/2}$ より与えられる．一方 $F(y_0) = 0$ ならば，系 4.3.8 の論法より，2 つの場合が出てくる．そして $F'(y_0) = 0$ ならば $y(s) = y_0$ が唯一の解である．他の解は，漸近的に y_0 に近づくものとなる．また $F'(y_0) \neq 0$ ならば，2 つの滑らかな関数

が存在する．その1つは $y''(s_0) = F'(y_0)/2 \neq 0$ より与えられ，他は定数 $y = y_0$ である．(後者の〈包絡解〉は測地的に重要ではない.)

明らかに，定数 $y = y_0$ は，この微分方程式の大域的な解とすることができる．他の，開区間 I で定義された滑らかな関数を $y(s)$ とする．いま $I \neq R$ とするとき，この解は拡張することができることを示す．区間 I が有限な終点 b を持つとする．F は有界であるから，$s \to b$ とするとき，$y(s)$ は有限な極限 y_1 を持つ．ここで $F(y_1) = 0$ としても一般性を失わないので，$y' \to 0$ である． b の近くで，y は，$y' = +F(y)^{1/2}$ か $y' = -F(y)^{1/2}$ の解である．よって，y は，s_0 の近くで与えられた唯一の(非定数)局所解により，s_0 を超えて拡張することができる．□

完備であることを証明するために，局所的に与えられた軸測地線を γ とする．この γ は，地平面の外側を始点とするとしてよい．(実際，A の測地線で H 内に留まるものは静止光子のみであり，それらは完備なのである.) 軸の rー方程式(補題 4.11.1 の前にある式)の右辺は r の有界関数であり，よって補題 4.11.1 より解が存在し，その解は γ の r 座標を超えて数直線全体で定義されている．よって，あとは，t 座標の方を拡張すればよい．先ず，増大するパラメータ s について調べる．減少の場合は，これの符号を逆にすればよい．

話を明確にするため，γ が K^* 細片からスタートする，とする．A におけるカー・スター座標 t^*, r を使うと，γ のエネルギーは

$$E = -<\gamma', \partial_t> = -<t^{*\prime}\partial_t + r'\partial_r, \partial_t>$$
$$= -g_{tt}t^{*\prime} - g^*{}_{rt}r' = t^{*\prime}\Delta/(r^2 + a^2) - r'$$

と表すことができる．

これを $t^{*\prime}$ について解くと，t^***ー方程式** (t^*-equation)

$$t^{*\prime} = (r' + E)(r^2 + a^2)/\Delta$$

を得る．軸の rー方程式の場合では γ 全体で成立したが，この方程式は K^* 細片でのみ成立する．しかしながら，高速カー時空 M_f の軸が測地的に完備であることを示すにはこれで十分である．R においては r 座標があり，M_f は K^* に等長であるから，t ー方程式は大域的に定義され，$t^{*\prime}$, そして t^* は R 全体で定義される．

これまでと同じように，極限時空と遅速時空では，地平面には興味深い性質がある．なお，γ が K^* (あるいは $^*K$)の地平面 H を横断するための必要条件は $E \neq 0$ である．実際，$\gamma(s_1) \in H$ ならば軸の rー方程式は $r'(s_1)^2 = E^2$ となる．

いま，M_e あるいは M_s の軸上で局所的に定義された測地線を γ とする．先ず，γ がゼロでないエネルギー $E \neq 0$ を持つとする．パラメータ値 s_1 を，$r(s_1) = r_+, r_-, \mathrm{M}$ を満たす (これらの式が成立するとして) 最初の値とする．rー方程式より $r'(s_1) = \pm E$ である．

補題 4.11.2　上記の仮定の下に，γ は，s_1 を超えて測地的に拡張することができる．
(1) もし $r'(s_1) = -E$ ならば，γ は K^* の地平面を点 $\gamma(s_1)$ で横断する．
(2) もし $r'(s_1) = E$ ならば，γ は ${}^*K$ の地平面を点 $\gamma(s_1)$ で横断する．

証明　いま $E \neq 0$ としてあるので，2 つの場合を別々に調べなければならない．
(1) もし $r'(s_1) = -E$ ならば $r'(s_1) - E \neq 0$ である．rー方程式を

$$(r' + E)/\Delta = \mathbf{q}(r^2 + a^2)/(r' - E)$$

と書くと，$s = s_1$ で $(r' + E)/\Delta$ が矛盾なく与えられることが分かる．したがって t^*ー方程式は積分でき，γ に関する，s_1 を超えた所まで滑らかな座標関数 $t^*(s)$ を得る．しかるに，$r(s)$ はすでに大域的に定義されているから，これは，γ は測地的に s_1 を超えて定義することができることを示している．明らかにこれは，$\gamma(s_1)$ で K^* の地平面を横断する．
(2) もし $r'(s_1) = E$ ならば $r'(s_1) + E \neq 0$ である．ここで rー方程式から，$t^{*\prime}$ は s_1 で拡げることができる．実際，s_1 の近くで $|r'(s) + E|$ は 0 にはならないから，この式を積分すれば，$s \to s_1$ にしたがって，測地線 γ はカー・スター座標で無限大へ行く．しかるに，これまでと同様に，スター・カー座標へ変換しても状況は変わらない．関数 $r(s)$ は不変で，${}^*t = t^* - 2T(r)$ である．よって

$$t^{*\prime} = {}^*t' + 2\, dT/dr\, r' = {}^*t' + 2r'(r^2 + a^2)/\Delta$$

となる．これを t^*ー方程式へ代入して ${}^*t' = (E - r')(r^2 + a^2)/\Delta$ を得る．そして，(1) の場合と同様に，$(E - r')/\Delta$ は s_1 の近くで矛盾なく定義され，${}^*t$ も同様である．つまり，γ は ${}^*K$ の地平面を横断するのである．□

γ を拡張した r 座標で表すと，γ 自体が延長するので，γ が横切る地平面がどれであるかを確認することができる．

軸 A 内の全ての零的測地線は主要測地線である．補題 4.11.2 より，軸内の主要零的曲線も，これまでの測地線と同じようなふるまいをすることが分かる．特に，Rー方

程式は $r' = \pm E$ となるので，$E = 1$ としても一般性は失われない．t^*ー方程式より，$r' = -1$ ならば $t^{*\prime} = 0$ となるので，これらは，$s \in R$ 全体で定義された内向線である (図 2.8 を見よ). しかるに $r' = +1$ のときには，$r(s)$ が地平面の半径へ近づくとき t^* は無限大へ向かうことになる．しかしながら，$^*K$ 座標へ移ると，完備な内向線を生じるのである．

系 4.11.3　極限カー時空 M_e の軸は測地的に完備 である．

証明　M_e の地平面は，K^* 細片と $^*K$ 細片における短い地平面 $r = \mathrm{M}$ である．いま，γ が K^* から出発するとする．もし $r(s)$ が M に一致することがないならば，t^*ー方程式は積分でき，R で $t^*(s)$ を与える．もし $E \neq 0$ で，ある s_1 について $r(s_1) = \mathrm{M}$ となるならば，補題 4.11.2 より，γ は地平面を横断することが分かる．そして $^*K$ 細片へ移ることになる．必要に応じて K^* と $^*K$ を使い分けてこれを続けると，γ は R 全体へ拡張することができる．また $E = 0$ ならば，t^*ー方程式より，γ は，定数であるか, あるいは $H \cap A$ でパラメータを定義した (完備な) 静止光子である．□

遅速時空 M_s では，上記のことから，A の測地線でエネルギーが $E \neq 0$ であるものは完備であることが分かる．したがってこの場合は地平面を横断することも可能であるが，それは交叉球 $\boldsymbol{S}(r_\pm)$ を通してである．

もし γ が時間的ならば，rー方程式より $r'^2 = -\Delta/(r^2 + a^2)$ となる．よって $r_- \leq r(s) \leq r_+$ で，$r(s)$ は，一方の極限からもう一方の極限へと動く．t^*ー方程式から

$$t^{*\prime} = r'(r^2 + a^2)/\Delta \quad (K^* \text{の場合})$$

$$^*t' = -r'(r^2 + a^2)/\Delta \quad (^*K \text{の場合})$$

となる．すなわち，t 座標は $r_- < r(s) < r_+$ で矛盾なく定義されているのである．この $r(s)$ が r_- や r_+ に近づいたときの状況を調べるために，γ が，K^* のブロック II 内にあるとし，$r(s) \to r_+$ について考える．このとき

$$t^*(s) - t^*(s_0) = \int_{s_0}^{s} \frac{(r^2 + a^2) r' ds}{\Delta} = \int_{r_0}^{r(s)} \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr$$

である．r が r_+ に近いなら $\Delta \approx r - r_+$ で，t^* は，$r(s) \to r_+$ のとき対数曲線的に $+\infty$ に近づく．普通の場合と同じように，KBL 座標を用いれば，γ が交叉球 $\boldsymbol{S}(r_+)$ と交わり，ここを通ってブロック II' へ行くことが分かる．この行動は，未来方向と同

時に過去方向にも繰り返される．つまり，4.10 節で述べたように，この測地線は，M_s の全ての交叉球を通るタイムトラベラーなのである．そして完備である．

もし $E=0$ で測地線 γ が零的ならば，前と同様に，r－方程式から $r(s)$ は定数であることが分かり，t^*－方程式より $H\cap A$ にパラメターを与えたものであることが分かる．

空間的で $E=0$ ならば，その軌道は，ブロックⅡのタムイトラベラー軌道とは逆になる．r－方程式は ${r'}^2=\Delta/(r^2+a^2)$ で，これから，$r(s)\leq r_-$ または $r(s)\geq r_+$ となる．もし後者なら，γ は，K^* のブロックⅠを $r'(s_0)<0$ でスタートしたと仮定してよい．s が (よって $r(s)$ も) 減少すると，$\Delta/(r^2+a^2)\to 1$ で，$r'\to -1$ となる．よって，$r(s)$ は，$s\leq s_0$ 全体で定義され，$s\to -\infty$ のとき $r(s)\to\infty$ となる．s と $r(s)$ が増大すると，時間的の場合と同様にして，γ は，$s_1<s_0$ なる有限の点で交叉球 $\boldsymbol{S}(r_+)$ と交わることが分かる．よって，γ は，ブロックⅠの $r=+\infty$ から始まるフライバイ軌道で，すぐ隣の過去である K^* 細片にあるブロックⅠ' で $\boldsymbol{S}(r_+)$ を通り，Ⅰ' の $r=+\infty$ へ出ていくのである．

$r(s)\leq r_-$ の場合も同様である．ⅠをⅢに取り替えればよい．明らかに，$E=0$ である空間的な測地線は完備であり，軌道は図 4.19 に示したものと似ている．以上で次の系の証明が完成した．

系 4.11.4 遅速カー時空 M_s の軸は測地的に完備 である．

軸測地線の軌道は，一般の軌道タイプの単純な例となっている．これは簡単に求めることができる．軸の r－方程式は，**エネルギー方程式** (energy equation) として

$$ {r'}^2+\Phi(r)=E^2 $$

となる．ここに，$\Phi(r)=-\mathrm{q}\Delta/(r^2+a^2)$ は**有効ポテンシャル** (effective potential) である．

時間的測地線 γ では，図 4.21 より (E^2 を有効エネルギー $e=E^2-1$ に置き換えて) 次のことが分かる．

- もし $e>\mathrm{M}/a$ ならばトランジット・タイプである．
- もし $0\leq e<\mathrm{M}/a$ ならばフライバイ・タイプである．
- もし $-1\leq e<0$ ならば有界軌道である．

前に述べたように，$e>0$ ならば軸測地線は渦である．これについては，4.9 節で触れてある (ここに至って完成したわけである)．トランジット・タイプとフライバイ・タイプを分ける $e=\mathrm{M}/a$ の場合では，r は $-a$ で定数となる．よって t パラメータ曲

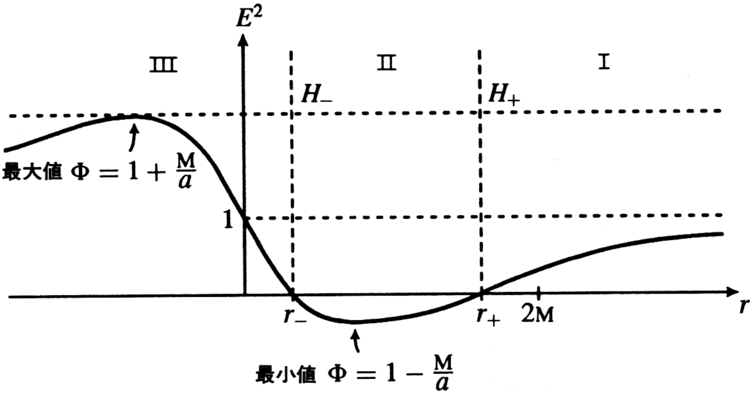


図 4.21　時間的軸測地線の有効ポテンシャル Φ のグラフ．(垂直方向の軸が，E ではなく E^2 であることに注意.)

線となる．それで，$r = -\infty$ や $r = +\infty$ からのフライバイ軌道は，$r = -a$ に到達する前に曲がってしまう (後者の場合，$-a$ と 0 の間である)．軸測地線では，周辺脱出エネルギー $e = 0$ より，脱出が実際に生じることが分かる (これは，一般には生じない)．そして前に見たように，$e = -1$ ならばタイムトラベラーとなる．

軸軌道は，例えばカー外部の北軸に停止している宇宙船から投げられた粒子の軌跡と考えればよい．

1. もしこの小石が，かなり大きいエネルギー $e > M/a$ でブラックホール内へ投げられたのならば，核を通って $r = -\infty$ へ出て行く (トランジット・タイプ)．上に投げられたのならば，単純に $r = +\infty$ へと脱出して行く．
2. もし小石が，小さいエネルギー $0 < e < M/a$ で下へ投げられたのならば，それは咽喉 $r = 0$ を通り，そのあと，転回する．しかし，宇宙船に再捕捉される位置までは戻らない．最初の K^* 細片の両方の地平面を通ったので，それをもう一度通ることはない．転回のあとで $r = r_-$ を通るときは，$^*K$ で通過するのであり，長いフライバイ軌道となる (図 4.19 を見よ.)
3. もし小石が，$e < 0$ (つまり脱出エネルギーより小) で下へ投げられたのならば，地平面を通るが，咽喉に達する前に転回する．そしてもう一度転回し，大有界軌道となる (図 4.20 を見よ)．

このように，小石が宇宙船に戻るのは，適度なエネルギーで投げ上げた場合 (つまり常識的な状況) だけである．カー外部で，有界軸軌道を作る方法は存在しない．

零的軸測地線は主要測地線であるから，全てトランジット軌道となる．空間的軸測地線の軌道タイプは，図 4.21 から (Φ を $-\Phi$ に置き換えて) 読みとることができる．$r=a$ における不安定軌道は別として，軌道タイプはトランジットと長いフライバイのみである．後者では，$r=a$ に届く前にブロック II で転回する．

4.12　地平面の測地線

ここでは最大カー・ブラックホール M の地平面 にある測地線について検討し，完備であることを示す．それらは M の測地線であるが，全測地的閉超曲面 $\mathbb{H}_\pm$ に入っていることを強調しておく．この $\mathbb{H}_\pm$ は零的であるから，地平面はそれ自身固有の測地線は持たない．ここでは遅速カー・ブラックホール M_s の長い地平面 $\mathbb{H}_\pm$: $r=r_\pm$ について考えるが，$r_\pm = a = \mathrm{M}$ とすれば，M_e の短い地平面の場合も含まれることになる．

地平面では，いろいろなカー定数が簡単になる．先ず，$\mathbb{H}$: $r=r_\pm$ は $\Delta(r_\pm)=0$ で定義されるから，${r_\pm}^2+a^2=2\mathrm{M}r_\pm$ である．この定数を $b_\pm$ で表すことにする，つまり

$$b_\pm = {r_\pm}^2 + a^2 = 2\mathrm{M}r_\pm$$

とする．このとき，第 1 積分は次のようになる．

1.静止光子を除き，$\mathbb{H}$ **の全ての測地線** γ **は空間的である**．第 3 章で，静止光子は完備であることを見てあるので，ここではそれを除き，$\mathfrak{q}=+1$ と置く．

2.地平面の全ての測地線において，L と E は比例する，つまり $b_\pm E = aL$ である．実際，$r=r_\pm$ の測地線では $r'=0$, $\Delta(r_\pm)=0$ であり，定理 4.2.2 の $r-$方程式は $\mathbb{P}(r_\pm)=0$ となる．つまり，$({r_\pm}^2+a^2)E-aL=0$ である．とくに，E と L は，ともにゼロであるか，あるいはともにゼロでないなら同符号である．

3.式 $\mathcal{K}={r_\pm}^2$ が成立する．実際，V は主要平面 Π 内にあり $\mathbb{H}$ で零的である．よって，補題 4.2.7 の下の式から，$<\gamma'_\pi, \gamma'_\pi>=0$ となる．そして $\mathfrak{q}=+1$ なので，この補題より $\mathcal{K}={r_\pm}^2$ となる．(地平面では，カーター定数の $\mathcal{K}$ の式が，Q よりも有用である.)

地平面の測地線の r 座標は定数であるから，$\vartheta-$方程式が，次数 2 の第 1 階微分方程式となる．つまり

$$(d\vartheta/ds)^2 = \Theta(\vartheta)/{\rho_\pm}^4$$

で，ここに

$$\rho_{\pm}{}^2 = \rho_{\pm}(\vartheta)^2 = r_{\pm}{}^2 + a^2C^2$$

である．そして，$\rho_{\pm}{}^2 \geq r_{\pm}{}^2 > 0$ で，関数 Θ はつねに上に有界であるから，補題 4.11.1 より，R 全体で定義された滑らかな解 $\vartheta(s)$ が存在する．よって，$\Theta(\vartheta_0) \geq 0$ を満たす全ての ϑ_0 に対して，(少なくとも局所的には)$\mathbb{H}$ の測地線 γ を得る．次に，この測地線が完備であることを調べる．

短い地平面 H において，φ^* と t^* (または ${}^*\varphi$ と ${}^*t$) の第 1 階微分方程式は，両方の座標系で成立する 1 つの方程式にまとまる．

補題 4.12.1　短い地平面 $H\colon r = r_{\pm}$ における測地線 γ のカー・スター座標では

$$at^{*\prime} - 2\mathrm{M}r_{\pm}\varphi^{*\prime} = -\mathbb{D}/S^2 = aE - L/S^2$$

なる関係式が成立する．同じ式が，${}^*t'$ と ${}^*\varphi'$ についても成立する．

証明　一般にカー・スター座標では

$$\begin{aligned} -E &= <\gamma', \partial_t> = +r' + g_{tt}t^{*\prime} + g_{t\varphi}\varphi^{*\prime}, \\ L &= <\gamma', \partial_\varphi> = -aS^2r' + g_{\varphi t}t^{*\prime} + g_{\varphi\varphi}\varphi^{*\prime} \end{aligned}$$

が成立する．スター・カー座標では，r' の項の符号が逆になる．地平面では $r' = 0$ であるから，${}^*t, {}^*\varphi$ でもこの方程式が成立する．(この 2 式は独立ではない．実際，成分の行列式をとれば，H において $g_{tt}g_{\varphi\varphi} - g_{t\varphi}{}^2 = -\Delta S^2 = 0$ となる.)

E の式に aS^2 を掛け，L の式に加えれば，計量についての恒等式 (2.1 節) より結果が出る．□

次に，カー地平面内の測地線 γ に関する t^* (あるいは ${}^*t$) 座標についての第 2 階常微分方程式を導くことにする．これを使えば，完備性を示すことができ，γ が K^* 細片から ${}^*K$ 細片へ (あるいはこの逆を) いつどのようにして移動するのかを決定することができる．この方程式は，t^* (あるいは ${}^*t$) の測地線の方程式において，$r = r_{\pm}$ とし，補題 4.12.1 を使い，$t^{*\prime}$ に関する $\varphi^{*\prime}$ を消去すれば得られる．ここでは，ラグランジュの方法を使い，複雑な微分を簡単にする計算の概略を述べる．こまかい計算は，付録 C の計算とほとんど同じなので，省略する．

先ず，2 つの記号を約束する．

1. カー・スター座標とスター・カー座標を同時に取り扱うので，t^* と $^*t$ の両方を t で表す．同様に，φ^* と $^*\varphi$ を φ で表す．
2. 複号 $\pm$ と $\mp$ を用いるが，上側の記号は K^*, 下側の記号は $^*K$ に相当する．なお，$r_\pm$ のような**下付の記号**も出てくるが，混乱することはない．

さて，K^* と $^*K$ の線素はラグランジュの方程式

$$L = \frac{1}{2}\left[\ g_{tt}\dot{t}^2 + 2g_{t\varphi}\dot{t}\dot{\varphi} + g_{\varphi\varphi}\dot{\varphi}^2 + \rho^2\dot{\vartheta}^2 \pm 2\dot{r}\dot{t} \mp 2aS^2\dot{r}\dot{\varphi}\ \right]$$

で与えられる．任意の測地線において，$\partial L/\partial\dot{r} = \pm\dot{t} \mp 2aS^2\dot{\varphi}$ であるから，方程式

$$(\partial L/\partial\dot{r})' = \partial L/\partial r$$

は

$$(*)\qquad \pm t'' \mp aS^2\varphi'' \mp 2aSC\vartheta'\varphi' = \frac{1}{2}\left[\ \partial_r g_{tt}t'^2 + 2\partial_r g_{t\varphi}t'\varphi' + \partial_r g_{\varphi\varphi}\varphi'^2\ \right] + r\vartheta'^2$$

となる．地平面の測地線において，$r \to r_\pm$, $\rho \to \rho_\pm$ とし，補題 4.12.1 より

$$\varphi' = {b_\pm}^{-1}(at' + \mathbb{D}/S^2)$$

であるから，

$$\varphi'' = {b_\pm}^{-1}[\ at'' - 2L(C/S^3)\vartheta'\ ]$$

となる．これらを (*) 式の左辺に代入して

$$\pm{\rho_\pm}^2{b_\pm}^{-1}t'' \mp 2a^2{b_\pm}^{-1}SC\vartheta'(t' - E)$$

となる．(*) 式の右辺の最初の項を，

$$\mathcal{A} = \partial_r g_{tt}t' + \partial_r g_{t\varphi}\varphi', \quad \mathcal{B} = \partial_r g_{t\varphi}t' + \partial_r g_{\varphi\varphi}\varphi'$$

と置いて

$$\frac{1}{2}\mathcal{A}t' + \frac{1}{2}\mathcal{B}\varphi'$$

と書く．この $\mathcal{A}$ 式に φ' の式を代入して

$$\mathcal{A} = [\ \partial_r g_{tt} + a{b_\pm}^{-1}\partial_r g_{t\varphi}\ ]t' + {b_\pm}^{-1}\partial_r g_{t\varphi}\mathbb{D}/S^2$$

とする．計量の式を微分して (付録 C と同様である), 補題 4.12.1 を使い，$\frac{1}{2}\mathcal{A}t' + \frac{1}{2}\mathcal{B}\varphi'$ を $ft'^2 + gt' + h$ とする．

この t'^2 のみが $(*)$ 式で非線形である部分ゆえ，t'^2 の係数，つまり

$$f = -{b_\pm}^{-2}\left[(r_\pm - \mathrm{M})(b_\pm - a^2S^2) + r_\pm(bg_{tt} + ag_{t\varphi})\right]$$

が問題となる．しかるに $b_\pm - a^2S^2 = {\rho_\pm}^2$ で，H においては，計量恒等式 (m4) が $b_\pm g_{tt} + ag_{t\varphi} = 0$ となる．よって係数 f は $-{b_\pm}^{-2}(r_\pm - \mathrm{M}){\rho_\pm}^2$ となる．

これを $(*)$ に代入して t'' で解く．その式を簡単にし，$\mathbb{D} = E{\rho_\pm}^2/a$ を使うと次の結果を得る．

命題 4.12.2　K^* あるいは $^*K$ の短い地平面 $r = r_\pm$ 上に与えられた測地線の t (つまり t^* か $^*t$) 座標は微分方程式

$$t'' = \mp {b_\pm}^{-1}(r_\pm - \mathrm{M}){t'}^2 + At' + B$$

を満たす．ここに

$$\begin{aligned}
A &= A(s)\\
&= 2a^2{\rho_\pm}^{-2}SC\vartheta' \pm 2{b_\pm}^{-1}\left[\, r_\pm - \mathrm{M} + b_\pm r \pm {\rho_\pm}^{-2} \,\right]E,\\
B &= B(s)\\
&= \pm r_\pm b_\pm {\rho_\pm}^{-2}{\vartheta'}^2 - 2a^2{\rho_\pm}^{-2}SCE\vartheta' + \frac{1}{2}N(\vartheta)E^2/(a^2r \pm S^2b_\pm{\rho_\pm}^2),\\
N(\vartheta) &= 2{r_\pm}^6 + a^2(5C^2-1){r_\pm}^4 + a^4(C^4+2C^2-1){r_\pm}^2 + a^6C^2S^2,
\end{aligned}$$

である．(なお，$b_\pm = 2\mathrm{M}r_\pm = {r_\pm}^2 + a^2$ で，複号 $\pm$ と $\mp$ は，上側の記号が K^*, 下側の記号が $^*K$ に対応しているものとする.)

これらは複雑な形をしているが，微分方程式自体は複雑なものではない．t 自体がそのまま出ていないので，$v = t'$ に関する 1 階の方程式である．実際，リカッチ・タイプの微分方程式である．また，v^2 の係数は定数であり，他の係数 A と B は，実数全体で定義された $\vartheta = \vartheta(s)$ の**有界関数**である．

系 4.12.3　極限カー時空 M_e の地平面上の測地線は完備である．

証明　M_e の地平面は K^* と $^*K$ の短い地平面であり，$r_\pm = \mathrm{M}$ であるから，上式は，t'^2 の項がなくなり，実数軸 R 全体で定義された係数を持つ線形な方程式となる．

よって解 $t(s)$ も R 全体で定義されている．補題 4.12.1 より，同様なことが φ 座標でも成立する．上で，$\vartheta(s)$ についても同様であることを示した．この $r(s)$ は定数であるから，M_e の測地線は完備となる．□

遅速時空の場合を証明するには，一般に成り立つ次の関係式が必要となる．

補題 4.12.4　$a(s)$ と $b(s)$ を，R 上の滑らかな関数で，絶対値が k より小さいものとする．また，微分方程式 $v' = -v^2 + a(s)v + b(s)$ の，最大領域 I における解を v とする．

1. もしある s_0 に対して $v(s_0) \leq -(k+1)$ ならば，$s > s_0$ で $v'(s) < -1$ となる．このとき，I は，右側に (有限の) 終点 c を持ち，その終点の近くでは $v \sim 1/(s-c) < 0$ が成立する．
2. もしある s_0 に対して $v(s_0) \geq k+1$ ならば，$s < s_0$ で $v'(s) < -1$ となる．このとき，I は，左側に (有限の) 終点 c を持ち，その終点の近くでは $v \sim 1/(s-c) > 0$ が成立する．

証明　どちらの場合も $|v(s_0)| \geq k+1$ である．よって

$$\begin{aligned} v^2(s_0) &\geq (k+1)|v(s_0)| \geq k|v(s_0)| + |v(s_0)| \\ &\geq |a(s_0)||v(s_0)| + |b(s_0)| + 1 \geq |a(s_0)v(s_0) + b(s_0)| + 1 \end{aligned}$$

となる．よって $v'(s_0) < -1$ である．最初の場合では $v(s_0)$ が負で，$s \geq s_0$ で $v'(s) < -1$ である．ここで v が大きくなると，v^2 は $av+b$ よりも大きくなるので，v は $v' = v^2$ の解に近くなる．そして，v の領域は右側に終点 c を持つ．これに対する $v' = v^2$ の解は $1/(s-c)$ である．2 番目の場合も同様に示される．□

v を $-v$ に置き換えれば，上記は方程式 $v' = +v^2 + av + b$ についての関係式となる．これを下記で使用するのであるが，そのときの v^2 の符号は，K^* と $^*K$ のどちらに使うか，(それに $r_+ - \mathrm{M} > 0 > r_- - \mathrm{M}$ であるから) r_+ と r_- のどちらに使うか，により決まってくる．

系 4.12.5　遅速カー時空 M_s の地平面内の測地線は完備である．

証明　長い地平面が交わっている交叉球は，コンパクトで，全測地的リーマン部分空間である．よって，その中にあるカー測地線は部分空間上でも測地線である．したがって，よく知られているホップーリノウの定理から完備となる．

一般の場合としては，K^* 細片の地平面 $r = r_+$ からスタートする測地線 γ を考えればよい．この短い地平面は，KBL 座標領域 $\mathcal{D}(r_+)$ の長い地平面 $U^+ = 0$ に含まれる (3.4 節を見よ)．これ以外の場合は，符号が異なるだけであり，同様に処理することができる．

極限の場合と同様に，問題となるのは γ の t^* 座標を拡張することである．これ以外については，ϑ 座標は R 全体で定義されており，φ^* は t^* から導かれ，r は定数である．

命題 4.12.2 より，$v = t^{*\prime}$ は

$$v' = -b_+^{-1}(r_+ - \mathrm{M})v^2 + Av + B$$

の解である．v の最大区間を I とする (よって I は γ の与えられた区間を含む)．

先ず，解 v が I の部分区間 J (有限と考えてよい) にある，という通常の場合を考える．このとき，式

$$t^*(s) = t^*(s_0) + \int_{s_0}^{s} v(s)\, ds$$

は $s \in J$ 全体で定義されている．測地線 γ の KBL 座標 $r_\pm, V^+, \vartheta, \varphi^+$ を考える．定義より，

$$V^+(s) = \exp(\kappa_+ t^*)$$

で，ここに

$$\kappa_+ = (r_+ - \mathrm{M})/({r_+}^2 + a^2) = (r_+ - \mathrm{M})/b_\pm$$

である．つまり，$V^+(s)$ は $s \in J$ 全体で定義されている．また，$\vartheta(s)$ は R 全体で定義されている．そして，$r = r_+$ ゆえ，φ^+ の定義は

$$\varphi^+(s) = \varphi^*(s) - (a/b_\pm)t^*(s) + \left[A(r_+) - (a/b_\pm)T(r_+)\right]$$

となる．補題 4.12.1 より，$\varphi^{*\prime} - (a/b_\pm)t^{*\prime} = (L/S^2 - aE)/b_\pm$ である．ここに，$S^2 = \sin^2\vartheta(s)$ はゼロより大であるか，$L = 0$ である．この方程式を積分すれば，$\varphi^+(s)$ が $s \in J$ 全体で定義されていることが分かる．次に，γ が J を越えて定義されることを示す．

例外的な 2 つの場合を考える．

場合 1. 最大区間 I が右側に (有限の) 終点 c を持つ場合．補題 4.12.4 を使うと，正の因子を除いて，c の近くで $v \sim 1/(s-c) < 0$ となる．よって，c の近くでは，

$$t^*(s) = \ln(c-s) + (s\text{ の有界関数}) \sim \ln(c-s)$$

となる．ゆえに $V^+(s) = \exp(\kappa_+ t^*) \sim (c-s)^{\kappa_+}$ である．それで，$s \to c$ のとき $V^+ \to 0$ となる．上記の式から，$s \to c$ のとき $\vartheta(s)$ が有限の値に近づくから，φ^+ も有限の値に近づくことが分かる．以上より，$s \to c$ のとき，γ の KBL 座標は，有限の極限値 $U^+ = 0, V^+ = 0, \vartheta(c), \varphi^+ = \varphi^+(\sin\vartheta(c))$ へ収束することが示された．

つまり，$s \to c$ のとき，$\gamma(s)$ は $\mathcal{D}(r_+)$ の交叉球 $\boldsymbol{S}$: $U^+ = 0, V^+ = 0$ 内の点へ近づくのである．よって，γ は，$s = c$ へ，そしてそれを越えた所へ拡張できる．$\boldsymbol{S}$ は全測地的で閉であるから，γ は $\boldsymbol{S}$ と横断的に交わることになる．すなわち，γ は，拡張して $\boldsymbol{S}$ と交わり，長い地平面の後半分，つまり $\mathcal{D}(r_+)$ のブロック II' と I' の間にある短い地平面 $r = r_+$ に入るのである．(図 3.13 を見よ.) 同様にして，さらに γ は拡張して $\boldsymbol{S}$ の別な側に入る．よって γ は完備となる．

場合 2. 領域 I が左側に有限の終点 c を持つ場合．この場合は前記を少し変えればよく，c の近くでは $v \sim 1/(s-c) > 0$ で，それゆえ $t^*(s) \sim \ln(s-c)$ となる．よって $V^+(s) = \exp(\kappa_+ t^*) \sim (s-c)^{\kappa_+}$ である．したがって，$s \to c$ のとき $V^+ \to 0$ となる．この場合，測地線は $\boldsymbol{S}$ から進んで行くことになる．

この 2 つの場合で，補題 4.12.4 で述べた状況を全て説明している．以上で，地平面を始点とする測地線 γ は，領域が無限大となるか，あるいは有限の終点で $\boldsymbol{S}$ と交わるまで，(両方向へ) 拡張できることが示された．後者の場合，γ は $\boldsymbol{S}$ と交わり，もう一方の，短い K^* の地平面へ行き，この状況が繰り返される．このようにして，γ は，R 全体へ拡張できるのである．□

さて，mod Σ における完備性 (定理 4.3.1) の証明も完了である．

地平面測地線の性質をいくつか述べておく．先ず，次の結果から，全ての測地線は有界エネルギーを持ち，渦測地線は存在しないことが分かる．

補題 4.12.6　最大カー・ブラックホールの地平面 $r = r_\pm$ 内にある空間的測地線 γ では，$Q \geq 0$ かつ $E^2 \leq r_\mp / r_\pm$ が成立する．

証明　ϑ 方程式においては，関数 Θ を，$\mathsf{q} = 1$ として $\mathcal{K}$ で表示すると，$\mathcal{K} + a^2C^2 -$

$\mathbb{D}^2/S^2$ となる．ここに，

$$\mathbb{D} = L - aES^2 = b_\pm E/a - aES^2 = E(b_\pm - a^2S^2)/a = E{\rho_\pm}^2/a$$

である．よって$\Theta = {\rho_\pm}^2\big[1 - E^2{\rho_\pm}^2/(a^2S^2)\big]$ が成立する．上に述べたように，水平線測地線が存在するかどうかの唯一の基準は $\Theta(\vartheta) \geq 0$, つまり $E^2 \leq a^2S^2/{\rho_\pm}^2$ である．E^2 の最大値は $\vartheta = \pi/2$ で与えられ，ここで

$$a^2S^2/{\rho_\pm}^2 = a^2/{r_\pm}^2 = r_\mp/r_\pm$$

である．

$\mathcal{K} = {r_\pm}^2$ と $L = b_\pm E/a$ を $Q = \mathcal{K} - (L - aE)^2$ へ代入して式 $Q = r_\pm[1 - (r_\pm/r_\mp)E^2]$ が出る．よって $Q > 0$ であり，ただし最大値 $E^2 = r_\mp/r_\pm$ では $Q = 0$ となる．□

これらの $E^2 = r_\mp/r_\pm$ を満たす測地線は地平面 $r = r_\pm$ と赤道平面の共通部分内に存在する．これらについては，赤道という視点から 4.14 節で再度取り上げることにする．

もちろん，地平面内の測地線は球軌道を持つから，問題は「どれが安定か」ということになる．$\mathbb{H}$ 内の γ に対して，$r(s) \neq r_0$ で漸近的に $r(s) \to r_0$ へ近づくのは，$\mathbb{H}$ の外を進行する測地線であるから，γ が不安定であることは $\mathbb{H}$ の**中だけ**で調べればよい．

補題 4.12.7　$\mathbb{H}_+$ の空間的測地線は全て不安定である．一方，$\mathbb{H}_-$ の空間的測地線が不安定となる条件は $E^2 \geq \frac{1}{2}(r_+/r_- - 1)$ である．

証明　地平面測地線に関する関数 $R(r)$ を，定理 4.2.2 の公式を用いて，計算する．先ず，$aL = ({r_\pm}^2 + a^2)E$ であるから

$$\mathbb{P} = (r^2 + a^2)E - aL = E(r^2 - {r_\pm}^2)$$

となる．そして，$\mathcal{K} = {r_\pm}^2$ かつ $\Delta = (r - r_-)(r - r_+)$ より

$$R = \mathbb{P}^2 + \Delta(r^2 - {r_\pm}^2) = (r^2 - {r_\pm}^2)\big[E^2(r^2 - {r_\pm}^2) + (r - r_-)(r - r_+)\big]$$

となる．したがって，$\mathbb{H}_+$ では

$$R = (r - r_+)^2(r + r_+)\lambda(r)$$

ここに，

$$\lambda(r) = (E^2 + 1)r + E^2 r_+ - r_-$$

を得る．これは r_+ において重解を持つ．これらの測地線が不安定であることを示すには，十分小さい $\epsilon > 0$ に対して $R(r_+ + \epsilon) \geq 0$ であることを示せばよい．しかるに，$\lambda(r_+) = 2E^2 r_+ + r_+ - r_- > 0$ であるから，上記の式より分かる．

$\mathbb{H}_-$ の場合は，r_- と r_+ を逆にして，

$$R = (r - r_-)^2 (r + r_-) \mu(r)$$

ここに，

$$\mu(r) = (E^2 + 1)r + E^2 r_- - r_+$$

を得る．前記と同様に，測地線が不安定となる条件は $\mu(r_-) \geq 0$ である．しかるに，$\mu(r_-) = 2E^2 r_- + r_- - r_+$ であるから，結論が得られる．□

これらの空間的測地線は (物理学的な意味は欠けるが) 自明ではない軌道構造を持っている．もし $E = 0$ ならば $L = 0$ で，$\mathbb{H}$ に沿って螺旋状に回る渦となり，$\mathbb{H}$ の中心球と交叉するものもある．もし $E \neq 0$ ならば，$\vartheta(s)$ は赤道 $\pi/2$ の周りを振動し，その振幅は，エネルギーが増えるにしたがって減少していく．したがって，先に見たように，E^2 の最大値では，測地線は $\mathbb{H} \cap Eq$ 上にある．

4.13　極軌道

カー測地線 γ は，北軸と南軸の両方を通るとき，**極軌道** (polar orbit) を持つ，という．つまり緯線全体を通るのである．その中でも有界の場合に注目する．すなわち，地球の周りを回る人工衛星のように，無限に軸を回り続ける場合である．1 つの軸と交わるためには，角運動量が $L = 0$ ならばよい．2 つの軸と交わる場合には，4.5 節で述べたいろいろな例外的な場合が排除できる．ニュートン力学の場合には，フライバイ軌道 (つまり双曲線) と軸が交わるのは，たかだか 2 回である．しかしながら，いまの場合には，任意の回数交わることが可能となる．

この節の目的は，とりうるカー極軌道，およびそれを与える第 1 積分と初期条件を調べることにある．特に，遅速ブラックホールでの時間的測地線 ($\mathsf{q} = -1$) について考える．

補題 4.13.1　極測地線 γにおいて，関数 $\vartheta(s)$ は狭義単調である．もし γ が r 有界ならば，ϑ' はゼロの下側にある．さもなければ，全回転角 $\Delta\vartheta$ は有限である．

証明　4.5 節で $L=0$ の場合について調べたが，そのことから，両方の軸と交わるならば，$Q>0$ であり，もし $E^2<1$ ならば $Q>-a^2(E^2-1)$ である．よって $\Theta=Q+C^2a^2(E^2-1)>0$ となる．つまり，ϑ 関数の式 $\rho^4\vartheta'^2=\Theta$ から ϑ' はゼロにはならない．この関数を $\vartheta'=\pm\sqrt{\Theta}\rho^2$ と書く．明らかに $\Theta>0$ は (上下から) 有界であるから，$r(s)$ は上に有界で，$\rho^2=r^2+a^2C^2$ も同じ性質を持つことになる．したがって，ϑ' はゼロの下側にある．もし γ が r 有界でなければ，$r(\tau)$ は，$\tau\to+\infty$ または $\tau\to-\infty$ のとき，無限へと発散する．いま $\tau\to+\infty$ として $r(\tau)\to+\infty$ の場合を考える．ある b について $\Delta\vartheta$ が $[\,b,\infty)$ で有限であることが示されればよい．いま b を十分大きくとり，$[\,b,\infty)$ で $r'>0$ としてよい．よって，ϑ は r の関数として表すことができる．そして，$r-$方程式と $\vartheta-$方程式より $d\vartheta/dr=\vartheta'/r'=\sqrt{\Theta}/\sqrt{R}$ である．明らかに，$\Theta=Q+C^2a^2(E^2-1)>0$ は上に有界である．有界を与える値を B とおく．いま $R=(E^2-1)r^4+2\mathrm{M}r^3+\ldots$ とすると，$E^2-1\geq 0,\ 2\mathrm{M}>0$ なので，十分大きい b について，$r\geq b$ で $R(r)>Br^3$ となる．したがって，そこで $d\vartheta/dr>1/r^3$ となり，b から ∞ までの $d\vartheta/dr$ の積分 $\Delta\vartheta$ は有限となる．□

なお，$L=0$ ならば $\mathcal{K}=Q+a^2E^2$ なので，上記の Q 不等式は $\mathcal{K}>a^2$ となる．特に $E=0$ ならば，γ は，4.10 節で述べた，タイムトラベラーとなる．

次の計算は，E. Stoghianidis and D. Tsoubelis (1987) の論文に負うところが多い．彼らの論文では，$\mathsf{q}=-1,\ L=0$ のとき，$r-$方程式 $\rho^4r'^2=R$ 内の関数 R が $R=(r^2+a^2)^2E^2-\Delta(r^2+\mathcal{K})$ になることを示している．よって，$(r^2+a^2)^2$ で割って

$$\Phi=\Phi_{\mathcal{K}}(r)=\Delta(r^2+\mathcal{K})/(r^2+a^2)^2$$

とおいて

$$(r^2+a^2)^{-2}\rho^4r'^2+\Phi=E^2$$

となる．r'^2 の係数はつねに正であるから，Φ を有効ポテンシャルと見なすことができる．これを**極ポテンシャル** (polar potential) と呼ぶことにする．また，エネルギー E^2 の極測地線の r 区間は，$E^2\geq\Phi$ となるような最大区間である．

明らかに $\Phi(0)=\mathcal{K}/a^2>1$ である．十分大きい r に対して $\Phi=(r^4-2r^3+O(r^2))/(r^4+O(r^2))$ なので，下記のことより，$r\to+\infty$ のとき $\Phi(r)\to 1$ となる．Φ は，正の関数に Δ を掛けたものだから，Φ がゼロになるのは $r_\pm$ の所だけで，負

になるのは区間 $r_- < r < r_+$ のみである (図 4.22 を見よ). 同様なことが $\partial\Phi/\partial\mathcal{K}$ でも成立するから，$r_- \leq r \leq r_+$ を除いて，**$\mathcal{K}$ が増えれば，$\Phi_{\mathcal{K}}(r)$ の値も大きくなる**.

$d\Phi/dr$ を直接計算すれば，Φ の危点は，多項式

$$N = N_{\mathcal{K}} = \mathrm{M}r^4 - (\mathcal{K} - a^2)r^3 + 3\mathrm{M}(\mathcal{K} - a^2)r^2 - a^2(\mathcal{K} - a^2)r - \mathrm{M}a^2\mathcal{K}$$

の解の所であることが分かる．また，N は，

$$W = \mathrm{M}r^3 + a^2r^2 - 3\mathrm{M}a^2r + a^4, \quad Z = r^3 - 3\mathrm{M}r^2 + a^2r + \mathrm{M}a^2$$

として $rW - \mathcal{K}Z$ と書くことができる．明らかに，N は $r < 0$ に零点を 1 つ持ち，Φ の性質から，他の零点は $r_- < r < r_+$ にあることが分かる．よって，$r > r_+$ で最大 2 個の危点を持つ．実際に 2 個あるとき，$r_u < r_s$ と置くと，図 4.22 に示すように，r_u は局所的な最大点 (**不安定球軌道**を表している) で，r_s は局所的な最小点 (**安定球軌道**を表している) である．

補題 4.13.2　遅速カー・ブラックホール内の有界極測地線 γ で $E \neq 0$ を満たすものは，カー外部の小有界軌道か，$r > 0$ の大有界軌道 (両方の地平面と交わる) である．

証明　命題 4.8.2 より，$r < 0$ の軌道は全てフライバイであり，$Q > 0$ なので，極軌道は $r = 0$ と交わることはない．したがって，4.8 節で述べたように，極測地線が咽喉によってブラックホールの核に捕捉されることがないことを示せばよい．このことは，Φ が $0 < r < r_-$ の範囲で減少しているなら成立する．このあとは，この区間は r 区間を含まない．いま，$f = \Delta/(r^2 + a^2)$, $g = (r^2 + \mathcal{K})/(r^2 + a^2)$ として $\Phi = fg$ と書く．もちろん $\Phi' = fg' + gf'$ が成立する．いま，全ての所で $g > 0$ かつ $g' < 0$ (これは $\mathcal{K} > a^2$ から出る) であり，$r_- < r < r_+$ で $f > 0$ となる．よって，もし $f' < 0$ なら，その区間で $\Phi' < 0$ である．しかるに $(r^2 + a^2)^2 f' = 2\mathrm{M}(r^2 - a^2)$ である．よって，$r = a$ 以外では $f' < 0$ である．ところで，

$$a/\mathrm{M} < 1 \Rightarrow 1 - (a/\mathrm{M}) \leq (1 - a^2/\mathrm{M}^2)^{1/2} \Rightarrow a \geq r_- = \mathrm{M} - (\mathrm{M}^2 - a^2)^{1/2}$$

なので $a \geq r_-$ である．□

外部極軌道の存在は，カーター定数 $\mathcal{K}$ の 2 個の臨界値から分かる．そのうちの 1 つが次の命題で与えられる．

命題 4.13.3　遅速カー・ブラックホールの極ポテンシャル $\Phi_{\mathcal{K}}$ において，カー・パラメータ M, a のみに依存する数値 $r_d > 3\mathrm{M}$, $\mathcal{K}_d > 0$ が，次の条件を満たすように一意に定まる．

1. もし $\mathcal{K} < \mathcal{K}_d$ ならば，$\Phi_{\mathcal{K}}$ は $r > r_+$ で単調増加である．
2. もし $\mathcal{K} = \mathcal{K}_d$ ならば，Φ_d は $r = r_d$ 以外の $r > r_+$ で単調増加である．$r = r_d$ では，$d\Phi_d/dr$ が重解を持つ．
3. もし $\mathcal{K} > \mathcal{K}_d$ ならば，$\Phi_{\mathcal{K}}$ は危点 r_u と r_s (前述の記号である) を持つ．ここに，r_z を多項式 Z の最大解 (つまり $2\mathrm{M} < r_z < 3\mathrm{M}$) として $r_z < r_u < r_d < r_s$ である．さらに，$\mathcal{K} \to \infty$ のとき，$r_u \to r_z$ かつ $r_s \to +\infty$ となる．

証明　前に定義した多項式 Z と W の零点を考える．デカルトの符号規則から，Z の方程式は，最大 2 個の正の解をもつ．いま Z を $r^2(r-3\mathrm{M}) + a^2(r+\mathrm{M})$ と書くと，$r > 3\mathrm{M}$ で $Z > 0$ であることが分かる．ところで，$Z(0) = \mathrm{M}a^2 > 0$, $Z(2\mathrm{M}) = \mathrm{M}(3a^2 - 4\mathrm{M}^2) < 0$ (遅速カー時空の場合), $Z(3\mathrm{M}) = 4\mathrm{M}a^2 > 0$ である．よって，Z の方程式はちょうど 2 個の正数解を持つ．その 2 個を，r_σ, r_z と書き，$0 < r_\sigma < 2\mathrm{M} < r_z < 3\mathrm{M}$ が成立しているとする．

同様にして，W の方程式も最大 2 個の正数解を持つ．そして，$W(0) > 0$, $W(a) = 2a^3(a-\mathrm{M}) < 0$, $W(\mathrm{M}) = (\mathrm{M} - a^2)^2 > 0$ である．ゆえに，$r > \mathrm{M}$ で $W(r) > 0$ となる．

区間 $r > r_z$ ($Z(r) > 0$ となっている) で関数 $K(r) = rW/Z > 0$ を考える．この区間では $W > 0$ でもあるから $K > 0$ となる．上記で定義した多項式 N を，r と $\mathcal{K}$ の関数と考える．そうすると

$$\mathcal{K} = K(r) \Leftrightarrow N(r, \mathcal{K}) = 0 \Leftrightarrow r \text{ は } \Phi_{\mathcal{K}} \text{ の危点}$$

となる．いま r_z で $W > 0$ であるから，$r \to r_z$ のとき $K(r) \to +\infty$ となる．Z と W は共に，3 次多項式であるから，$r \to \infty$ のとき $K(r) \to +\infty$ となる．よって K は最小値を持つ．最小を与える点を r_d とし，最小値 $K(r_d)$ を $\mathcal{K}_d$ と置く．よって，$\mathcal{K} > \mathcal{K}_d$ の所で引いた水平線は，K のグラフと $r > r_z$ で少なくとも 2 回交わる．この交点が N の解であるから，ちょうど 2 回である．ところで，Φ は，$r > r_+$ で最大 2 個の危点を持ち，r_+ 以上では増加している．よって，この命題の主張は証明された．
□

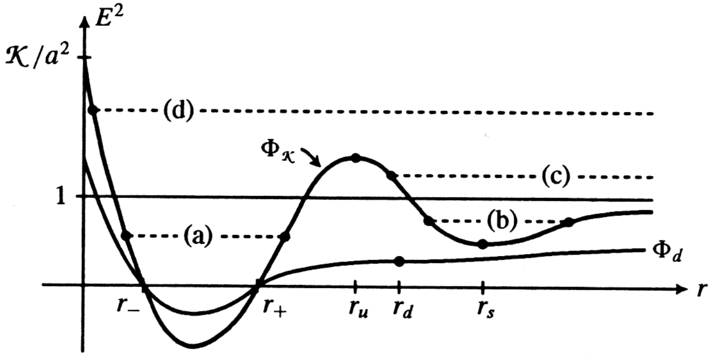


図 4.22　極ポテンシャルのグラフ (比率は変えてある). ポテンシャル Φ_d は, r_d で 2 重の危点を持つ. $\mathcal{K} > \mathcal{K}_d$ においては, $\Phi_{\mathcal{K}}$ は, r_u で最大値を取り (不安定球軌道), r_s で最小値を取る (安定球軌道). 点線は極測地線の r 区間を表している. その軌道は, 大有界軌道 (a), 外部有界 (b), 外部フライバイ (c), 長いフライバイ (d) である. $\Phi_{\mathcal{K}}(r_u) < 1$ においては (c) の場合は生じない.

注意 4.13.4　$\mathcal{K}$ の臨界値は次のようになる.

1. $\mathcal{K}_d$ と r_d に関する式の形を見るため, $N_{\mathcal{K}}(r)$ を $(r-r_d)^2$ で割った余りを $Ar+B$ と置く. このとき, 方程式 $A=0$, $B=0$ は, M と a の式で, r_d と $\mathcal{K}_d$ について解くことができる. 例えば, $\mathrm{M}=1$, $a^2=0.84$ ならば, $\mathcal{K}_d \approx 12.114$, $r_d \approx 5.411$ となる (そして, Z の最大解は $r_z \approx 2.539$ である).

2. $\mathcal{K}$ のもう 1 つの値は, カー外部におけるフライバイ軌道の存在をつかさどるものである. 明らかに, (図 4.22 のように) $\Phi_{\mathcal{K}}(r_u) > 1$ のときにはフライバイ軌道が存在し, $\Phi_{\mathcal{K}}(r_u) < 1$ では存在しない. この 2 つの場合を分けているのが, $\Phi_{\mathcal{K}_1}(r_u) = 1$ を満たす唯一の定数 $\mathcal{K}_1$ である. つまり, 球軌道が周辺脱出エネルギーを持つ場合である. r_u に対応する値を r_1 と置く. K_1, r_1 に関する式は, $\Phi_{\mathcal{K}}(r)=1$, $N=0$ を解くことで得られる. 例えば, $\mathrm{M}=1$, $a^2=0.84$ のときは, $K_1 \approx 15.886$, $r_1 \approx 3.504$ となる. ∥

以上から, さまざまな極軌道を述べることができる.

場合 1. $\mathcal{K} < \mathcal{K}_d$ のとき. 外部軌道は存在しない. 脱出エネルギーを持つ軌道は長いフライバイ軌道となる. 脱出エネルギーよりも小さいエネルギーを持つ場合は, 大有界軌道で $0 < r_{\min} < r_- < r_+ < r_{\max}$ となる. 後者の場合, $E=0$ ならばタイム

トラベラーとなる．E^2 が 0 から 1 (極限値) へ増大すると，$r_{\min}$ は r_- から減少し，$r_{\max}$ は r_+ から $+\infty$ へと増大する．

場合 2. $\mathcal{K} = \mathcal{K}_d$ のとき．場合 1 と同様である．ただし，$r = r_d$ で不安定球軌道が生じる．

場合 3. $\mathcal{K}_d < \mathcal{K} < \mathcal{K}_1 \Leftrightarrow E_u^2 = \Phi_{\mathcal{K}}(r_u) < 1$ のとき．場合 4 と同様である．ただし，外部フライバイ軌道は存在せず，異なる 2 つの大有界軌道が存在する．

場合 4. $\mathcal{K}_1 < \mathcal{K} \Leftrightarrow E_u^2 = \Phi_{\mathcal{K}}(r_u) > 1$ のとき．図 4.22 のように，いろいろなタイプの軌道が存在する．(a) $E^2 < E_u^2$ かつ $r(0) < r_u$ ならば大有界軌道となる．(b) $E_s^2 \leq E^2 < 1$ かつ $r(0) > r_u$ ならば外部有界軌道となる．(c) $1 \leq E^2 < E_u^2$ ならば外部フライバイ軌道となる．(d) $E^2 > E_u^2$ ならば長いフライバイ軌道となる．これまでと同様に，$r = r_u$ の不安定球軌道の近くに漸近的軌道がある．

一般的な場合とは異なり，極測地線では，球の半径を求め (多項式 N の解である)，その第 1 積分を求めることは容易である．実際，命題 4.13.3 の証明から，全ての $r > r_z$ に対して，半径 r で定数 $\mathcal{K} = K(r) = rW/Z$ を持つ球極軌道が存在することが分かる．r における球軌道が必要とするエネルギーは $E^2 = \Phi_{\mathcal{K}}(r)$ をみたし，$\Phi_{\mathcal{K}}$ の定義を使って $\mathcal{K}$ を除くと

$$E^2 = r\Delta^2/(r^2 + a^2)Z$$

となる (Stoghionidis and Tsoubelis 1987 を見よ)．また，Q は $\mathcal{K} = Q + a^2E^2$ から推論できる．ここに $\mathfrak{q} = -1$, $L = 0$ であるから，これで，全ての第 1 積分が決定された．

もちろん，4.8 節の $r - L$ 図において，極軌道の r 区間は r 軸に入っている．この区間は，球軌道の位置を決めれば，それの軌道タイプが変化する場所となり，こまかく設定することができる．球極軌道は，$r - L$ 図において，r 軸が曲線 $R = 0$ に接する点を決めることで決定される．前述の結果 (瘤が存在しないという命題 4.13.3 の結果である) を使えば，これらは外部 $r > r_+$ にあり，定数 $\mathcal{K} > \mathcal{K}_d$ を持つ．r 軸が接する点により，($E > 0$ のとき) 次のような 4 つの可能性がある．(参照している図では r 軸が接しているようには描いてない.)

- 不安定の場合．(1) 北大陸 $\mathcal{N}$ の南端 (図 4.9)．(2) 港湾へ入る所の北側の〈岬〉(図 4.12)．
- 安定の場合．(3) 港湾の北側の岸 (図 4.12)．(4) 湖の北側の岸 (図 4.15)．

これ以外の水平線の接線は，瘤が無く，南側の接線が中央線の下にある (つまり，r 軸の下になっている) ので r 軸に届かない．これらの各場合は，関数 Q_+, Q_- と Q の比較であるから，図 4.8 のように，e–Q 座標を使って計算することができる．先ず，

不安定球極軌道について調べる．いま，$\mathcal{K}$ が $\mathcal{K}_d$ から増加すると，対応する球の半径 r_u は，港湾の北岬にある．$\mathcal{K}$ が増加して $\mathcal{K}_1$ を越えると，軌道は脱出エネルギーを得，北岬の南端．安定球軌道は脱出エネルギーを持つことはない (図 4.22 を見よ). $\mathcal{K}_d$ の近くの $\mathcal{K}$ では，安定軌道の半径 r_s は，最初は港湾の 北岸にある．$\mathcal{K}$ が増大するにつれ，港湾の入り口は細くなり，r_u は，湖となった北岸に存在することになり，そのままそこにある．

極測地線は相対的に簡単なので，経度方向のふるまいを調べることができる．とくに，ボイヤー－リンキスト座標が成立する外部軌道について計算することができる．命題 4.1.5 の方程式において $L=0$ とすると $\rho^2\varphi' = 2\mathrm{M}raE/\Delta$ となる．カー外部では，r と Δ は正であるから，φ' はゼロにならない．したがって，経度方向の転回点は存在しない．実際，$E>0$ とすると，有界軌道で $0<A\leq\varphi'\leq B<\infty$ となる．しかるに，非有界軌道では，$r\to\infty$ のとき $\varphi'\to 0^+$ となる．したがって，γ が，地平面の周りを極から極へ運動すると，次第に，ブラックホールの源の回転方向へ引きずられていくのである．

この間，γ のボイヤー－リンキスト時間 t は

$$\rho^2 t' = EA(r,\vartheta)/\Delta$$

によって増大する．ここに

$$A(r,\vartheta) = (r^2+a^2)\rho^2 + 2\mathrm{M}ra^2S^2 > 0$$

である．よって，ボイヤー－リンキスト座標の定常的オブザーバーは，経度方向の回転の時間の進み具合を $d\varphi/dt = (\varphi'/t') = 2\mathrm{M}ar/A(r,\vartheta)$ と観測する．

この時間の引きずりを計算するため，ϑ と第 1 積分 φ を使い，

$$\Theta = Q + (E^2-1)a^2C^2$$

として

$$d\varphi/d\vartheta = \varphi'/\vartheta' = 2\mathrm{M}aEr/(\Delta\sqrt{\Theta})$$

となる．

球軌道の場合には，この方程式は楕円積分を用いて解くことができる．安定球軌道では $E^2-1<0$ であるから，ϑ 座標を緯度 $\theta = \frac{1}{2}\pi - \vartheta$ で置き換えて，$S=\sin(\vartheta)=\cos(\theta)$, $C=\cos(\vartheta)=\sin(\theta)$ となる．よって，$\Theta(\theta) = Q - a^2(1-E^2)\sin^2\theta$ で，定数 $r=r_0$

に対して，この方程式は

$$\begin{aligned}\varphi(\theta) &= \varphi_0 + \frac{2\mathrm{M}aEr_0}{\Delta_0}\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{\Theta(\theta)}} \\ &= \varphi_0 - (2\mathrm{M}aEr_0/(\Delta_0\sqrt{Q}))\,F(\theta,k)\end{aligned}$$

なる解を持つ．ここに F は，$0 < k^2 = a^2(1-E^2)/Q < 1$ なる k を母数とする第 1 種楕円積分である．

したがって，ϑ が 0 から 2π まで〈1 回転〉変化する間に生じるボイヤー－リンキスト座標の経度方向の変位 $\Delta\varphi$ により，極測地線 γ の引きずりを計測することができる．このとき，γ は，$\varphi \to \varphi + \Delta\varphi$ という回転で ($\tau \to \tau + \Delta\tau$ なる変数変換をしなければ) 不変である (図 4.23 を見よ).

補題 4.13.5　時間的球極測地線γ の半径を $r_0 = r_s$ とする．もし $E^2 < 1$ ならば，1 回転の間に生じる経度方向の増加は

$$\Delta\varphi = (8\mathrm{M}aEr_0)/(\Delta_0\sqrt{Q})\,K(k)$$

である．ここに，$K(k) = F(\pi/2, k)$ は，$0 < k^2 = a^2(1-E^2)/Q < 1$ なる第 1 種完全楕円積分である (Stoghianidis and Tsoubelis 1987).

図 4.23 は，このような球軌道が 2 回転した状態を表している．この図において，カー外部のボイヤー－リンキスト座標をユークリッド球座標と見なしている (注意 1.7.2 を参照せよ). 上に述べたように，半径 r_0 を決定すれば第 1 積分が求まる．

このような極軌道は，(非相対論的な) 地球の回転軌道に対比させることができる．地平面 $r = r_+$ を周回して変位することが，地球の公転がケプラー軌道を描くことに相当するのである．

図 4.24 は非球軌道の近くを表している．この軌道に相当するケプラー軌道は xz 平面の楕円である．シュワルツシルド・モデルの場合には，軌道は，もちろん相対性理論に従った軌跡 (例えば，水星の近日点の移動) となるが，1 つの平面上にある．しかしながら，カー・モデルの場合には，経度方向に引きずられていくのである．

図 4.23 の球軌道を図 4.8 の e–Q 座標で調べてみる．この軌道の場合，$e = E^2 - 1 \approx -.0863 > -1/9$, $Q \approx 14.171$ である．4.7 節の式 $Q_\pm$ の値は $Q_+(e) \approx 13.046$, $Q_-(e) \approx 14.219$ となる．したがって，この座標で，r–L 図が湖を含む $d > 0$ なる範囲 (この場合，r 軸は 北岸に接している) に (e, Q) は存在する．図 4.24 の非球軌道では，r 軸が，図に記した r 区間内で湖を横切っている．

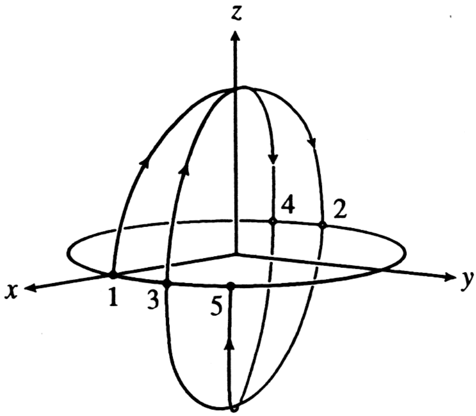


図 4.23　半径 $r = 10$ の時間的球極軌道．1, 2, 3 と 3, 4, 5 の 2 回転が表示してある．引きずられる角度は，$\angle 1o3$, $\angle 3o5$ で $\Delta\varphi \approx 21^\circ$ である (ここに o は原点を表す)．この場合，M $= 1$, $a = 0.84$ ゆえ $r_d \approx 5.4 < 10$ である．また，$E \approx .956 < 1$, $\mathcal{K} \approx 14.939$ ゆえ $Q \approx 14.126$ で，この軌道は安定である．(Stoghianidis and Tsoubelis 1987 を参照せよ.)

図 4.23 の球軌道では，エネルギーは $E^2 < 1$ で脱出エネルギーより小さい．よって，安定，不安定の両方を取りうる．また $E^2 \geq 1$ ならば (つまり，軌道は不安定), θ への変換は必要ない．特に，$E^2 = 1$ のとき

$$\varphi(\vartheta) = \varphi_0 + (2\mathrm{M}aEr_0/(\Delta_0\sqrt{Q}))\vartheta$$

となる．もし $E^2 > 1$ ならば，

$$k^2 = a^2(E^2 - 1)/(\mathcal{K} - a^2) < 1$$

で

$$\varphi(\vartheta) = \varphi_0 + 2\mathrm{M}aEr_0/\left[\Delta_0(\mathcal{K} - a^2)^{1/2}\right] F(\vartheta, k)$$

である．明らかに，質的には，これらの軌道は図 4.23 の $E^2 < 1$ の場合と等しい．

次に，カー外部のフライバイ極軌道について調べる．この場合 $\mathcal{K} > \mathcal{K}_1$ で，エネルギーの値は $1 < E^2 < \Phi_{\mathcal{K}}(r_u)$ を満たす範囲にある．どのフライバイ軌道でもおなじことだが，$r \gg 1$ では，カー時空はおおむねミンコフスキー時空と見なすことができるので，軌道はほとんど直線に一致する．E^2 の値が小さいときには，軌道はほとん

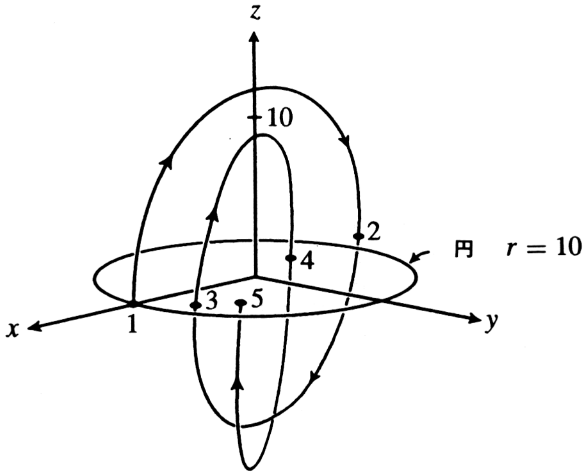


図 4.24　カー外部の有界極軌道．図の黒点は，軌道と赤道平面の交点を表している．エネルギーのパラメータは $E = .957$ で，図 4.23 の場合よりわずかに大きくなっている．他のパラメータの値は図 4.23 の場合と同じである．いまの場合は，半径 $r_s = 10$ を r 区間 $8.35 \leq r \leq 12.16$ に置き換えてもよい．

どケプラーの (軸を通る) 双曲線軌道と等しくなっている．ただし，内向きの辺に対し，外向きの辺がカー回転の方向に引きずられている．このやや相対論的な軌道は，自然に，軸とちょうど 2 回交わる．しかし値が大きくなると，軸と交わる回数は，無限大へと増えていく．図 4.22 から分かるように，$E^2 = \Phi(r_u)$ では，$r = \infty$ から来る極測地線は，漸近的に，(図 4.23 のような) 半径 r_u の不安定球軌道に近づく．よって，E^2 が $\Phi(r_u)$ に近いほど，軌道は軸と何回も交叉するのである．自由落下している粒子が軸とちょうど 4 回交叉する状態を**直観的に**思い浮かべることは容易ではない．この状態を表したのが図 4.25 である．

大有界軌道を持つ極測地線では，1 つで軌道全体を覆う経度の関数が存在しないので，経度方向の動きを調べるのが困難になる．このような測地線 γ では必然的にエネルギーが脱出エネルギー未満なので，γ を，$r'(s_0) < 0$ かつ $0 < E < 1$ を満たし，K^* 細片の外部 (ブロック I) からスタートする標準的な粒子と考えてよい．いま $\mathbb{P}(r_\pm) = (r^2 + a^2)E \neq 0$ であるから，γ が横切る最初の地平面は K^* の短い地平面である．よって，先ず，カー・スター座標の経度関数 φ^* から始めることにする．い

ま $L=0$ で上記のように符号をとれば，系 4.3.2 の φ^* に関する第 1 積分は

$$\rho^2\varphi^{*\prime} = (a/\Delta)[\,2\mathrm{M}Er - \sqrt{R}\,]$$

となる．この式は，外部の場合と，曲率の項が違っている．この違いは，(前の定理より) γ が地平面と交わる状況で φ^* が定義されていることから生じている．ブロック III の $r_{\min}$ における r 転回点を超えると，γ は $^*K$ 細片へ入る．それで，$\oplus$ と $sgn(r')$ 両方の符号が変わるので，微分方程式自体は上記と同じになる．もちろん，φ^* は $^*\varphi$ に置き換わる．γ の大域的な軌跡は，この 2 つの状況の繰り返しで作られている (図 4.20 を見よ).

明らかに，$r_{\min}$ と $r_{\max}$ では，$R=0$ なので，$\varphi^{*\prime}>0$ である．しかし外部の場合では φ が狭義単調であったが，いまの φ^* の場合には転回点がある．

補題 4.13.6　γ が大有界極軌道を持つとする．γ は地平面 $r=r_\pm$ と交わるから $\rho^2\varphi^{*\prime}=a[\,-E+k/(2E)\,]$ となる．ここに $k=({r_\pm}^2+\mathcal{K})/({r_\pm}^2+a^2)>1$ である．

証明　いま $L=0$ であるから

$$R = \mathbb{P}^2 - \Delta(\mathcal{K}+r^2) = (r^2+a^2)^2E^2 - \Delta(\mathcal{K}+r^2)$$

である．よって，$\Delta\to 0$ のとき 2 項定理から $\sqrt{R}$ を

$$(r^2+a^2)E - \Delta(\mathcal{K}+r^2)/[2(r^2+a^2)E]$$

で置き換える．したがって，$r\to r_\pm$ のとき $N/\Delta=[2\mathrm{M}Er-\sqrt{R}]/\Delta$ は極限値

$$\begin{aligned}(N/\Delta)|_{r_\pm} &= \big[2\mathrm{M}r_\pm E - ({r_\pm}^2+a^2)E + \Delta(\mathcal{K}+r^2)/(2({r_\pm}^2+a^2)E)\big]/\Delta \\ &= -E + (\mathcal{K}+{r_\pm}^2)/(2({r_\pm}^2+a^2)E) \\ &= -E + k/(2E)\end{aligned}$$

に近づく．□

いま，$r_{\min}$ と $r_{\max}$ で $\rho^2\varphi^{*\prime}$ は正であるから，第 1 積分を適当にとれば，φ^* の転向点は，$r_{\min}<r<r_-$, r_-, $r_-<r<r_+$ (ブロック II), r_+, $r_+<r<r_{\max}$ となる．ここに，$r^2\varphi^{*\prime}$ (それに $\varphi^{*\prime}$) は，r_- における値の方が r_+ における値よりも大きくなっている．

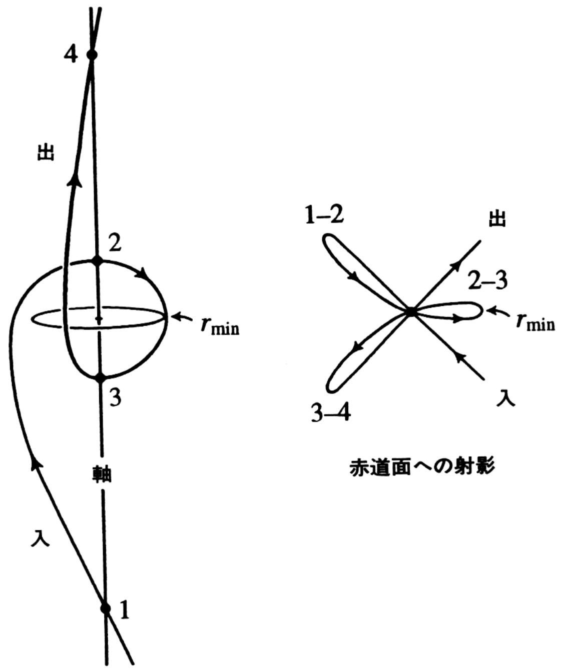


図 4.25　軸と 4 回交わる時間的フライバイ極軌道. (パラメータ値は M $= 1$, $a^2 = .84$, $\mathcal{K} = 25 > K_1 \approx 15^+$, $E^2 = 1.13456$ で $\Phi_{\mathcal{K}}(r_u) \approx 1.3484$ に十分近い.) 軸と交わる遠い方の位置 1, 4 は $r \approx 18.7$ で, 内側の方の位置 2, 3 は $r \approx 3.6$ で $r_{\min} \approx 3.14$ である.

$\varphi^{*\prime} = 0$ の場合は, 分子 $N = 2\mathrm{M}Er - \sqrt{R}$ がゼロとなる. よって $R - 4\mathrm{M}^2E^2r^2 = 0$ であり, r が $r_{\max}$ から $r_{\min}$ へ運動する間に, $\varphi^{*\prime}$ は最大 4 個の転回点を持つ.

補題 4.13.7　大有界極軌道を持つ時間的測地線を γ とする. このとき, $r(s)$ が $r_{\max}$ から $r_{\min}$ (あるいは $r_{\min}$ から $r_{\max}$) へ運動する間に, $\varphi^{*\prime} = d\varphi^*/d\tau$ は符号を最大 2 回変える.

証明　前と同じように φ^* の方程式を $\rho^2\varphi^{*\prime} = aN/\Delta$ と書く. ここに, $N = N(r) =$

$2\mathrm{M}Er - \sqrt{R}$ で

$$R = \mathbb{P}^2 - \Delta(\mathcal{K} + r^2) = (r^2 + a^2)^2 E^2 - \Delta(\mathcal{K} + r^2)$$

である．半径 r の所で $\varphi^{*\prime} = 0$ となる必要条件は $N(r) = 0$, すなわち $R - 4\mathrm{M}^2 E^2 r^2 = 0$ である．この多項式の次数は 4 次であるから，N は最大 4 個の零点を持つ．実際デカルトの符号規則から，0 個，2 個，あるいは 4 個の零点を持つ．しかるに，0 個ということはない．なぜなら，r_- と r_+ は N の零点になっている．実際，

$$N(r_\pm) = 2\mathrm{M}Er_\pm - ({r_\pm}^2 + a^2)E = \Delta(r_\pm)E = 0$$

である．

次に，$\Delta'(r_\pm) \neq 0$ であるから，ロピタルの定理から，$r_\pm$ が N の単純零点なら，そこで $\varphi^{*\prime} = 0$ である．もし N が $r_\pm$ で 2 重零点となるなら，φ^* は狭義の転回点を持つ．つまり，$\varphi^{*\prime} \sim N/\Delta$ が符号を変えるのである．(N は，$r_\pm$ で最大 3 重の零点を持つから，$r_\pm$ で $\varphi^{*\prime} = 0$ となるが，符号は変更されない.)

式 $\varphi^{*\prime}$ (あるいは同じことだが N/Δ) の零点を調べるため，$r_\pm$ での N の零点が単純だとする．つまりその点で $N/\Delta \neq 0$ である．よって，点 $r_\pm$ 以外では，N の零点の個数は 0 か 2 である．Δ がゼロとなるのは $r_\pm$ のみであるから，N/Δ の零点の個数は 0 か 2 である．2 個の零点が異なるならば，$\varphi^{*\prime}$ は 2 度符号を変えることになる．そうでなければ，φ^* はそこで止まるが，単調関数であることは変わりない．

次に N が r_- で 2 重の零点を持つとする．このとき，$N/\Delta = 0$ はそこで単純零点となる．補題 3.13.6 より，r_+ における N/Δ の値は r_- における値よりも小さい．よって N/Δ は r_+ で負であり，N はそこで単純零点を持つ．つまりもう 1 つ (単純) 零点があるので，$\varphi^{*\prime}$ は 2 度符号を変えるのである．N が r_+ で 2 重の零点を持つ場合も同様である．

もし N が，地平面の半径の 1 点，例えば r_- で 3 重の零点を持つならば，r_+ では単純零点となる．よって $\varphi^{*\prime}$ は単純累次零点を持ち，φ^* は単調関数である．□

大極軌道に乗っている観測者が不注意ならば，外部軌道に乗っている場合とは違い，地平面を通って半径の距離を行き来しているように感じるかもしれない．もちろん実際は，毎度別な地平面を通過しているのであり，過去のボイヤー－リンキスト・ブロックに戻ることはないのである．

4.14 赤道測地線

カー時空の研究が始まった当初は，赤道平面の測地線が注目されていた．これは，事実上赤道平面上にあることになるシュワルツシルド時空の測地線と比較し，カー時空の回転の特徴を際立たせるためであった．そして今でも，赤道平面は，カー測地線の一面を具体的に調べるのに都合のよい場所であることは変わりない．赤道平面上にあるため $Q = 0$ と簡単になる (系 4.5.7) ことを使い，3 つの因果的特性それぞれを持つ測地線について調べることにする．

前に述べたように，赤道平面 Eq はリング状特異領域 $r = 0$ によって分けられている．そして，$r > 0$ の側，Eq^+, は連結であるが，$r < 0$ の側，Eq^-, は無限に多くの連結成分を持っている (図 3.16 を見よ). Eq のバンドル構造において円が 2 次元球に置き換わり，水平成分は (時間軸全体を通して) 円になっている．よって，r が一定である測地線は**円状** (circular) である．

赤道平面上の測地線の全体は，カーター定数が $Q = 0$ を満たす測地線全体のクラスの一部になっている．下記の式でも $Q = 0$ を仮定している．しかしながら，この節の最後で述べるように，軌道の性質に関しては，赤道平面上にある場合とない場合では大きな差異が存在する．

系 4.14.1　測地線 γ が $Q = 0$ を満たすなら，$R(r) = r\psi(r)$ である．ここに，関数 ψ は

$$\begin{aligned}\psi(r) &= (E^2 + \mathfrak{q})r^3 - 2\mathrm{M}\mathfrak{q}r^2 + (a^2(E^2 + \mathfrak{q}) - L^2)r + 2\mathrm{M}(L - aE)^2 \\ &= E^2 r^3 + (a^2E^2 - L^2)r + 2\mathrm{M}(L - aE)^2 + \mathfrak{q}r\Delta\end{aligned}$$

である．

いま $Q = 0$ とすると，$r - L$ 図は E のみで決定される．よって，e–Q 座標 (図 4.8) から，時間的 $r - L$ 図は港湾形か大陸形であることが分かる．

多項式 $R(r)$ は $r = 0$ でゼロとなる．そうでなければ，ψ と R は同じ零点，同じ累次零点を持つ．これまでと同じように，測地線 γ の r 座標は，$R(r) \geq 0$ となる区間に制限されている．明らかに，$r > 0$ では $R = r\psi$ の符号と ψ の符号が同じであり，$r < 0$ では異なっている．よって，$r - L$ 図において，$\psi < 0$ **である領域は** $r > 0$ **において禁止領域で，**$r < 0$ **において許容領域である**. これまでと同様に，$E \neq 0$ で符号を選択する必要がある場合には，$E > 0$ を採用する．$r - L$ 図では，赤道平面で，

$r=0$ が (時空の一部ではなく) リング状特異領域を表す場所と，咽喉 $T\colon r=0$ として ボイヤー－リンキスト・ブロック Ⅲ の超曲面になっている場所は明確に区分けできる．

Eq^- における軌道タイプは次のように述べることができる．

補題 4.14.2　Eq^- における，零的，あるいは $L=aE$ を満たす空間的測地線はリング状特異領域と交わり，衝突・脱出軌道を持つ．それ以外は全てフライバイ軌道を持つ．

証明　命題 4.8.2 によれば，Eq^- における全ての時間的測地線はフライバイ軌道を持つ．そこで，γ は零的，あるいは空間的であるとする．系 4.6.7 で示したように，$r<0$ の測地線は高い回転エネルギー $a^2(E^2+\mathfrak{q})>L^2$ を持ち，それゆえ，脱出エネルギー $E^2+\mathfrak{q}>0$ を持つ．

もし $L\neq aE$ ならば，上記の式より $R(0)=0$, $(dR/dr)(0)=2\mathrm{M}(L-aE)^2>0$ となる．よって，小さい $r<0$ に対して $R(r)<0$, $|r|$ が大きければ $R(r)>0$, となる．デカルトの符号規則より，$R(r)$ は $r<0$ に解を 1 個だけ持つ．よって，このような測地線はフライバイ軌道を持つ．

次に $L=aE$ とする．Eq の測地線では，この仮定は γ が主要測地線であることを示している (4.5 節の最後の証明の所を見よ). $L=aE$ のとき，上記の $R(r)$ の式は

$$R(r)=(E^2+\mathfrak{q})r^4-2\mathrm{M}\mathfrak{q}r^3+\mathfrak{q}a^2r^2=r^2(E^2r^2+\mathfrak{q}\Delta)$$

となる．ここで $\mathfrak{q}\geq 0$ であるから，$r<0$ に対して $R(r)>0$ となる．もし γ が零的であるならば，前に見たように，Eq の主要零的測地線は衝突・脱出軌道タイプとなる．もし γ が空間的 ($\mathfrak{q}=+1$) ならば，$|r|$ が小さいとき $R(r)$ の次数は r^2 としてよい．Eq において $r-$方程式は $r^4r'^2=R(r)$ となるから，$r=0$ の近くでは $r^2r'^2\approx 1$ となる．よって，$r(s)$ は，有限のパラメータ区間において $r=0$ に近づく．つまり，γ はリング状特異領域と交わるのである．□

このように，赤道面の〈ホワイトホール〉側 Eq^- では，Σ へ向かう測地線のうち，零的あるいは空間的主要測地線のみが Eq^- と交わるのである．

$r>0$ の側，つまり Eq^+ では，帯 $0<r<r_-$ において，一般的な $Q\neq 0$ の状態から一番大きく変化する．$Q\neq 0$ の $r-L$ 図では,〈岸〉が粒子を咽喉 $r=0$ から，よってリング状特異領域 から，隔てている (例えば，図 4.9, 図 4.12 などを見よ). しかしながら，$Q=0$ では，(上に述べたように) $R(0)=0$ で $(dR/dr)(0)=2\mathrm{M}(L-aE)^2\geq 0$ ゆえ，岸はほとんどなくなり，点 $(0,aE)$ の近く以外では，$r=0$ の近くの Eq^+ 内の

領域は許容領域となる．この点 $(0, aE)$ は，明らかに $R(r, L)$ の危点であるから，この近くの領域が許容領域になるか禁止領域になるかは，第 1 積分の変化に微妙に依存している．

次数 4 の多項式を判別式 ψ に置き換えてもよいから，水平線と Z との交点は最大 3 個である．

4.7 節で述べたことを，次のように簡単に言い換えることができる．

系 4.14.3　γ を，$Q = 0$ を満たす測地線とし，ψ を，系 4.14.1 で定義した関数とする．

(1) L の多項式として

$$\psi(r, L) = (2\mathrm{M} - r)L^2 - 4\mathrm{M}aEL + \psi_0(r)$$

が成立する．ここに，

$$\psi_0(r) = \psi(r, L = 0) = E^2\left[r^3 + a^2 r + 2\mathrm{M}a^2\right] + \mathbf{q} r\Delta(r)$$

である．

(2) もし $r \neq 2\mathrm{M}$ ならば，L の多項式としての ψ の判別式は $4D(r)$ である．ここに，

$$D(r) = r\Delta(r)\left[E^2 r + \mathbf{q}r - 2\mathrm{M}\mathbf{q}\right]$$

である．

(3) $\psi(r, L)$ (つまり $R(r, L)$) の零点の集合 Z は，$D(r) \geq 0$ となる最大 r 区間で定義された 2 個の関数

$$L_{\pm}(r) = \frac{2\mathrm{M}aE \pm \sqrt{r\Delta[E^2 r + \mathbf{q}r - 2\mathrm{M}\mathbf{q}]}}{2\mathrm{M} - r}$$

のグラフである．

このように，R を ψ へ還元すると，4.7 節で述べた判別式の多項式 ϕ は線形表現 $E^2 r + \mathbf{q}r - 2\mathrm{M}\mathbf{q}$ に置き換わることになる．4.7 節で述べたように，水平線 $L \to (r, L)$ 上で $R = 0$ となる点の個数 1, 2, 3 が $D(r)$ の符号 $(-, 0, +)$ で分かるので ($r \neq 2\mathrm{M}$ の場合), 判別式が集合 Z の形を決めるカギになっているのである．

例外直線 $r = 2\mathrm{M}$ では，$E > 0$ のとき，関数 $L \to \psi(2\mathrm{M}, L)$ は負の傾きを持つ直線になることを前に示してある．よって，L が増えるにしたがって，直線 $r = 2\mathrm{M}$ は $L_{2\mathrm{M}} = \psi(r, 0)/(4\mathrm{M}aE)$ における禁止領域入り，そこに留まっている．($E = 0$ のときには，ψ は $r = 2\mathrm{M}$ で一定である.)

命題 4.14.4 $Q=0$ で，$E^2+\mathfrak{q}\neq 0$, $E\neq 0$ を満たす $r-L$ 図において，Z の点 (r,L_r) を含む垂直線は，$r=0$, r_-, r_+, 2M, あるいは $w=2\mathrm{M}\mathfrak{q}/(E^2+\mathfrak{q})$ のみである．対応する角運動量は，$r=2\mathrm{M}$ のとき (上記のように) L_{2M} で，他の場合は $L_r=2\mathrm{M}aE/(2\mathrm{M}-r)$ である．つまり詳しく書けば

$$L_0=aE,\quad L_\pm=2\mathrm{M}aE/r_\mp,\quad L_w=a(E^2+\mathfrak{q})/E$$

である．

証明 $r\neq 2\mathrm{M}$ の場合，このような点が存在する必要十分条件は，判別式 $D(r)=4r\Delta(r)[E^2r+\mathfrak{q}r-2\mathrm{M}\mathfrak{q}]$ が r でゼロになることである．よって $r=0$, $r_\pm$, $w=2\mathrm{M}\mathfrak{q}/(E^2+\mathfrak{q})$ を得る．L_r の一般式は 2 次式として計算できる。そこで特に，$2\mathrm{M}-w=2\mathrm{M}E^2/(E^2+\mathfrak{q})$ であるから，$L_w=a(E^2+\mathfrak{q})/E$ となる．□

ここに，w が他の点と異なる必要はない．これらの各点において，Z は滑らかで垂直の接線を持っている．実際，例外が生じる場所は $w=0$ (γ が零的の場合) と $w=r_\pm$ (γ が空間的の場合) である．例えば図 4.26 で，$(0,a)$ が特異点となることは明らかである．空間的測地線の場合には，上の式から，$r=r_\pm$ で特異点となることが予想される．これは，エネルギーが $r_\pm=2\mathrm{M}/({E_\pm}^2+1)$ を満たし，${E_\pm}^2=r_\mp/r_\pm$ となる場合である．そして，両方の場合に $L_\pm=2\mathrm{M}$ となる．

集合 Z の漸近線は，一般的な場合を述べた補題 4.8.3 を使い，次のようになる．

1. $L\to\pm\infty$ のとき，Z は垂直線 $r=2\mathrm{M}$ に漸近する ($E>0$ とする). $L\to+\infty$ のとき左から近づき，$L\to-\infty$ のとき右から近づく．
2. $L\to-\infty$ が脱出エネルギーを持つ場合，(4 つの象限全てで) Z は直線 $A_\pm(r)=\mp(E^2+\mathfrak{q})^{1/2}(\mathrm{M}+r)$ に漸近する．

Eq の零的測地線

零的測地線 γ においてパラメータを変更すると，同じ定数因数で L と E が変化する．したがって ($E\neq 0$ のとき), L と E を 1 つの第 1 積分 $\lambda=L/E$ で置き換えてもよい．これを γ の**衝突パラメータ** (impact parameter) と呼ぶ．例えば，γ のパラメータを変更して単位エネルギーを持つようにすれば，λ は γ の角運動量となる．よって，赤道面の零的測地線の動径運動を記述するにも，1 つの $r-\lambda$ 図で十分なのである．

系 4.14.5 と系 4.14.3 から次を得る．

系 4.14.5　$Q=0$ の零的測地線が $E \neq 0$ を満たすとき

$$\psi = R/r = r^3 + (a^2 - l^2)r + 2\mathrm{M}(l-a)^2$$

となる．零点の集合 $Z{:}\,\psi = 0$ は，2つの関数

$$\lambda_{\pm}(r) = (2\mathrm{M}a \pm r\sqrt{\Delta})/(2\mathrm{M} - r), \qquad (\Delta > 0)$$

のグラフである．

このように，帯 $0 < r < r_-$ と $r > 2\mathrm{M}$ の垂直線上にそれぞれ Z の点が2個ずつ存在する．$r = r_{\pm}$ (それに $r = 2\mathrm{M}$) 上には1個存在し，(II では転回しないから) $r_- < r < r_+$ には存在しない．前と同じ計算により，$r - \lambda$ 図は，外部 $r > r_+$ の範囲には大陸形の禁止領域 $\mathcal{N}$ と $\mathcal{S}$ があり，帯 $0 < r < r_-$ の禁止領域は〈舌〉$\mathcal{T}$ の形をしていることが分かる．これは，Boyer and Lindquist (1967) で初めて示された．$\mathcal{T}$ は，$r = 0$ の危点 $(0, a)$ から始まり，$r = r_-$ へ向かって広がり，主要直線 $\lambda = a$ ($L = aE$ に対応している) が下から $\mathcal{T}$ に接している (図 4.26 を見よ).

$\mathcal{T}$ の形を解析的に決定するために，先ず,

$$\lambda - a = (2\mathrm{M}a \pm r\sqrt{\Delta})/(2\mathrm{M} - r) - a = [ar \pm r\sqrt{\Delta})]/(2\mathrm{M} - r)$$

と書く．r が小さいときには，$\sqrt{\Delta} \approx a - \mathrm{M}r/a,\ 2\mathrm{M} - r \approx 2\mathrm{M}$ で

$$\lambda - a \approx \left[ar \pm \{ar - (\mathrm{M}/a)r^2\}\right]/2\mathrm{M}$$

となる．つまり，$(0, a)$ の近くでは，Z は直線 $\lambda - a = (a/\mathrm{M})r$ (r^2 の項を省略した) と放物線 $\lambda - a = r^2/(2a)$ により近似される．これで図 4.26 のような形になる．つまり，4.8 節で述べた卵形の議論を零的測地線で行うと $\mathcal{T}$ になるのである．

$E = 1$ であるから，漸近線は $A_{\pm} = \mp(\mathrm{M} + r)$ となり，その意味は図 4.26 で明らかである．とくに $r < 0$ においては，$d\lambda/dr$ を直接計算して，Z の2つの境界が狭義単調であることが分かる．

図 4.26 から分かるように，$r = +\infty$ から来る零的測地線 γ は，$|\lambda|$ が大きい (つまり $|L| \gg E$) のときはフライバイ軌道となり，$|\lambda|$ が小さいときにはリング状特異領域と交わる可能性が出てくるのである．ここで，舌があることから新しい状況が生じてくる．もし λ の値が主要直線 $\lambda = a$ よりもやや大きいなら，r 転回点で舌と交わる．つまり，長いフライバイ軌道となるのである．

一般の $Q > 0$ の場合とは異なり，水平方向で Z と接する直線は容易に分かる．つまり円光子であり，それゆえ，全ての零的測地線の軌道タイプを設定することができる．

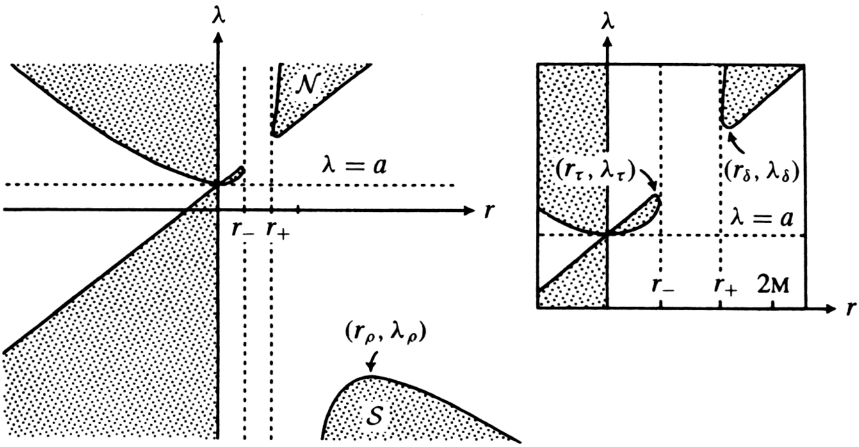


図 4.26　赤道平面零的測地線の $r-\lambda$ 図．これまでと同じように，禁止領域（$R = r\psi < 0$）は灰色で表示してある．右側の図は，舌付近の拡大図である．L 軸 $r = 0$ はリング状特異領域であり，Eq^- と Eq^+ を分断している．Boyer and Lindquist (1967) の図 8 と比較せよ．

命題 4.14.6　遅速カー赤道平面 Eq においては，静止光子を除くと，3 種類の円形零的軌道がある．$E > 0$ の場合，それらの半径と衝突パラメータは (r_τ, λ_τ), (r_ρ, λ_ρ), $(r_\delta, \lambda_\delta)$ であり，

$$0 < r_\tau < r_- < r_+ < r_\delta < 3\mathrm{M} < r_\rho < 4\mathrm{M},$$

$$\lambda_\rho < -7a < 0 < a < \lambda_\tau < 2a < \lambda_\delta$$

なる関係を満たしている．半径は多項式 $p(r) = r(r-3\mathrm{M})^2 - 4\mathrm{M}a^2$ の解であり，衝突パラメータは $q(\lambda) = (\lambda + a)^3 - 27\mathrm{M}^2(\lambda - a)$ の解である．

証明　円軌道が生じるのは，方程式 $\psi = 0$ と $\partial\psi/\partial r = 0$ の共通解 (r, λ) の所である．この後者の方程式から

$$(1) \qquad \lambda^2 = 3r^2 + a^2$$

を得る．よって，$r^2 = (1/3)(\lambda^2 - a^2)$ を

$$\psi(r, \lambda) = r^3 + (a^2 - \lambda^2)r + 2\mathrm{M}(\lambda - a)^2 = 0$$

に代入して

$$r(a^2-\lambda^2)+3\mathrm{M}(\lambda-a)^2=0$$

となる．ゆえに

$$(2) \qquad r=3\mathrm{M}(\lambda-a)/(\lambda+a)$$

となる．

この式 (1) と (2) は，半径と円光子の衝突パラメータを結ぶ基本的な関係式である．式 (2) を

$$\partial\psi/\partial r=3r^2+a^2-\lambda^2=0$$

に代入して

$$27\mathrm{M}^2(\lambda-a)^2/(\lambda+a)^2+a^2-\lambda^2=0$$

となる．主要直線 $\lambda=a$ の場合を除くため (これはよく分かっているので), この式から $\lambda-a$ を消して

$$(3) \qquad q(\lambda)=(\lambda+a)^3-27\mathrm{M}^2(\lambda-a)=0$$

となる．また，(2) 式を $\lambda=-a(r+3\mathrm{M})/(r-3\mathrm{M})$ として，これを (3) に代入して

$$(4) \qquad p(r)=r(r-3\mathrm{M})^2-4\mathrm{M}a^2$$

となる．明らかに，この多項式は，負の解を持たず，$p(0)<0$, $p(3\mathrm{M})<0$, $p(4\mathrm{M})=4\mathrm{M}^2-4\mathrm{M}a^2>0$ が成立する．$r_\pm$ に関しては

$$(5) \qquad p(r_\pm)=p(\mathrm{M}\pm(\mathrm{M}^2-a^2)^{1/2})=(\mathrm{M}^2-a^2)r_\pm>0$$

となる．上記の不等式から，$p(r)$ は 3 個の解を持つことが分かる．関数 $\lambda(r)=a(3\mathrm{M}+r)/(3\mathrm{M}-r)$ は，$r<3\mathrm{M}$ と $r>3\mathrm{M}$ で単調増加であるから，$\lambda(r_\rho)<\lambda(4\mathrm{M})$ より $\lambda_\rho<-7a$ となる．また，$\lambda(0)<\lambda(r_\tau)<\lambda(\mathrm{M})<\lambda r_\delta$ より $a<\lambda_\tau<2a<\lambda_\delta$ となる．□

零的測地線 ($E^2=1$ のもの) では，回転エネルギー $\tilde{E}=a^2(E^2+\mathsf{q})$ は a^2 となる．よって上記から，この円光子は低い回転エネルギー (定義 4.5.2) を持ち，赤道面で**安定**となる．すなわち，第 1 積分が小さく変化すれば，$|\vartheta(s)-\pi/2|$ が小さい軌道となるのである．

円光子 (circular photon) を，$r(s)$ と $\vartheta(s)$ が定数である零的測地線として定義すると，カー・ブラックホールでは，これは，(静止光子を除いて) Eq_+ 内に 3 個存在するだけである．このことは，4.6 節で ϑ が定数の場合を調べれば示すことができる．

注意 4.14.7(シュワルツシルド時空の場合)　命題 4.14.6 で $a = 0$ と置くとシュワルツシルド時空の場合となる．この場合，$r = 0$ が中心の特異点であり，円光子の軌道が存在するのは $r = 3\mathrm{M}$ の所だけである．また，順行，逆行の衝突パラメータは $\lambda = \pm 3\sqrt{3}\mathrm{M}$ となる．球対称性から，1 つしかないシュワルツシルド地平面 $r = 2\mathrm{M}$ の外側では，このような軌道が空間球を埋め尽くすことが分かる．カー回転ではこれらの状況はなくなり，Eq^+ において，外部の円光子は (順行，逆行とも), $r_+ < r_\delta < 3\mathrm{M} < r_\rho < 4\mathrm{M}$ という異なる半径を持っている．また，地平面 $r = r_-$ の内側では，$r = r_\tau$ が軌道となる．‖

円光子を零的 $r - \lambda$ 図に描けば，赤道面零的軌道タイプは簡単に説明することができる．明らかに，トランジット・タイプは存在せず，主要零的測地線はリング状特異領域と交わることが分かる．補題 4.14.2 より，Eq^- では，主要でない測地線はフライバイ軌道を持つことが分かる．Eq^+ では，命題 4.14.6 から，円軌道を除き，有界零的軌道は存在しないことが分かる．また $E \neq 0$ では，残りのフライバイ軌道と衝突軌道を，次のように，衝突パラメータで特徴づけることができる．

1. フライバイ軌道 (r が大きいとき), あるいは衝突軌道 (r が小さいとき) ⇔ 衝突パラメータ $\lambda = L/E$ が，区間 $(-\infty, \lambda_\rho)$, (a, λ_τ), (λ_δ, ∞) のどれかの中にある．
2. 衝突・脱出軌道 ⇔ λ が区間 $(l_\rho, a\,]$, $(\lambda_\tau, \lambda_\delta)$ のどちらかの中にある．
3. 円軌道 (あるいは，それに対応する漸近的軌道) ⇔ $\lambda = \lambda_\rho, \lambda_\tau, \lambda_\delta$

最後に $E = 0$ の場合には，γ は，$L = 0$ ならば静止光子であり，それ以外の場合には $0 < r \leq 2\mathrm{M}$ で衝突・衝突軌道を持つ．これを確認しておく．先ず，$L = 0$ のときには γ の第 1 積分は全てゼロであり，これが成立するのは静止光子のときだけである．$L \neq 0$ のときには，$\psi(r, L) = (2\mathrm{M} - r)L^2$ となり，γ は帯 $0 < r \leq 2\mathrm{M}$ 内に存在する．$r-$方程式は $r^3 r'^2 = L^2(2\mathrm{M} - r)$ となり，γ は両端で Σ と交わり，$r = 2\mathrm{M}$ で転回する．

以上により，零的測地線は 〈中心的なもの〉 となっているのである．つまり，E が大きいとき，集合 Z の中の空間的なものも時間的なものも，零的なものと類似な形をしている．実際，系 4.14.1 の関数で $\mathsf{q} = \pm 1$ を満たすものを $\psi^\pm$ で表すと，$E^2 \gg 1$ では，$\psi^\pm(r, L)/E^2$ は $\psi(r, \lambda) = L/E$ に近い形となる．一方，$L = \lambda E$ なので，$\psi^\pm$ の $r - L$ 図は L 方向に因数 E の分だけ伸びているのである．

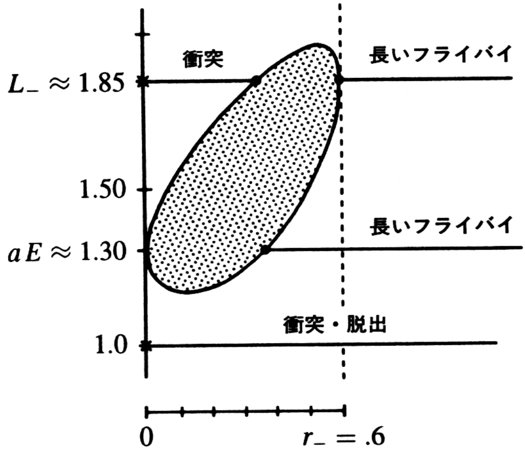


図 4.27　図 4.27 脱出エネルギーを持つ時間的赤道の $r-L$ 図．卵形である．(パラメータ値は M $=1, a^2=.84, e=E^2-1=1$) いくつかの軌道のタイプを記した．卵形の頂上 ($r \approx .53, L \approx 1.96$) と底 ($r \approx .12, L \approx 1.17$) では円軌道となり，漸近的軌道が隣接している．

Eq の時間的測地線

本節の場合と，図 4.9 のような一般的な $0 < Q < Q_+$ における時間的 $r-L$ 図との質的な差異は，今の場合，全ての E の値に対して，帯 $0 < r < r_-$ における禁止領域が，直線 $r=0$ と $r=r_-$ に接している卵形になることである (補題 4.8.5, 図 4.27 を見よ).

系 4.14.8　時間的測地線で $Q=0$ を満たすものでは

$$\psi(r,L) = (E^2-1)r^3 + 2\mathrm{M}r^2 + [a^2(E^2-1) - L^2]r + 2\mathrm{M}(L-aE)^2$$

が成立する．そして集合 $Z\colon \psi = 0$ は， $D(r) = r\Delta(r)[(E^2-1)r + 2\mathrm{M}]$ が非負である区間で定義された

$$L_\pm(r) = [2\mathrm{M}aE \pm D(r)^{1/2}]/(2\mathrm{M}-r)$$

のグラフである．

いま，$E>0$ として，エネルギー E が ∞ から 0 へ減少するときの赤道面の時間的 $r-L$ 図を調べる．E が大きいときには，卵形は，零的の場合の舌の形に似てい

る．そして，$L_0 = aE$ のとき $r = 0$ と交わり $L_- = 2\mathrm{M}aE/r_+$ のとき $r = r_-$ と交わるので，E が小さくなるに従って，卵形は下に降りていくのである．

帯 $0 < r < r_-$ の外側では，脱出エネルギーを持つ時間的測地線の $r - L$ 図は，図 4.26 の零的の場合に似た形となり，大陸 $\mathcal{N}$ と $\mathcal{S}$ の境界が漸近直線になる．垂直方向の接線 $w(E) = -2\mathrm{M}/(E^2 - 1)$ は負になり，Eq^- においてエネルギー E を持つ質点がリング状特異領域に到達できる最も近い場所を示している．

これまでと同じように，軌道のタイプを次のようにまとめることができる．Eq^+ においては，$|L|$ が大きいときには外部フライバイ軌道，$|L|$ が小さいときには (卵形と交わらない限り) 衝突・脱出軌道 となる．しかし図 4.27 から分かるように，衝突軌道，長いフライバイ軌道も存在する (2–4 ルールから，後者は $\mathcal{N}$ や $\mathcal{S}$ と交わらないことが分かる)．

E が減少して周辺脱出エネルギー $E = 1$ となると，Eq^- 内の軌道はなくなる．Eq^+ 内の軌道は少し変化する．しかしながら，$E < 1$ では，変化は大きい．4.8 節で述べた $0 < Q < Q_+$ の場合と同じように，$r - L$ 図が港湾形を持つのである．垂直方向の接線 $w(E) = 2\mathrm{M}/(1 - E^2)$ は正で，エネルギー $E < 1$ を持つ測地線がリング状特異領域に到達できる最も遠い場所を示している．

E が 1 より小さい所で港湾が大きくなり，順行 ($L > 0$)，逆行 ($L < 0$) どちらの場合でも，多くの外部有界軌道が存在する．E が減少すれば，〈港湾の境界〉である $w(E)$ が減少するので，港湾は縮んでいく．エネルギーが臨界値 E_r のときには，全ての (安定である) 逆行有界軌道は単一の (不安定な) 円軌道になってしまう．この半径を c_r で表すことにする (図 4.28 を見よ)．この逆行軌道は，E が E_r より小さくなると無くなってしまう．順行の有界軌道のみが残るのである．

さらにエネルギーが減少して 2 番目の臨界値 $E_d < E_r$ になると，全ての外部順行軌道は単一の (不安定な) 円軌道になってしまう．この半径を c_d で表すことにする．そして $E < E_d$ では，外部軌道は存在しない．衝突軌道と，卵形から作られる軌道タイプ (大有界軌道) のみが存在する．$E = 0$ では，$w = 2\mathrm{M}$ で，$r - L$ 図は (これまでの $E = 0$ の場合と同様に) L で対称になる．

次の結果により，赤道面における時間的円軌道の半径を求めることができ，それに対する角運動量は，系 4.14.8 の式から計算することができる．

補題 4.14.9　Eq における時間的円測地線 ($\mathsf{q} = -1$) で有効エネルギーが $e = E^2 - 1$ であるものの半径は，多項式

$$p(r) = c_6 r^6 + c_5 r^5 + c_4 r^4 + c_3 r^3 + c_2 r^2 + c_1 r + c_0$$

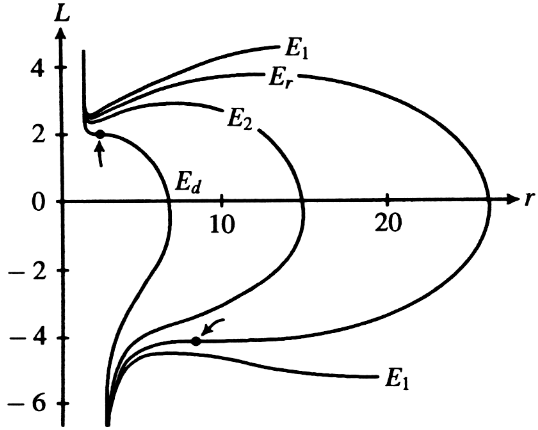


図 4.28　時間的赤道測地線でエネルギーが脱出エネルギーより小さい $1 > E_1 > E_r > E_2 > E_d > 0$ であるものの $r - L$ 図．最小エネルギーでの順行，逆行軌道を矢印で示してある．

の実数解である．ここに，

$$c_6 = e^2, \quad c_5 = 2\mathrm{M}e(1-3e), \quad c_4 = \mathrm{M}^2(9e^2 - 14e + 1),$$
$$c_3 = 2\mathrm{M}[-2a^2e^2 - a^2e + 12\mathrm{M}^2e - 4\mathrm{M}^2],$$
$$c_2 = 2\mathrm{M}^2[-5a^2e - 2a^2 + 8\mathrm{M}^2], \quad c_1 = -8\mathrm{M}^3a^2, \quad c_0 = \mathrm{M}^2a^4$$

である．

この多項式は次のようにして得られる．(1) 系 4.14.8 のように，L_+ の微分 dL_+/dr を求める．(2) 式 dL_+/dr の分子で，平方根の項と非平方根の項との差を求める (よって L_- の場合も含む)．(3) 求めた 8 次の多項式を $(r - 2\mathrm{M})^2$ で割る．前に見たように，脱出エネルギー未満 (e が負で小さい) の場合には 6 個の円測地線が存在するから，多項式の次数を 6 次よりも小さくすることはできない．

次に，順行，逆行それぞれの場合における最小エネルギーを持つ外部有界軌道の半径の臨界値 c_r と c_d を求める．なお，エネルギーは $E_r > E_d$, 角運動量は $L_r < 0 < L_d$ である．

補題 4.14.10

(1) カー赤道面における半径の臨界値 $c_d < c_r$ は，ボイヤー－リンキスト多項式 (Boyer-Lindquist 1967)

$$\beta(r) = r^4 - 12\mathrm{M}r^3 + 6(6\mathrm{M}^2 - a^2)r^2 - 28\mathrm{M}a^2r + 9a^4$$

の 2 個の実数解である．

(2) $c = c_d, c_r$ と置く．この値となるのはエネルギー E_c が ${E_c}^2 - 1 = -2\mathrm{M}/(3c)$ の場合であり，角運動量 L_c は $(L_c)^2 = 2\mathrm{M}(c + a^2/(3c))$ となる．ここに $L_r < 0 < L_d$ である．

証明　半径 c_r, c_d は，$L''_\pm(r)$ の符号が逆になっている安定円軌道と不安定円軌道の半径の極限値である．よってこの半径は，$L_+(r)$ と $L_-(r)$ の変曲点で得られる．具体的には，方程式 $\psi = 0$, $\partial\psi/\partial r = 0$, $\partial^2\psi/\partial r^2 = 0$ の共通解として得られる．この 3 番目の方程式は $3(E^2-1)r + 2\mathrm{M} = 0$, あるいは $3er + 2\mathrm{M} = 0$ である．この式を用いて，上記の多項式 $p(r)$ から e を消去すると多項式 $\beta(r)$ となる (E_c の式も出る). さらに $3(E^2-1)r + 2\mathrm{M} = 0$ を

$$\partial\psi/\partial r = 3(E^2-1)r^2 + 4\mathrm{M}r + (a^2(E^2-1) - L^2) = 0$$

に用いて L_c の式が出る．(半径の臨界値 c は，$w_c = -2\mathrm{M}/({E_c}^2 - 1) > 0$ では，$w_c/3$ となる.) □

例えば，$\mathrm{M} = 1$, $a^2 = 0.84$ とすると，

順行:　$c_d \approx 2.21$,　$E_d \approx 0.835$,　$L_d = 2.16$

逆行:　$c_r \approx 8.76$,　$E_r \approx 0.961$,　$L_r \approx -4.19$

となる．(これらは図 4.28 で用いた値である.) この補題の式の形から，いろいろな軌道タイプの特徴づけを行うことができる．

注意 4.14.11(シュワルツシルド時空の場合)　シュワルツシルド・ブラックホールでは，1 つの地平面 $r = 2\mathrm{M}$ が中心 $r = 0$ における特異点を取り囲んでいる (注意 2.5.8 を見よ). 系 4.14.8 の式で $a = 0$ とすると

$$\psi_{SS} = (E^2-1)r^3 + 2\mathrm{M}r^2 + L^2(2\mathrm{M} - r)$$

となる．よって，$r-L$ 図は L で対称となり，順行軌道と逆行軌道の差異は L の符号のみとなる．領域 $r<2\mathrm{M}$ 全体が許容領域となっているので，地平面の内側に入ると，特異点との間を遮るものは存在しないのである．‖

脱出エネルギー $E\geq 1$ を持つ測地線では，$r-L$ 図は，2 個の対称的な大陸 $\mathcal{N}$ と $\mathcal{S}$ を持つが，卵形は持たない．$E<1$ では，対称形の港湾が存在し，順行，逆行両方の外部有界軌道を含んでいる．ここで E が減少していけば，補題 4.14.10 で $a=0$ とすれば分かるように，エネルギーの臨界値 $E_c=2\sqrt{3}\mathrm{M}$ が存在する．これは，半径が同じ $c=6\mathrm{M}$ で，各運動量が $\pm 3\sqrt{2}\mathrm{M}$ である順行，逆行の円軌道を持つ．(このエネルギーの値 E_c は，e–Q 座標の図 4.8 のように，$e=-1/9$ に等しいことを注意しておく.)

赤道平面は，測地線の経度方向の運動を調べるのに最適な場所である．赤道平面では，$r-$方程式と$\varphi-$方程式 (定理 4.2.2 と命題 4.1.5) は

$$r'=\pm\sqrt{r\psi}/r^2, \qquad \varphi'=\big((r-2\mathrm{M})\,L+2\mathrm{M}aE\big)/(r\Delta)$$

となる．(極限としてのシュワルツシルド時空では $a=0$ なので，$\varphi-$方程式はさらに簡単に $r^2\varphi'=L$ となる．これはケプラーの第 2 法則である.) 図 4.29 と図 4.30 のように，これらの方程式を積分すれば，ケプラーの円錐曲線とは異なる相対論特有のフライバイ軌道と有界軌道を得ることができる．図 4.29 の場合では，角運動量が小さくなれば円軌道となる (補題 4.14.9 を見よ). それは，地平面を何度も回る軌道である．図 4.30 の場合では，大きな近日点の移動がある．わずかに相対論効果が表れている太陽系の水星の近日点の移動に比べてはるかに大きいのである．

空間的測地線

系 4.14.12　空間的赤道測地線では

$$\psi(r,L)=(E^2+1)r^3+2\mathrm{M}r^2+[a^2(E^2+1)-L^2]r+2\mathrm{M}(L-aE)^2$$

が成立する．集合 $Z{:}\,\psi=0$ は，$D(r)=r\Delta(r)[(E^2+1)r-2\mathrm{M}]$ が非負である区間で定義された

$$L_\pm(r)=[2\mathrm{M}aE\pm D(r)^{1/2}]/(2\mathrm{M}-r)$$

のグラフである．

純粋に幾何学的な見地から言えば，一番興味深いのが空間的赤道測地線である．補題 4.14.2 から，Eq^+ についてのみ考えればよいことが分かる．帯 $0<r<2\mathrm{M}$ の

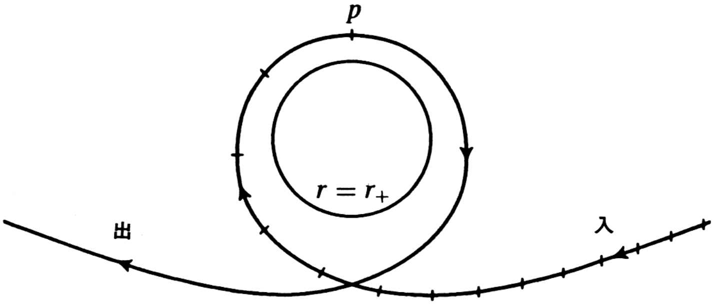


図 4.29 赤道平面における時間的フライバイ軌道. パラメータ値は M $= 1$, $a^2 = .84$, $e = E^2 - 1 = 1$, $L = 4.2$ である. 円が外側の地平面 $r = r_+ = 1.4$ を表していて, 軌道がカー外部にあることが分かる. この軌道は, $r_{\min} \approx 2.16$ で, 順行である. 同様な逆行軌道では $L < -8.5$ となることが必要である.

外側では, $r - L$ 図は零的の場合に類似している (図 4.26). ただ, 垂直方向の接線 $w(E) = 2\mathrm{M}/(E^2 + 1)$ は正で, これが地平面半径 $r_\pm$ と交わることで数多くの軌道が作られる.

E が大きい場合, 零的の場合と大きく違うのは, 舌が滑らかな島となる点である. この島と L 軸との距離は $w(E) > 0$ である. E が減少すると, この距離は増大する. しかし, この島の右側はつねに (r_-, L_-) で接している. この島は次第に小さくなり, $w = r_-$ のとき 1 点 (r_-, L_-) になる. 命題 4.14.4 のあとに述べたように, これが生じるのは, $L_- = L_w = 2\mathrm{M}$ で $E = (r_+/r_-)^{1/2}$ のときである. つまり, $(r_-, 2\mathrm{M})$ が $\psi(r, L)$ の最大値を与える孤立点なのである. 特徴あるこの点は, 赤道平面と地平面 $\mathbb{H}_-$ の共通部分内の不安定円軌道を表している. この軌道については, 4.12 節で, $\mathbb{H}_-$ 内の測地線の中で最大エネルギー E^2 を持つもの, として述べてある.

E が $(r_+/r_-)^{1/2}$ よりも小さくなると, $w(E)$ は r_- を越えて大きくなり, 再び島が $r = r_-$ と $r = w(E) > r_-$ の範囲に出現する. つまり, 零的測地線や時間的測地線の場合とは異なり, 空間的測地線はブロック II で簡単に転回するのである.

W が r_+ に近づくと, 島は $\mathcal{N}$ の西側の岸の方へ伸びていく. ちょうど $E^2 = r_-/r_+$ のとき, W は r_+ に到達し, 島は危点 $(r_+, 2\mathrm{M})$ で $\mathcal{N}$ と接する (図 4.31 を見よ). これは, E^2 が最大値を持つ $\mathbb{H}_+$ の測地線の不安定円軌道を表している.

さらに E が減少すると, w は r_+ を越えて動き, $\mathcal{N}$ は東の方向へ移動する. 島は, あとに残され, r_- から r_+ までへと広がる. このあと, $E = 0$ となるまで下に降り, それから先は同様な状況となる.

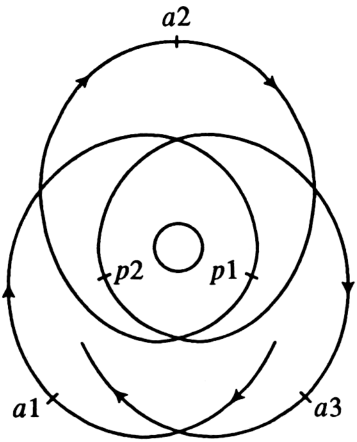


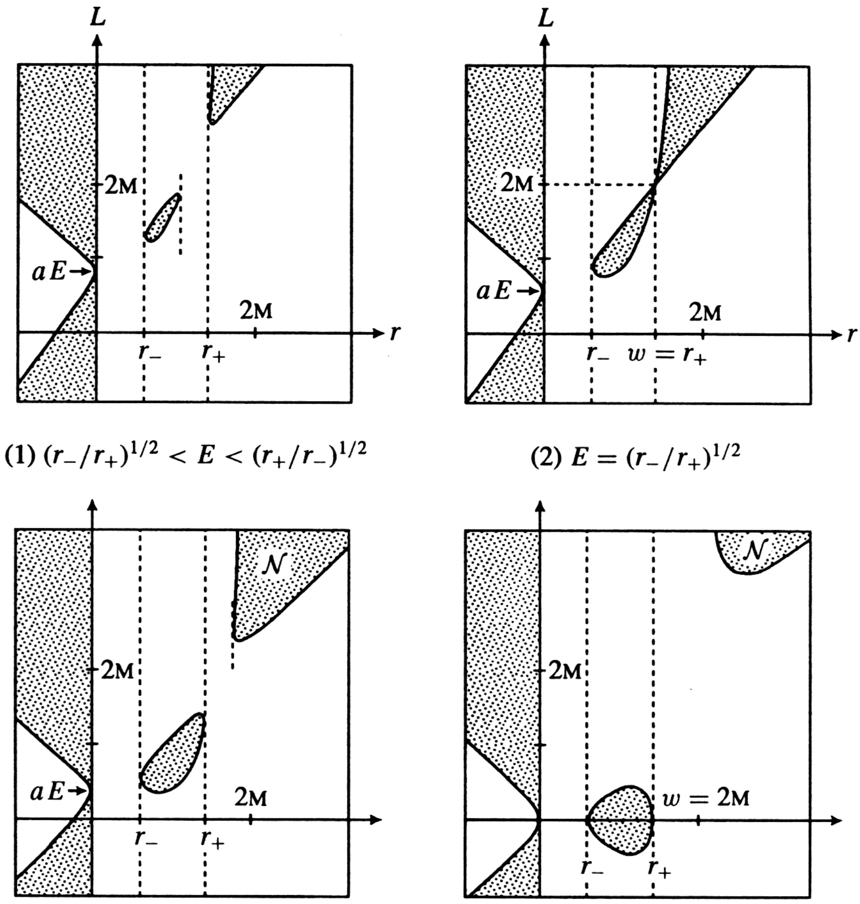
図 4.30　赤道平面における時間的外部有界軌道．(パラメータ値は M $= 1$, $a^2 = .84$, $e = E^2 - 1 = -.1$, $L = 3.1$ である.) 円が外側の地平面 $r = r_+ = 1.4$ を表している．3 個の遠点と 2 個の近点 $a1$, $p1$, $a2$, $p2$, $a3$ を示した．それぞれ $r_{\min} \approx 5.35$, $r_{\max} \approx 13.25$ である．また，近点 $p1$ と $p2$ との間は約 $142°$ である．

次に，リング状特異領域と交わる赤道測地線を調べる．

注意 4.14.13　赤道平面において，測地線で $r(s) \to 0$ とするときに邪魔となる禁止領域が存在しなければ，リング状特異領域と**出会う**ことになる．有限のパラメータ区間で交わるのである．これは，r－方程式の $\rho^4 r'^2 = R(r)$ から分かる (補題 4.14.2 の証明を見よ). さて，

$$R(r) = \cdots + (a^2(E^2 + \mathsf{q}) - L^2)r^2 + 2\mathrm{M}(L - aE)^2 r$$

であるから，次のことが成立する．(1) もし $L \neq aE$ ならば，Eq^+ からリング状特異領域へ向かうことは可能であるが，Eq^- からは不可能である．(2) $L = aE$ のときは，主要零的測地線が Σ と交わることは分かっている．零的でない場合，$R(r) = \cdots + \mathsf{q}a^2r^2$ なので，空間的測地線は $Eq^\pm$ 両方からリング状特異領域へ向かうことが可能である．時間的測地線では，$Eq^\pm$ のどちらからも，不可能である．∥



(1) $(r_-/r_+)^{1/2} < E < (r_+/r_-)^{1/2}$　(2) $E = (r_-/r_+)^{1/2}$

(3) $0 < E < (r_-/r_+)^{1/2}$　(4) $E = 0$

図 4.31　空間的赤道測地線の $r - L$ 図．E が $+\infty$ から減少すると，この島は減少していく．そして $E = \left(r_+/r_-\right)^{1/2}$ で 1 点 $\left(r_-, 2\mathrm{M}\right)$ になる．その後，上図のように，ブロック II を移動し，$E = \left(r_-/r_+\right)^{1/2}$ で北の大陸 $\mathcal{N}$ と接する．その後下降し，$E = 0$ で対称的な形になる．

$Q = 0$ を満たす測地線

測地線の中で $Q = 0$ を満たすものは，次の節の問題で重要な意味を持つことにな

る．赤道測地線は $Q=0$ を満たすが，$Q=0$ で赤道測地線でないものも多数存在する．実際，カー時空の各点でこれを作ることができる．このことは，任意の r_0, ϑ_0 に対して，E^2 を十分大きくして $R(r_0)>0, \Theta(\vartheta_0)>0$ を満たすようにすればよいのだから，命題 4.2.6 から示すことができる．

注意 4.14.14

1. 測地線が $Q>0$ を満たすなら，その ϑ 方向の運動は，$\pi/2$ の周りの振動である．それで，繰り返し赤道平面を横切ることになる．しかし，赤道平面にない測地線で $Q=0$ を満たすものは赤道平面を横断しない．もし $Q=0$ を満たす測地線が Eq と交わるならば，実は，その測地線は Eq 内にある．

証明　$\gamma(s_0)\in Eq$ とすると $\vartheta(s_0)=\pi/2$ で，ϑ－方程式

$$\rho^4\vartheta'^2=\Theta=C^2(a^2(E^2+\mathfrak{q})-L^2/S^2)$$

に s_0 を代入すると ${r_0}^4{\vartheta_0}'^2=0$ となる．しかるに，$C_0=0$ は $r_0=0$ (リング状特異領域) を除くから，$\vartheta_0'=0$ となる．これは $\gamma'(s_0)$ が Eq に接していることを示している．しかるに Eq は全測地的閉超曲面であるから，γ は Eq 内にある．□

2. 赤道平面にない測地線で $Q=0$ を満たすものは，高い回転エネルギー $a^2(E^2+\mathfrak{q})>L^2$ を持ち，それゆえ脱出エネルギー $E^2+\mathfrak{q}>0$ を持つ．この 4.6 節の結果は，$C^2>0$ なら $S^2<1$ ゆえ，$\Theta=C^2(a^2(E^2+\mathfrak{q})-L^2/S^2)\geq 0$ から直ちに得ることができる．‖

$r-L$ 図は ϑ を含まないから，同じ第 1 積分をもつ赤道測地線と非赤道測地線を区別することができない．しかしながら，この 2 つの動径運動は異なっている．もちろん赤道測地線の場合，$r=0$ はリング状特異領域を表している (時空には入らない)．しかし $\vartheta\neq\pi/2$ では，これは咽喉 T を表し，ブロック III 内の立派な超曲面である．また，非赤道測地線で $Q=0$ を満たすものは高い回転エネルギーを持つので，エネルギー E に対する $r-L$ 図における水平線が**非赤道測地線**を表わす必要十分条件は $L_0^2<a^2(E^2+\mathfrak{q})$ である．例えば，零的な $r-\lambda$ 図 (図 4.26) において，非赤道軌道が存在する範囲は $-a<\lambda<a$ だけである．$r>0$ では，この水平方向の帯は禁止領域と交わらないから，$r=0$ から $+\infty$ への直線 $\lambda=\lambda_0$ は全て，r 区間である．特に，命題 4.14.6 における運動量 $\lambda_\tau, \lambda_\delta, \lambda_\rho$ の絶対値は a を越えている．よって，Eq の外側で，$Q=0$ を満たす零的球軌道は存在しない．

もし $Q=0$ を満たす非赤道測地線 γが時間的ならば，γ が高い回転エネルギーを

持つということは，式

$$R(r) = (E^2 - 1)r^4 + 2\mathrm{M}r^3 + (a^2(E^2 - 1) - L^2)r^2 + 2(L - aE)^2 r$$

の係数が全て正であることを意味している．よって前と同様に，$r > 0$ では，帯 $L^2 < a^2(E^2 - 1)$ 全体で禁止領域と交わらないので，$r = +\infty$ から中へ向かう測地線は，妨害に合わず，$r = 0$ へと進んで行く．次の節では，$r = 0$ に到達した測地線について (各因果的特性ごとに) 調べる．

赤道測地線についての詳しいことは，Bardeen (1973) や de Felice, et al, (1968) 等を見よ．

4.15　中心への到達

時空が特異点を持つ場合，すぐに思いつく問題は，どの測地線が特異点に到達するのか，ということである．カー・ブラックホールの場合では，どの測地線がリング状特異領域 Σ に到達するのか，ということになる．系 4.5.1 より，そのような測地線ではカーター定数は $Q = 0$ を満たしていなければならない．

赤道測地線の場合には話が済んでいる．この測地線では $Q = 0$ が成立し，Eq に咽喉は無く，注意 4.14.13 から，Σ と交わることが分かる．そこで次の問題は，非赤道測地線で $Q = 0$ を満たすものの中で (それが存在するとして), Σ と交わるものは何か，ということになる．次の Brandon Carter (1968) による制限がこの問題の出発点になる．

命題 4.15.1　時間的または零的カー測地線 γ がリング状特異領域と交わるならば，この γ は赤道平面 Eq 内に入っている．

この因果的特性による制限を逆にいえば，空間的測地線は，Eq の外側から Σ と交わることになる．この命題を含めたより広い問題，**中心へ向かう測地線はどのようなふるまいをするか**, について考える．つまり，測地線の動径座標 $r(s)$ がゼロへ近づく場合の状況である．このように接近していく場合でも，$Q = 0$ でなければならない．実際，$Q > 0$ のときは接近していくことは不可能で，渦測地線 ($Q < 0$) が $r = 0$ に近づくときには，リング状特異領域 Σ を通らず，咽喉を通過してしまうのである．

リング状特異領域 Σ はカー時空の一部分ではない．しかし，赤道平面 Eq: $\vartheta = \pi/2$ と咽喉 T: $r = 0$ の共通部分である，と考えても無理はない．

補題 4.15.2　$Q=0$ を満たす測地線 γ が T と交わるとする．このとき，次の (1), (2) のどちらかが成立する．

(1) 全ての s に対して $r(s)\geq 0$ が成立し，γ は $r=0$ で r 転回点を持つ．

(2) γ は T 内に含まれる．よって，γ は T を横断しない．

証明　$\gamma(s_0)\in T$ であるとする．つまり，$r(s_0)=0$ である．しかるに，$\vartheta(s_0)\neq\pi/2$ ゆえ $\rho^2(s_0)\neq 0$ である．いま $Q=0$ であるから，r−方程式から $r'(s_0)=0$ となり，$\gamma'(s_0)$ は T に接している．下記で見るように T は全測地的ではないので，これから，γ が T に含まれている，と結論することはできない．いま，γ が $L\neq aE$ を満たすとする．このとき $(dR/dr)(0)=2\mathrm{M}(L-aE)^2>0$ である．よって，$r=0$ は r 転回点を持ち，s_0 の近くの s で $r(s)\geq 0$ となる．これは，γ が T と交わるところ全てで成立するから，(1) が成立する．もし $L=aE$ ならば，関数 $R(r)$ は $r=0$ で累次零点を持つ．よって $r(s)$ は定数であり，γ は T 内に含まれることになる．□

次に述べるように，超曲面の Eq と T があると，リング状特異領域へ接近することが不可能になる．

系 4.15.3　$Q=0$ を満たす測地線 γ が $[\,s_0,s_1)$ で定義されているとする．いま $s\to s_1$ のとき γ が Σ に近づくならば，次のうちの 1 つが成立する．

(1) γ は，赤道面 Eq 内にある．

(2) γ は，咽喉 T 内にある．

(3) ある部分区間 $[b,s_1)$ で $\Theta\big(\vartheta(s)\big)>0$, $R\big(r(s)\big)>0$ が成立する．よって，γ は，Eq や T と交わらない．

証明　いま (1) が成立しないとする．このとき，注意 4.14.14 より，γ は赤道面と交わることはない．よって，$\vartheta(s)\to\pi/2$ で $\neq\pi/2$ となる．図 4.3 のように，$s^*\neq\pi/2$ で $\Theta\big(\vartheta(s^*)\big)=0$ ならば，そこは ϑ−転回点である．

またもし $L=0$ ならば，このような ϑ−転回点は存在しない．もし $L\neq 0$ ならば，過去の点に戻ることはない．よってある部分区間で $\Theta\big(\vartheta(s)\big)>0$ となる．

次に (1) と (2) が成立しないとする．このとき (3) が成立することを示すため，γ の r−転回点の数を調べる．

いま，γ が rー転回点を持たないとする．このとき，$[s_0, s_1)$ で $R\big(r(s)\big) > 0$ であり，補題 4.15.2 から γ は T と交わらないから，(3) が成立する．

γ が転回点を1つ持つとする．それを r_1 とする．これは $r_1 \neq 0$ である．実際，γ が $r = 0$ で転回するなら，$r(s) \to 0$ なのでもう1つ転回点が必要となる．だが，$r_1 \neq 0$ で転回するなら，$r = 0$ に近づくためにもう1つの転回点を持つ必要はない．そして，転回点を持たないから $R\big(r(s)\big) > 0$ で，γ は T と交わらない．よって (3) が成立する．

最後に，γ が rー転回点を2個持つとする．いま，$r(s) \to 0$ で (補題 4.15.2 から) γ は T を横断しないから，2個の転回点は $r_2 > r_1 = 0$ となる．可能性としては，$r(s)$ が，T:$r = 0$ と $r = r_2$ の間を何回も振幅し，それから $\vartheta(s)$ が変わって Σ と交わることも考えられる．しかるに，$r(s) \to 0$ なので，$[s_0, s_1)$ の部分区間 $[b, s_1)$ で $r = r_2$ が入らないものが存在する．この区間では $r \neq 0$ である．もし $r = 0$ があるなら，$r(s) \to 0$ となるためにはまた転回する必要がある．よって $[b, s_1)$ では $R\big(r(s)\big)$ はゼロにならず，γ は T と交わらない．よって (3) が成立する．□

注意 4.15.4 カー測地線で $Q = 0$ を満たすものが $r = 0$ に近づく方法は限られている．これは，赤道面の場合と同じように (注意 4.14.13)，多項式 $R(r)$ をから分かる．$L \neq aE$ の場合には，前述したように，$r = 0$ に近づくのは $r > 0$ の側からだけである．もし $L = aE$ ならば，

$$R(r) = (E^2 + \mathfrak{q})r^4 - 2\mathrm{M}\mathfrak{q}r^3 + \mathfrak{q}a^2r^2$$

が成立する．これから次のことが分かる．(a) もし γ が時間的ならば，両側から $r = 0$ に近づくことができる．(b) もし γ が零的ならば，それは赤道面上の主要零的測地線である．(**証明** ϑー方程式で，$C^2 > 0 \Leftrightarrow S^2 < 1 \Leftrightarrow \Theta < 0$ から $\vartheta = \pi/2$ となる．よって，4.5 節の最後に述べたことより γ は主要零的測地線となる．□) よって γ は Σ と交わる．(c) もし γ が空間的ならば，両側から $r = 0$ へ近づくことができる．‖

以下の3つの結果は次のことを示している．測地線で $Q = 0$ を満たすものが Eq の外側から $r = 0$ へ進み，禁止領域はないとする．このとき，リング状特異領域と交わるための必要十分条件は，測地線が空間的で $L = aE$ を満たすことである．

命題 4.15.5 非赤道カー測地線 γ で $Q = 0$ を満たすものが，さらに，$r_0 > 0, r_0' < 0$ を満たし，$(0, r_0]$ で $R(r) > 0$ であるとする．このとき，γ がリング状特異領域と交わるための必要十分条件は，γ が空間的で $L = aE$ を満たすことである．さもなければ，γ は $r = 0$ で r 転回点を持つ．

証明　γ が Eq に含まれていないから，Eq とは交わらない．よって $\vartheta_0 \neq \pi/2$ である．前に述べたように，$\vartheta(s)$ は，最大 1 回の転回のあと，$\pi/2$ に近づく．したがって最初からこれを仮定しておく．よって，$\vartheta_0 < \pi/2, \vartheta_0' > 0$ とし，$[\,\vartheta_0, \pi/2)$ で $\Theta(\vartheta) > 0$ である．

$\gamma(s)$ のパラメータ s が大きくなると，$r(s) > 0$ は減少し，$\vartheta(s)$ は $\pi/2$ へと増大する．しかしながら，γ は Eq と交わらないから，$\vartheta(s)$ が $\pi/2$ に到達することはない．測地線は $\mathrm{mod}\,\Sigma$ で完備であるから，$R(r)$ の仮定より，γ はある区間 $[\,s_0, s_1)$ で定義され，この区間では，

$$r(s) > 0, \quad \vartheta(s) \neq \pi/2, \quad \lim_{s \to s_1} r(s) = 0, \quad \lim_{s \to s_1} \vartheta(s) = \vartheta_1$$

が成立している．ここに ϑ_1 は $\vartheta_1 \geq \pi/2$ を満たす定数である．

命題 4.3.3 の方程式 (1) から

$$\int_{r_0}^{0} \frac{dr}{\sqrt{R}} = -\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\Theta}}$$

となる．ここで $Q = 0$ より

$$\begin{aligned} R(r) &= (E^2 + \mathfrak{q})r^4 - 2\mathrm{M}\mathfrak{q}r^3 + \big(a^2(E^2 + \mathfrak{q}) - L^2\big)r^2 + 2\mathrm{M}(L - aE)^2 r, \\ \Theta(\vartheta) &= C^2\big(a^2(E^2 + \mathfrak{q}) - L^2/S^2\big) \end{aligned}$$

である．ここで，ϑ 積分は，$\vartheta_1 < \pi/2$ のとき有限で，$\vartheta_1 = \pi/2$ のときには無限となる．実際，$\vartheta_1 < \pi/2$ では，連続な正関数を有界区間で積分することになる．もし $\vartheta_1 = \pi/2$ ならば，広義積分となり，

$$\sqrt{\Theta} = |C|(a^2(E^2 + q) - L^2/S^2)^{1/2} < k|C|$$

である．ここに，$k = (a^2(E^2 + \mathfrak{q}) - L^2)^{1/2} > 0$ である．これより

$$\int_{\vartheta_0}^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\Theta}} \geq \frac{1}{k}\int_{\vartheta_0}^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{C} = \frac{1}{2k}\ \ln \left|\ \frac{1+S}{1-S}\ \right|_{\vartheta_0}^{\pi/2} = \infty.$$

となる．

場合 1. $L = aE$ のとき．この場合

$$\begin{aligned} R(r) &= (E^2 + \mathfrak{q})r^4 - 2\mathrm{M}\mathfrak{q}r^3 + \mathfrak{q}r^2, \\ \Theta(\vartheta) &= a^2C^2\big((E^2 + \mathfrak{q}) - E^2/S^2\big) = (a^2C^2/S^2)(\mathfrak{q}S^2 - E^2C^2) \end{aligned}$$

となる．この第 2 式から，$\mathbf{q} \leq 0$ ならば $\Theta(\vartheta) < 0$ となる．したがって，γ は空間的でなければならない．よって，r が小さいときには，$R(r)$ は r^2 の次数である．しかるに，r 積分の被積分関数の次数は $1/r$ である．よって r_0 から $r = 0$ までの広義積分は有限となる．よって ϑ 積分は有限である．ゆえに，上で述べたように，$\vartheta_1 = \pi/2$ で，これは，γ がリング状特異領域と交わることを示している．

場合 2. $L \neq aE$ のとき．この場合，$R(r)$ の式から，r が小さいときには $R(r)$ の次数が r であることが分かる．よって，r 積分の被積分関数の次数は $1/\sqrt{r}$ であり，r_0 から (極限として) $r = 0$ までの積分は有限となる．よって $\vartheta_1 < \pi/2$ である．したがって γ はリング状特異領域と交わらず，s_1 越えて拡張でき，s_1 で咽喉と交わる．補題 4.15.2 より，γ はそこで転回し，また $r > 0$ に入っていく．□

すぐ予測がつくように，〈ホワイトホール〉側 $r < 0$ から $r = 0$ に接近する場合は状況が複雑になる．

系 4.15.6　γ を，非赤道カー測地線で $Q = 0$ を満たすものとする．いま $r_0 < 0$, $r_0' > 0$ で，$[\,r_0, 0)$ において $R(r) > 0$ であるとする．このとき γ が $r = 0$ と交わるための必要十分条件は，γ が空間的であり $L = aE$ となることである．そしてこの場合，γ はリング状特異領域 と交わることになる．

証明　注意 4.15.4 より，γ は空間的で，$L = aE$ でなければならない．そしてこの場合，上記の証明から，γ が Σ と交わることが分かる．□

もちろん，$L \neq aE$ を満たす測地線が，$r < 0$ 方向から咽喉と交わることも可能である (例えば主要零的測地線)．しかしながら，このときは $Q < 0$ でなければならず，それゆえ，T を横断して $r > 0$ へ進んで行く．

次は，どのカー測地線が咽喉の中から Σ へ近づくことができるか，を調べる．2.3 節で述べたように，T は，ブロック III の平坦な超曲面 $S^2\langle 0\rangle \times R$ であり，時間全体を通る中心球 $S^2\langle 0\rangle = \{r = 0, t = 0\}$ である．この $S^2\langle 0\rangle$ は，リング状特異領域によって 2 つの成分に分けられている．そして，各成分は，3 次元ミンコウスキー空間内の半径 $r = a$ のシリンダー $S^1 \times R^1$ の内部 $D \times R$ と等長である．この等長写像 ψ は

$$x = aS\cos\varphi, \qquad y = aS\sin\varphi, \qquad t = t$$

で与えられる．これを $\vartheta = \pi/2$ まで拡げると，ψ は，リング状特異領域を境界のシリンダーと対応させている．

補題 4.15.7　T の測地線 β がカー測地線であるための必要十分条件は，それが全ての場所でベクトル場 $\partial_\varphi + a\partial_t$ と直交することである．この測地線は空間的であり $L = aE$ を満たしている．

証明　先ず，咽喉の型テンソル S を計算する (注意 1.7.13). T の接ベクトル場 X, Y に対し，カー共変微分 $\nabla_X Y$ の T の垂直成分 $\mathrm{nor}\nabla_X Y$ を $S(X,Y)$ とおく．ボイヤー－リンキスト標構場 (2.6 節) で，ベクトル場 $E_2 = \partial_\vartheta/|\partial_\vartheta|, E_3 = W/|W|, E_0 = V/|V|$ は T に接し，$E_1 = \partial_r/|\partial_r|$ は T に垂直である．また T では，$\rho^2 = a^2C^2, \Delta = a^2$ であるから，2.6 節の共変微分の式から，T の接ベクトル場の組 E_i, E_j に対し，1 つの例外を除いて $S(E_i, E_j) = 0$ となることが分かる．その例外は，$S(E_0, E_0) = \mathrm{nor}\nabla_{E_0} E_0 = FE_1$ で，ここに $F = -\mathrm{M}/(a^2C) \neq 0$ である．よって，咽喉はほとんど全測地的であり，ただ E_0 方向にのみ〈曲がって〉いるのである．その量は，$\vartheta \to \pi/2$ (リング状特異領域) にしたがって無限大となる．

先ず，γ が，T に含まれるカー測地線とする．よって $S(\gamma', \gamma') = \mathrm{nor}\,\gamma'' = 0$ である．γ' を E_0, E_2, E_3 の線形結合で表すと，γ' は E_0 成分を持たないことが分かる．つまり $\gamma' \perp E_0$ である．ここで E_1 と E_2 は空間的であるから，γ も空間的である．γ' は，T で $E_0 = V/|V|$ と $V = a(\partial_\varphi + a\partial_t)$ に垂直であるから，$<\gamma', a\partial_t + \partial_\varphi> = 0 \Leftrightarrow -aE + L = 0$ より $L = aE$ を得る．

逆に，β を，T の測地線で $\beta' \perp \partial_\varphi + a\partial_t$ を満たすものとする．これのカー加速度 β'' は T に垂直で，$\beta' \perp E_0$ ゆえ，$\beta'' = S(\beta', \beta') = 0$ となる．よって β はカー測地線であり，前と同様にして，$\beta' \perp \partial_\varphi + a\partial_t$ から，β が空間的で $L = aE$ を満たすことが分かる．□

T 内のカー測地線は，補題 4.15.7 の前で述べた等長写像 ψ を使って決定することができる．いま

$$d\psi(\partial_\varphi + a\partial_t) = -y\partial_x + x\partial_y + a\partial_t$$

が成立するから，この補題より，T 内のカー測地線は，ψ により，$D \times R$ 内の直線で $-y\partial_x + x\partial_y + a\partial_t$ に垂直なものに対応することが分かる．これらの直線は，直線間の φ 回転と t 変換で $s \to (x_0 + As, Bs, aBx_0s)$, $A^2 + B^2 = 1$ を満たすもので与えられる．そしてこれらの直線は，その終点で境界であるシリンダーと交わる．つまり，T 内の (空間的) カー測地線は終点でリング状特異領域と交わるのである．よって，衝突・衝突軌道を持つことになる．一番単純な $B = 0$ の場合は，T で t を一定とした断面 $S\langle 0 \rangle$ の ϑ パラメータ曲線である．これは，$S\langle 0 \rangle$ の〈赤道〉である Σ か

ら始まり，極を通り，またΣに到達する．

命題 4.15.1 の証明 いま，γ を，カー測地線で，Σで交わり，Eq 内にないものとする．系 4.15.3 から分かるように，$r_0 > 0$, $r_0 < 0$, $r_0 = 0$ の 3 つの状況どれからも，γ が空間的であることが分かる．□

このように，カー・ブラックホールへ落下する宇宙飛行士にとって，リング状特異領域とぶつかるのを回避することは可能なのである．たとえ赤道面から出発しても，そして加速度が小さくても回避は可能である．(といって，この落下を勧めるものではない.)

以上のカー測地線に関する結果から，(パラメータ区間が有限の範囲で) Σと交わることがあっても，漸近的にΣに近づくのではないことが分かる．これは，命題 4.3.3(2) から直接証明することができる．実際，この式は，$r = 0$ あるいは $\vartheta = \pi/2$ でも成立するのである．

次に，測地線で $Q = 0$ を満たすものが $r = 0$ に近づくとどうなるか，について述べる．

命題 4.15.8 カー測地線で $Q = 0$ を満たすものを γ とし，これが $r = 0$ に近づき，禁止領域とは交わらないとする．

(1) γ が時間的測地線のとき，$r = 0$ に到達するための必要十分条件は $L \neq aE$ である．到達するのは $r > 0$ の側からだけである．もし γ が Eq 内に存在するのなら，Σと交わる．さもなければ，図 4.32 のように，長いフライバイ軌道で T と接触して弾かれることになる．

(2) γ が零的測地線のとき，同様な結果を得る．さらに，$L = aE$ (つまり $\lambda = a$) ならば，γ は Eq 内の主要零的測地線 であり，Σと交わることになる．

(3) γ が空間的測地線で $L \neq aE$ ならば，$r > 0$ の側からΣに近づき，Eq 内にあるならΣと交わることになる．それ以外は T と接触して弾かれることになる．もし $L = aE$ ならば，両側から接近でき，Σと交わる．

非拡張性

第 3 章において，ボイヤー－リンキスト・ブロック III を持つカー時空は，完備な擬リーマン多様体 $\widetilde{M}$ へ等長的に埋め込めないことを示した．ここでは，もっと強い

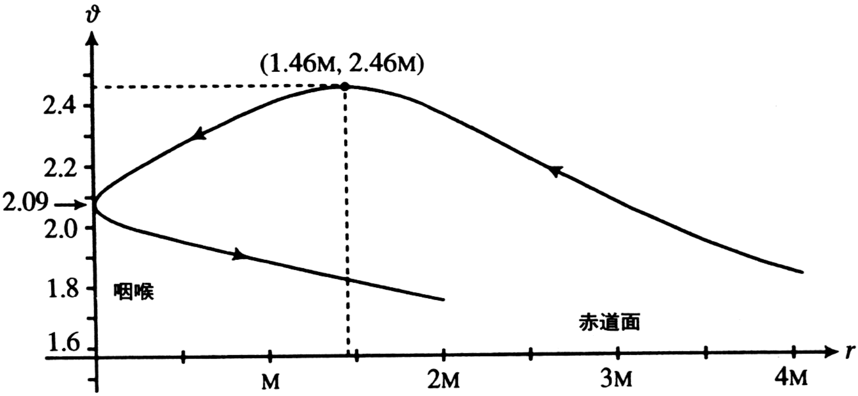


図 4.32　典型的な，時間的非赤道測地線 γ で $Q=0$ を満たすものの $(r(\tau),\vartheta(\tau))$ のグラフ．(パラメータ値は M $=1$, $a^2=.84$, $L=1$, $E=2$ である.) 水平軸は赤道面 $\vartheta=\pi/2$ を表している．測地線が $r=+\infty$ から近づくと，先ず，赤道面から遠ざかる．角度 $\vartheta\approx 51^\circ$ (北緯である) で向きを変え，角度 $\vartheta\approx 30^\circ$ で咽喉 $r=0$ と接触して，漸近的に赤道面へ近づきながら $r=\infty$ へ戻る．図示された軌道範囲での経過固有時間は $\Delta\tau\approx 3$M である．逆向きでも測地線であることに注意．

結果，すなわち，**カー時空 M_f, M_e, M_s は拡張できない**，ことを示す．つまり，より大きい時空へ等長的に埋め込むことが不可能なのである．よって，これらの標準的なモデルを被覆するもの，これらで被覆されるものも拡張不可能なのである．第 3 章で〈最大〉という語を用いた理由もここにある．

命題 4.15.9　カー時空 M_f, M_e, M_s は拡張不可能である．

証明　いま，ある時空 M が，より大きい時空 $\widetilde{M}$ の開部分多様体 (と等長) である，として矛盾を導く．

(1) 先ず，時間的測地線 $\sigma\colon[\,0,b\,]\to\widetilde{M}$ で，$\sigma(b)$ のみが M に含まれないものが存在することを示す．$\widetilde{M}$ は連結であるから，M の $\widetilde{M}$ における位相的境界に点 $p\in\widetilde{M}$ が存在する．この p は M に含まれない．$\mathcal{U}$ を p の正規近傍とすると，0 の $T_p(\widetilde{M})$ における星形近傍 $\tilde{\mathcal{U}}$ が存在し，指数写像 $\exp_p$ は $\tilde{\mathcal{U}}$ から $\mathcal{U}$ の上へ微分同相となる (O'Neill 1983 を見よ)．$\tilde{\mathcal{U}}$ 内の時間的ベクトルの全体からなる集合を $\tilde{\mathfrak{T}}$ とする．

もし像 $\mathfrak{T}=\exp_p(\tilde{\mathfrak{T}})$ が M と交わるならば，この $\exp_p$ で時間的直線が時間的測地線に移るから，証明は完成する．

上記が成立しないときには，次のように，点 p を，よりよい点と置き換える．M 内で，点 p に収束する点列 $\{p_n\}$ をとり，各点 p_n において時間的接ベクトル z_n をとり，その列は $z \in \widetilde{\mathfrak{T}} \subset T_p(\widetilde{M})$ に収束するものをとる．$\widetilde{\mathfrak{T}}$ は $T_p(M)$ で開集合ゆえ，$\mathfrak{T}$ は $\mathcal{U}$ で開集合である．よって $\widetilde{M}$ で開集合である．よって n を十分大きくとれば $\exp_p(z_n) \in \mathfrak{T}$ となる．いま $\mathfrak{T}$ は M と交わらないから，時間的測地線 $\gamma(s) = \exp_{p_n}(sz_n)$ は，始点が $\gamma(0) = p_n \in M$ で，終点が（M 内にない）$\gamma(1) \in \mathfrak{T}$ である．よって γ を構成した σ は条件を満たしていることになる．

(2) 明らかに，上記を制限した $\sigma_1 = \sigma|[\,0, b)$ は M 内の時間的測地線で，M 内で拡張できない．M は $\operatorname{mod}\Sigma$ で完備ゆえ，σ_1 はリング状特異領域と交わる．よって命題 4.15.1 より，σ_1 は Eq 内に含まれる．しかるに，2.7 節で見たように，$\sigma \to b$ のとき曲率は $k(\sigma_1(s)) \to \infty$ となる．よって σ_1 は拡張不能である．この σ_1 の拡張 σ により，示すべき矛盾が得られた．□

第5章

ペトロフ・タイプ

時空の曲率テンソルは，**ペトロフ・タイプ** (Petrov type) と呼ばれる型で分類することができる．この分類は，曲率テンソル全体ではなく，トレース・フリーの部分，つまり**ワイルの共形テンソル** (Weyl conformal tensor) の部分に適用される．(カー時空のようなリッチ平坦な時空では $R = C$ である.) 時空 M の各点でワイル・テンソルのタイプが異なる場合もありうるが，ここでは全ての点でタイプが同じ場合だけをとりあつかい，それを **M のペトロフ・タイプ**と呼ぶことにする．

本章ではペトロフ・タイプ一般について説明し，それの重要な例としてカー時空をとりあげる．このタイプによる分類は，曲率についての性質を得るだけではなく，それ以外の幾何学的不変量についての情報を得ることもできる．特に，零的測地線についての性質を知ることができるのである．例えば，カー時空はペトロフ・タイプがD型である．これは，**主要零的測地線** が独立した微分を持っていることを示している．

ペトロフの分類についてはいろいろな表現方法が知られている．いちばん簡単なのは次の方法である．先ず，曲率テンソル R は，各点 $p \in M$ において，その点の接空間で作られた交代 2 次形式全体のなす集合 $\Lambda^2 = \Lambda^2(T_pM)$ 上に自己共役な線形作用素 $\mathbb{R}$ を導入する．これを**曲率変換** (curvature transformation) と呼ぶ．時空の場合，Λ^2 は 6 次元の実ベクトル空間である (付録 D を見よ)．同様にして，ワイル・テンソル C は Λ^2 上に作用素 $\mathbb{C}$ を導入する．これはさらに興味深いものをもたらす．時空の場合には，次数と次元の関係から，Λ^2 には，そこにおける**ホッジのスター作用素** (Hodge star operator) $*$ を用いて，複素構造を導入することができる．よって，Λ^2 は 3 次元の複素ベクトル空間となる．しかるに $\mathbb{C}$ と $*$ は可換であるから，$\mathbb{C}$ は Λ^2 上の**複素線形**作用素となる．そして，$\mathbb{C}$ の (複素) 固有値と固有ベクトルから，ペトロフ・タイプの分類が自然に導かれるのである (図 5.1 を見よ).

複素作用素 $\mathbb{C}$ は，M の各点で，実の零的方向を決定する．そしてその**主要零的叢** (principal null congruence) が，ペトロフ・タイプについての第 2 の特徴づけを与えるのである．

零的叢の幾何を研究するときに武器となるのが**ニューマン－ペンローズ技法** (Newman-

Penrose formalism) である．これは，計算に際して，正規直交標構場を，零的ベクトル場を含んだ標構場に置き換えているものであり，相対性理論のいろいろな場面で使用されている便利なものである．先ずこの技法を簡単に説明して，その後，これを用いて，時空のペトロフ・タイプと主要零的測地線の性質との間の関係を調べる．特に，カー時空等のD型の場合には，零的叢には，測地線だけでなくて〈剪断フリー〉のものも含まれている．つまり簡単にいえば，光のビームが，最初円形の断面を持つなら，広がった先でも同じ断面を持つのである．

カー時空関係のもう1つの性質は，ゴールドバーグーザックスの定理で与えられる．これは，任意のリッチ平坦な時空において，剪断フリーな測地線の零的叢が存在するための条件を曲率の式で与えるものである．

5.1　ワイル・テンソル

ペトロフ・タイプの定義と基本的な性質は，時空 M の各点 p における接空間 $T_p(M)$ 上で与えられるが，曲率に表れる対称性を明確にするために，$T_p(M)$ を，スカラー積を持つ空間 V, つまり，スカラー積 $g=<\ ,\ >$ が定義された実ベクトル空間に置き換えておく．すなわちこの節では，一般的な性質を述べるので，V は任意，とするのである．もちろん後の節では，V を，4次元のローレンツ・ベクトル空間 とする．

定義 5.1.1　F を，V 上の (0,4) テンソルとする．つまり，$V^4 = V\times V\times V\times V$ 上の双線形実数値関数である．このとき次のように定義する．

1. $F(v,w,x,y)$ において，v と w, x と y で歪対称のとき，$F(v,w,x,y)$ は**双歪対称** (biskew symmetry)) である，という．

2. V の任意の v,x,y,z に対して $F(v,x,y,z)+F(v,y,z,x)+F(v,z,x,y)=0$ が成立するとき，F は**巡回対称** (cyclic symmetry) である，という．

この1と2の両方を持つとき，F を V の**曲率** (curvature) と呼ぶ．

もちろん，多様体のリーマン曲率テンソル R は，各点 p において，$T_p(M)$ の曲率である．R のときと同じ証明方法で，曲率 F が**組対称** (pair symmetric) であることが分かる．つまり，V の任意の v,w,x,y に対して $F(v,w,x,y)=F(x,y,v,w)$ が成立する．

双歪対称テンソル F では，符号を別にして，1つの縮約を行うことができる．符号を統一するため，$\mathsf{C}F$ で，縮約 $\mathsf{C}_{13}(F)$ (あるいは同じことだが $\mathsf{C}_{24}(F)$) を表すことにする．よって，任意の基底 $e_1, \ldots, e_n$ に対して

$$(\mathsf{C}F)(v,w) = \Sigma g^{ab} F(e_a, v, e_b, w) = \Sigma g^{ab} F(v, e_a, w, e_b)$$

となる．ここに，g^{ab} は $g_{ab} = < e_a, e_b >$ の逆行列で，添字は 1 から $n = \dim V$ を動くものとする．正規直交基底では，$(\mathsf{C}F)(x,y)$ は，$\Sigma \varepsilon_a F(e_a, x, e_a, y)$ と簡単になる．ここに $\varepsilon_a = < e_a, e_a > = \pm 1$ である．リーマンの曲率テンソルの場合の用語を流用して，$\mathsf{C}F$ を F の**リッチ・テンソル** (Ricci tensor) と呼ぶことにする．

一般に，テンソルにおいて，全ての縮約がゼロとなるとき，そのテンソルは**トレース・フリー** (tracefree) である，という．双歪対称な (0,4) テンソルがトレース・フリーとなる条件は，そのリッチ・テンソルがゼロとなることである．

注意 5.1.2 V 上の交代 2 次形式全体のなす集合 $\Lambda^2 = \Lambda^2(V)$ は，ベクトル $v, w \in V$ が作る楔積 $v \wedge w$ の線形結合で構成されていると考えてよい．楔積は，双線形で結合律を満たし，歪対称，つまり $w \wedge v = -v \wedge w$ が成立する．v, w に対して，$v \wedge w$ は，v と w に (向きを入れた) 垂直で，v と w が作る平行四辺形の面積に長さが等しいベクトルを表す．付録 D で述べるように，Λ^2 には，次の**普遍写像定理**がある．‖

いま，$A: V \times V \to W$ を，ベクトル空間 W への歪対称で双線形な写像とする．このとき，

$$\ell(v \wedge w) = A(v,w), \qquad v, w \in V$$

を満たす線形関数 $\ell: \Lambda^2 \to W$ が一意に存在する．

F を双歪対称な (0,4) テンソルとするとき，上記の普遍写像定理を 2 度用いて，$\Lambda^2 = \Lambda^2(V)$ 上の双線形形式

$$F(v \wedge w, x \wedge y) = F(v, w, x, y), \qquad v, w, x, y \in V$$

を作ることができる．(定義の仕方の差異だけであるから，同じ記号を用いても混乱することはない.) このように定義すると，V 上のスカラー積 $<\ ,\ >$ を $\Lambda^2 = \Lambda^2(V)$ 上へ拡張することができる．いま，V^4 上の実数値関数を

$$(v, w, x, y) \to \begin{vmatrix} < v, x > & < v, y > \\ < w, x > & < w, y > \end{vmatrix}$$

で定義する．これは明らかに双線形で双歪対称である．よって，Λ^2 上に双線形関数 $<,>$ を

$$<v\wedge w, x\wedge y>=\begin{vmatrix} <v,x> & <v,y> \\ <w,x> & <w,y> \end{vmatrix}, \qquad v,w,x,y\ \in V$$

で定義することができる．

この作り方から，$<,>$ は双線形で対称であることが分かる．下記に述べるように Λ^2 は正規直交基底を持ち，その基底で$\beta\perp\Lambda^2$ とすると $\beta=0$ となるので，$<,>$ は非退化であり，スカラー積となる．

いま V の正規直交基底の 1 つを $\{e_1,\ldots,e_n\}$ とすると，これから自然に作った $\{e_a\wedge e_b : 0\le a<b\le n\}$ は，Λ^2 の $<,>$ に関する正規直交基底となる (付録 D 参照). 実際,

$$\begin{aligned}
&<e_1\wedge e_2, e_1\wedge e_3> \\
&\qquad\qquad =<e_1,e_1><e_2,e_3>-<e_1,e_3><e_2,e_1>=0, \\
&<e_1\wedge e_2, e_1\wedge e_2> \\
&\qquad\qquad =<e_1,e_1><e_2,e_2>-<e_1,e_2><e_2,e_1>=\varepsilon_1\varepsilon_2=\pm 1
\end{aligned}$$

等が成立する．

一般に，スカラー積が定義された空間では，双線形形式と線形作用素との間に 1 対 1 の対応関係がある．Λ^2 においても，双歪対称テンソル F で定義された双線形形式に対して，Λ^2 上の線形作用素 $\mathbb{F}$ を

$$<\mathbb{F}(v\wedge w), x\wedge y>=F(v\wedge w, x\wedge y)=F(v,w,x,y), \quad v,w,x,y\in V$$

で定義することができる．テンソルの言葉でいえば，$\mathbb{F}$ は (2,2) テンソルで，(0,4) テンソル F の型を変換したものになっている．擬リーマン多様体 M においては，リーマン曲率テンソル R から定義された (2,2) テンソル $\mathbb{R}$ を，M 上の**曲率変換** (curvature transformation) と呼ぶ．曲率を調べるのに，$\mathbb{R}$ の方が便利なことが多い．

次に，形式的な方法で曲率を定義して，それを分解することを考える (分解したものの中にワイル・テンソルが入るようにする).

定義 5.1.3　A と B を V 上の対称双線形形式とする．関数 $A\wedge B: V^4\to R$ を

$$(A\wedge B)(v,w,x,y)=\begin{vmatrix} A(v,x) & A(v,y) \\ B(w,x) & B(w,y) \end{vmatrix}, \qquad v,w,x,y\in V$$

で定義する．

直接計算すれば，$A \wedge B$ が巡回対称であることが分かる．これが双歪対称である必要はないが，$A \wedge A$ が双歪対称であることは要請される．そして，恒等式

$$(A+B) \wedge (A+B) = A \wedge A + A \wedge B + B \wedge A + B \wedge B$$

から，$A \wedge B + B \wedge A$ が双歪対称となる．そして，巡回対称であるので，これは曲率となる．

いま R の場合を考えると，定義 5.1.3 は，$g \wedge g$ (g は計量テンソル) と $g \wedge \mathrm{Ric} + \mathrm{Ric} \wedge g$ ($\mathrm{Ric} = \mathsf{C}_{13}(R)$ は R のリッチ・テンソル) に適用できる．R のワイル・テンソル C は R のトレース・フリーの部分であるから，計算のため，次の補題を用意しておく．

補題 5.1.4　次の関係式が成立する．

(1) $\mathsf{C}(g \wedge g) = (n-1)g$

(2) $\mathsf{C}(g \wedge \mathrm{Ric} + \mathrm{Ric} \wedge g) = (n-2)\mathrm{Ric} + Sg$，ここに S はスカラー曲率 $\mathsf{C}(\mathrm{Ric})$ を表す．

証明　V の正規直交基底を $\{e_a\}$ とする．このとき (1) は

$$\begin{aligned}
\mathsf{C}(g \wedge g)(v,w) &= \Sigma\varepsilon_a (g \wedge g)(e_a, v, e_a, w) \\
&= \Sigma\varepsilon_a \begin{vmatrix} <e_a, e_a> & <e_a, w> \\ <v, e_a> & <v, w> \end{vmatrix} \\
&= \Sigma\varepsilon_a [\varepsilon_a <v,w> - <v,e_a><e_a,w>] \\
&= (n-1) <v,w>
\end{aligned}$$

となる．同様にして (2) を示すことができる．□

次に，曲率 R のワイル・テンソルを定義する．いま

$$R = C + \alpha(g \wedge \mathrm{Ric} + \mathrm{Ric} \wedge g) + \beta g \wedge g$$

と書く．ここに，α と β は実数で $\mathsf{C}(C) = 0$ となるものとする．上の補題を使うと

$$\mathrm{Ric} = \mathsf{C}(C) + \alpha[(n-2)\mathrm{Ric} + Sg] + \beta(n-1)g$$

である．よって，$\alpha=1/(n-2)$ でなければならない．(そして，$n=2$ ならば $C=0$ と定義することになる.) ゆえに

$$0=\mathsf{C}(C)+Sg/(n-2)+\beta(n-1)g$$

である．これから，$\mathsf{C}(C)=0$ となるためには $(n-1)(n-2)\beta=-S$ でなければならない．

定義 5.1.5　次元が3以上でスカラー積を持つ空間 V の曲率を R とする．このとき，R のワイルの共形曲率テンソル C を

$$R=C+\frac{1}{n-2}(g\wedge \mathrm{Ric}+\mathrm{Ric}\wedge g)-\frac{S}{(n-1)(n-2)}g\wedge g$$

で定義することができる．

系 5.1.6　ワイル・テンソル C はトレース・フリーの曲率である．

証明　C は曲率の一次結合であるから，C 自身も曲率である．構成方法から縮約 $\mathsf{C}(C)$ はゼロであり，C は双歪対称であるから，その全ての縮約はゼロとなる．□

テンソル成分による表現を求めるため，任意の基底に対して定義 5.1.3 を適用すると，例えば，

$$(g\wedge \mathrm{Ric})(e_a,e_b,e_c,e_d)=\begin{vmatrix} g_{ac} & g_{ad} \\ R_{bc} & R_{bd}\end{vmatrix}=g_{ac}R_{bd}-g_{ad}R_{bc}$$

のようになる．これらを C に代入して成分による表現を得ることができる．簡単のため $n=4$ とすると

$$\begin{aligned}R_{abcd}=C_{abcd}+\frac{1}{2}[g_{ac}R_{bd}-g_{ad}R_{bc}+R_{ac}g_{bd}-R_{ad}g_{bc}]\\ -(S/6)(g_{ac}g_{bd}-g_{ad}g_{bc})\end{aligned}$$

となる．次元が $n=2$ のときは C はゼロであると定義した．同様に，$n=3$ でも $C=0$ となる (双歪対称性とトレース・フリーであることから分かる).

擬リーマン多様体 M においては，リーマン曲率 R のワイル・テンソルは，**ワイルの共形曲率テンソル** (Weyl conformal curvature tensor) になる．このテンソルは，

名前から分かるようにハーマン・ワイルが発見したもので，計量の共形変換により不変である (Eisenhart 1926). C が恒等的にゼロのとき，M は**共形的に平坦**である，と呼ばれる．つまり，M は，局所的に，同じ指数，同じ次元をもつミンコフスキー空間と，共形的に同値なのである．

この節で一般的なテンソルとして述べたことを，次元を $n = \dim V = 4$ として用いて行くことにする．よって，例えば，曲率のような (0,4) 型のテンソルは $4^4 = 256$ 個の数値により決定される．つまり，(0,4) 型テンソル全体のベクトル空間は 256 次元なのである．

双歪対称テンソルは，6 次元空間 Λ^2 上の双線形形式と対応が付く．よって 36 次元である．もし組対称ならば，次元は $6 \cdot 7/2 = 21$ となる．

双歪対称のとき，巡回対称性はベクトルが 4 個とも異なる場合 (つまり，添字が全て異なる場合) のみを考えればよい．つまり，例えば，

$$F_{0123} + F_{0231} + F_{0312} = 0$$

だけでよいのである．したがって，V 上の曲率の次元は 20 である．

曲率 R に縮約 C を行うとリッチ曲率ができる．これは V 上の対称双線形形式である．そして逆に，このような形式は，ある曲率のリッチ曲率になっている．ちなみに，定義 5.1.5 を書き直した $R - C$ も曲率である (これが曲率であることは，定義 5.1.3 の下の記述から分かる). 今の場合，リッチ曲率は 10 次元となり，C は，曲率全体が作る 20 次元空間から 10 次元空間の上への写像になっているのである．写像 C の核がワイル・テンソルである．よってワイル・テンソルの空間は 10 次元である．

まとめてしまうと，V 上の曲率テンソルは 20 個の数値で決定される．同様に，リッチ曲率は 10 個，ワイル曲率も 10 個の数値で決定されるのである．

5.2 ホッジのスター作用素

スカラー積をもつ向き付け可能な空間 V 上で定義されるホッジのスター作用素は，部分空間 Π をその直交補空間 $\Pi^\perp$ へ移す幾何学的な作用素の代数版といえるものである．形式的には，**ホッジのスター作用素** (Hodge star operator) $*$ は，各 $0 \le p \le n = \dim V$ に対して，$\Lambda^p(V)$ から $\Lambda^{n-p}(V)$ への線形同型写像であり，2 度作用させると $*^2 = \pm id$ を満たすもの，として定義される．この符号 $\pm$ は，n, p, それに V の指数 ν で決定される．この作用素が具体的に必要となるのは，時空の 2 重

ベクトルの場合であり，このとき $n=4,p=2,\nu=1$ である．ホッジのスター作用素は，ペトロフ・タイプの分類を簡単にするのに役立つものである．

この一般的な定義を4次元のローレンツ・ベクトル空間 V に適用するため，先ず V に**向き** (orientation) ω を与える．これは，$\Lambda^4(V) \approx R$ の2個の単位4ベクトルのうちの1つである (付録Dを見よ)．このとき，V の任意の正規直交基底 e_0,e_1,e_2,e_3 に対して $e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 = \pm\omega$ と書ける．この符号が正のとき，その基底は**正の向き付けを持つ** (positive oriented), と呼ばれる．

注意 5.2.1　いま，e_0,e_1,e_2,e_3 を4次元ローレンツ・ベクトル空間 V の正規直交基底とする．特に問題がないときには，e_0 が時間的であるとする．5.1節で述べたように，2重ベクトル

$$e_0 \wedge e_1,\ e_0 \wedge e_2,\ e_0 \wedge e_3,\ e_1 \wedge e_2,\ e_1 \wedge e_3,\ e_2 \wedge e_3$$

が，6次元空間 $\Lambda^2 = V \wedge V$ の正規直交基底になっているのである．しかし後で分かるように，右側3個の2重ベクトルを修正し，

$$e_0 \wedge e_1,\ e_0 \wedge e_2,\ e_0 \wedge e_3;\ e_2 \wedge e_3,\ e_3 \wedge e_1,\ e_1 \wedge e_2$$

とした**ホッジ基底** (Hodge basis) を使う方が便利である．いま，〈先の3個〉のうちの1つと〈後の3個〉のうちの1つと楔積を作ると

$$e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 = e_0 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_1 = e_0 \wedge e_3 \wedge e_1 \wedge e_2$$

となり，向きは同じ方向となっている．ここで e_0 が時間的であるから，先の3個の2重ベクトルは時間的で，後の3個の2重ベクトルは空間的である (つまり，Λ^2 の指数は3である)．‖

Λ^2 において線形代数を展開するときには，2重ベクトルの添字は，$i=1,2,\ldots,6$ とせず，**ホッジの2重添字** (Hodge double index) 01, 02, 03, 23, 31, 12 を使うことにする．

ホッジのスター作用素 $*$ は，2次元平面における作用素 $\Pi \to \Pi^\perp$ の代数版であるから，$\mathrm{Span}\{v,w\} = \Pi$ を満たす可約な2重ベクトル $v \wedge w \neq 0$ を，$\mathrm{Span}\{x,y\} = \Pi^\perp$ を満たす2重ベクトル $v \wedge w \neq 0$ へ移すはずである．(付録Dで述べてあるように，$v \wedge w$ は，Π だけでなく Π の向きも決定する．直感通りに，v から W へ向かう回転

を正としている.) また，**符号を除いて** $*$ が 2 重ベクトルのスカラー積を保存するならば，上記のように，ホッジ基底間で

$$e_0 \wedge e_1 \leftrightarrow e_2 \wedge e_3, \quad e_0 \wedge e_2 \leftrightarrow e_3 \wedge e_1, \quad e_0 \wedge e_3 \leftrightarrow e_1 \wedge e_2$$

なる対応を，**符号を別にして**与えることができるはずである．正定値計量の場合には，この対応で，符号も含めて $*$ を決定することができる．ローレンツ計量の場合には，因果律と向きが，次のように $*$ と結びついている．

命題 5.2.2　4 ベクトル ω が V の向きを与えているとする．線形作用素 $*: \Lambda^2 \to \Lambda^2$ で，任意の $\xi, \eta \in \Lambda^2 = \Lambda^2(V)$ に対して公式 $\xi \wedge *\eta = -<\xi, \eta>\omega$ を満たすものが一意に存在する．この公式を**ホッジの恒等式** (Hodge identity), この作用素を**ホッジのスター作用素** (Hodge star operator) と呼ぶ．

(本書ではマイナスを入れた式を採用する．このマイナスをとると，以下の各式が共役の式になる.)

証明　(1) 一意性．条件を満たす作用素を $*$ と $\star$ とする．このとき

$$\xi \wedge *\eta = -<\xi, \eta>\omega = \xi \wedge \star\eta, \qquad \xi, \eta \in \Lambda^2$$

である．いま η を固定する．このとき，任意の ξ に対して $\xi \wedge (*\eta - \star\eta) = 0$ である．ここで ξ に，Λ^2 の基底である 2 重ベクトル $e_a \wedge e_b$ を代入して，$*\eta - \star\eta = 0$ となる．よって $* = \star$ である．

(2) 存在性．V の基底で正の向きが与えられたもの e_0, e_1, e_2, e_3 を 1 つ固定する．つまり $e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 = \omega$ である．いま，補題 5.2.3 の (1) で $*$ を定義する．直接計算をすれば，任意の 2 重ベクトルに対して

$$e_a \wedge e_b \wedge *(e_c \wedge e_d) = -<e_a \wedge e_b, e_c \wedge e_d>\omega$$

を得る．ここで，例えば $a = c = 0, b = d = 2$ とすると，$*(e_0 \wedge e_2) = e_3 \wedge e_1$ であるから，左辺は

$$e_0 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_1 = e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 = \omega$$

となる．右辺は $<e_0 \wedge e_2, e_0 \wedge e_2> = -1$ となり，与公式は成立する．このように，Λ^2 の基底を作る 2 重ベクトルそれぞれについて検算し，$\xi \wedge *\eta = -<\xi, \eta>\omega$ が成立することが分かる．この式は ξ と η で双線形であるから，任意の 2 重ベクトルについて成立することになる．□

補題 5.2.3　ホッジのスター作用素 $*$ は次の性質を持つ．

(1) V の基底で正の向きが与えられたものを e_0, e_1, e_2, e_3 とすると，

$$*(e_0 \wedge e_1) = e_2 \wedge e_3, \qquad * (e_2 \wedge e_3) = -e_0 \wedge e_1,$$
$$*(e_0 \wedge e_2) = e_3 \wedge e_1, \qquad * (e_3 \wedge e_1) = -e_0 \wedge e_2,$$
$$*(e_0 \wedge e_3) = e_1 \wedge e_2, \qquad * (e_1 \wedge e_2) = -e_0 \wedge e_3$$

が成立する．

(2) $*^2 = -id.$

(3) $*$ は自己共役である．つまり，任意の $\xi, \eta \in \Lambda^2$ に対して $< * \xi, \eta > = < \xi, *\eta >$ が成立する．

証明　(1) 命題 5.2.2 の証明から示される．ここに与えられた基底を命題 5.2.2 の証明に使えば，その 6 個の式からホッジのスター作用素 $*$ が決定されるわけだが，それを書き換えたのがこれらの式である．

(2) (1) の式から $*^2 = -id$ が分かる．

(3) 2 重ベクトルは楔積で可換であるから，ホッジの恒等式 $\xi \wedge *\eta = - < \xi, \eta > \omega$ から

$$< *\xi, \eta > \omega = - * \xi \wedge *\eta = - *\eta \wedge *\xi$$
$$= < *\eta, \xi > \omega = < \xi, *\eta > \omega$$

となる．□

この補題の (2) にマイナスの符号があるので，時空の 2 重ベクトルの場合，つまり $n = 4, p = 2, \nu = 1$ では，**ホッジのスター作用素は Λ^2 上の複素構造となる**．すなわち，Λ^2 は，複素数 $a + ib$ との積を

$$(a + ib)\xi = a\xi + b(*\xi), \quad a, b \in R$$

で与えてスカラー積を定義し，複素ベクトル空間となる．つまり $\boldsymbol{i}\xi = *\xi$ である．複素ベクトル空間としての Λ^2 の次元は 3 である．例えば $\{e_0 \wedge e_1, e_0 \wedge e_2, e_0 \wedge e_3\}$ が基底となる．この基底に対し，$\boldsymbol{i}$ によるスカラー積 を行うと $\{e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_1, e_1 \wedge e_2\}$ となる．

Λ^2 を複素ベクトル空間とみなすときには，Λ^2_{cx} と書くことにする．Λ^2 上のスカラー積 $< , >$ から，次のように，Λ^2_{cx} 上の複素スカラー積が定義される．

定義 5.2.4 任意の $\xi, \eta \in \Lambda^2$ に対して

$$\boldsymbol{g}(\xi, \eta) = <\xi, \eta> - \boldsymbol{i} <\xi, *\eta>$$

と定義する.

ここのマイナス符号は，$*$ の符号の取り方に関係するものではない．次の関係式のためのものである.

補題 5.2.5 $\boldsymbol{g}$ は，Λ^2_{cx} 上の複素スカラー積である.

証明 (1) 対称性．$*$ が $<\ ,\ >$ (これはむろん対称である) に関して自己共役であるから，

$$\boldsymbol{g}(\xi, \eta) = <\xi, \eta> - \boldsymbol{i}\ <\xi, *\eta> = <\eta, \xi> - \boldsymbol{i}\ <\eta, *\xi> = \boldsymbol{g}(\eta, \xi),$$

となる．(つまり，$\boldsymbol{g}$ は**エルミート積ではない**.)

(2) 複素数範囲での双線形性．明らかに，$\boldsymbol{g}$ は実数に関して双線形である．$\boldsymbol{g}$ は対称であるから，左側の係数 $\boldsymbol{i}$ が $\boldsymbol{g}$ の外に出ることを示せばよい．$\boldsymbol{i}\,\xi$ は $*\xi$ である．よって $*$ の性質から

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{i}\xi, \eta) &= <*\xi, \eta> - \boldsymbol{i} <*\xi, *\eta> = <\xi, *\eta> - \boldsymbol{i} <\xi, **\eta> \\ &= -\boldsymbol{i}^2 <\xi, *\eta> + \boldsymbol{i} <\xi, \eta> = \boldsymbol{i}(-\boldsymbol{i} <\xi, *\eta> + <\xi, \eta>) \\ &= \boldsymbol{i}(<\xi, \eta> - \boldsymbol{i} <\xi, *\eta>) = \boldsymbol{i}\boldsymbol{g}(\xi, \eta)\end{aligned}$$

となる.

(3) 非退化性．いま，ξ に対して，任意の $\eta \in \Lambda^2$ で $\boldsymbol{g}(\xi, \eta) = 0$ となったとする．$\boldsymbol{g}(\xi, \eta)$ の実数部分は $<\xi, \eta>$ であるから，$<\ ,\ >$ が非退化であることから $\xi = 0$ となる．□

Λ^2 上におけるホッジのスター作用素 $*$ は $\boldsymbol{i}$ によるスカラー倍であるから，Λ^2 上の実数線形作用素が複素線形になるための必要十分条件は，それが $*$ と可換となることである.

注意 5.2.6 いま，Λ^2 上の線形作用素 T が，$<,>$ に関して自己共役で $*$ と可換で

あるとする．このとき T は $\boldsymbol{g}$ に関しても自己共役となる．実際，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}(T\xi,\eta) &=< T\xi,\eta > - \boldsymbol{i} < T\xi, *\eta >=< \xi, T\eta > - \boldsymbol{i} < \xi, T(*\eta) > \\ &=< \xi, T\eta > - \boldsymbol{i} < \xi, *T\eta >= \boldsymbol{g}(\xi, T\eta)\end{aligned}$$

である．‖

最後に，ホッジのスター作用素が2重ベクトルの因果的特性に与える効果について調べる．先ず，2重ベクトルが**分解可能** (decomposable) とは，それが2つのベクトルの楔積で書けることをいう (付録D). 分解可能な零的2重ベクトルが重要となる．それが，V の零的方向を決定するのである．

補題 5.2.7　2重ベクトル $\delta \in \Lambda^2(V)$ が零的で分解可能 であるための必要十分条件は，零的ベクトル $v \in V$ と $0 \neq x \perp v$ を満たす空間的ベクトル x で $v \wedge x$ と書けることである．ここに v は，ゼロ以外のスカラー倍を除いて一意に決まる．よって，δ は V の零的直線 $N(\delta) = Rv$ を決定することになる．

証明　条件のように V と X を決めると，明らかに，$v \wedge x$ は零的で分解可能である．逆に，δ を零的 (よって，定義からゼロではない) とし，それが $y \wedge z$ と書けたとする．このとき

$$0 =< y \wedge z, y \wedge z >=< y, y >< z, z > - < y, z >^2$$

となる．これは，平面 $\Pi = \mathrm{Span}\{y, z\}$ の因果的特性が零的であることの条件である (1.5節). よって補題 1.5.11 より，Π はある零的ベクトル v を含み，このベクトルはスカラー積を除いて一意に決まる．(幾何学的にいえば，Rv は直線 $\Pi \cap \Lambda$ であり，この直線に沿って Π は V の零円錐 Λ に接している.) Π 内で v に独立な x をとれば，x は空間的であり $v \wedge x \neq 0$ である．いま $\dim \Pi = 2$ であるから，δ と $v \wedge x$ は従属である．よって，必要なら x を伸ばして，$\delta = v \wedge x$ となる．□

命題 5.2.8　$\Lambda^2 = V \wedge V$ 上のホッジのスター作用素は次の性質を持つ．

(1) $*$ は因果律を逆転する (つまり，空間的と時間的が逆になり，零的は零的のままとなる).

(2) 2重ベクトルが分解可能である．$\Leftrightarrow \beta \wedge \beta = 0 \Leftrightarrow *\beta$ が分解可能である．$\Leftrightarrow *\beta \perp \beta$

(3) 補題 5.2.7 で述べたような分解可能零的 2 重ベクトル $\delta = v \wedge x$ に対し，$*(v \wedge x) = v \wedge y$ が成立する．ここに，x, y, v はそれぞれ直交で $|y| = |x| > 0$ である．(直観的にいえば，$*$ は，旗 δ を旗竿 $N(\delta) = Rv$ の周りに 90 度回転させるのである.)

証明　(1) $*$ は自己共役で $*^2 = -id$ が成立するので

$$< *\beta, *\beta > = < \beta, **\beta > = - < \beta, \beta >$$

となる．

(2) 一般に，2 重ベクトル β が分解可能である条件は $\beta \wedge \beta = 0$ である (付録 D で示す). これは $*\beta \perp \beta$ と同値である．実際，ホッジの恒等式から

$$< \beta, *\beta > = 0 \Leftrightarrow \beta \wedge **\beta = 0 \Leftrightarrow \beta \wedge \beta = 0$$

となる．よって

$$\begin{aligned} \beta \text{が分解可能}\ &\Rightarrow < *\beta, \beta > = 0 \\ &\Rightarrow *\beta \wedge *\beta = 0 \Rightarrow *\beta \text{ が分解可能} \end{aligned}$$

が出る．逆に，$*\beta$ が分解可能ならば $**\beta = -\beta$ も分解可能である．

(3) いま x は空間的であるから，$x^\perp$ は 3 次元のローレンツ・ベクトル空間である．ここで正規直交基底 e_0, e_1, e_2 を，$v = c(e_0 + e_1)$ となるようにとる．このとき，$e_0, e_1, e_2, e_3 = x/|x|$ は V の正規直交基底で，$x = de_3$ である．そして，補題 5.2.3 より

$$\begin{aligned} *(v \wedge x) &= *cd(e_0 \wedge e_3 + e_1 \wedge e_3) \\ &= cd(e_1 \wedge e_2 + e_0 \wedge e_2) \\ &= c(e_0 + e_1) \wedge (de_2) = v \wedge y \end{aligned}$$

となる．ここに $y = de_2$ である．この y が求める条件を満たしている．□

補題 5.2.7 で述べた変換 $\delta \to N(\delta)$ は 5.5 節で重要な役割をする．なお，δ に複素数 $z = a + ib \neq 0$ を掛けても，それも零的で分解可能であり，$N(z\delta) = N(\delta)$ が成立する．この事実は，v, x, y が各々直交するとして

$$\begin{aligned} z\delta &= (a + ib)(v \wedge x) = a(v \wedge x) + b * (v \wedge x) \\ &= v \wedge ax + v \wedge by = v \wedge (ax + by) \end{aligned}$$

なので，上記の命題の (3) から分かる．つまり，分解可能な零的2重ベクトルで $N(\delta)$ を構成するものは，Λ^2_{cx} 内で δ を通る複素直線を形成しているのである．

5.3　可換性

この節では，時空の2重ベクトルにおいて，ワイルの曲率作用素 $\mathbb{C}: \Lambda^2 \to \Lambda^2$ とホッジのスター作用素 $*$ が可換となることを示すことを目的とする．つまり，ワイルの作用素が**複素線形作用素**になるのである．そのためには，Λ^2 の任意の基底をとり，各作用素を表す行列が可換となることを示せばよい．ここでは基底として，ホッジ基底

$$e_0 \wedge e_1,\ e_0 \wedge e_2,\ e_0 \wedge e_3;\ e_2 \wedge e_3,\ e_3 \wedge e_1,\ e_1 \wedge e_2$$

を使うことにする (注意 5.2.1 を見よ). 実際の証明は，もう少し広い設定で行う．

擬リーマン多様体で，そのリッチ・テンソルが計量テンソル g の定数倍となっているものをアインシュタイン多様体と呼ぶ．このことを敷衍して，V の双歪対称，組対称 (0,4) テンソル F において，そのリッチ・テンソル $\mathrm{C}F$ が V のスカラー積の定数倍となっているとき，つまり $\mathrm{C}_{13}F = k <\,,\,>$ であるとき，F は**アインシュタイン** (Einstein) である，という．(ここでは，曲率の巡回対称は仮定されていない.)

命題 5.3.1　F は，V 上の歪対称，組対称の (0,4) テンソルであるとする．

(1) F がアインシュタインであるための必要十分条件は，(これを Λ^2 上の対称双線形写像とみて) Λ^2 の任意のホッジ基底に関する F の行列が

$$\langle F \rangle = \begin{bmatrix} A & B \\ B & -A \end{bmatrix}$$

なる形をすることである．ここに，A と B は 3×3 対称行列である．

(2) さらに，F をアインシュタインとすると次が成立する．F が巡回対称．$\Leftrightarrow$ trace $B = 0$. F がトレース・フリーである．$\Leftrightarrow$ trace $A = 0$.

証明　(1) V の正規直交基底 $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ を1つ固定する．このとき，$\mathrm{C}_{13}F = k <\,,\,>$ は $\Sigma \varepsilon_m F_{mamb} = k\delta_{ab}\varepsilon_b$ と書ける．ここに，$\varepsilon_b =< e_b, e_b >$，$F_{abcd} =$

$F(e_a, e_b, e_c, e_d)$ である．対称性から，この中の $10 = 4 \cdot 5/2$ 個の式を調べればよい．これらの式を，添字 (ab) を使い，

$$
\begin{aligned}
&(00) \quad F_{1010} + F_{2020} + F_{3030} = -k \\
&(11) \quad -F_{0101} + F_{2121} + F_{3131} = k \\
&(22) \quad -F_{0202} + F_{1212} + F_{3232} = k \\
&(33) \quad -F_{0303} + F_{1313} + F_{2323} = k \\
&(01) \quad F_{2021} + F_{3031} = 0 \\
&(02) \quad F_{1012} + F_{3032} = 0 \\
&(03) \quad F_{1013} + F_{2023} = 0 \\
&(23) \quad -F_{0203} + F_{1213} = 0 \\
&(31) \quad -F_{0301} + F_{2321} = 0 \\
&(12) \quad -F_{0102} + F_{3132} = 0
\end{aligned}
$$

と並べておく．先ず，最初の 4 個の式は

$$k = -F_{0101} - F_{0202} - F_{0303} = F_{2323} + F_{3131} + F_{1212}$$

および

$$\alpha \begin{cases} F_{0101} + F_{2323} = 0 \\ F_{0202} + F_{3131} = 0 \\ F_{0303} + F_{1212} = 0 \end{cases}$$

となる．残りの 2 組の式を，ホッジの 2 重添字 01,02,03,23,31,12 で書いて

$$\beta \begin{cases} F_{0212} = F_{3103} \\ F_{0112} = F_{2303} \\ F_{0131} = F_{2302} \end{cases} \qquad \gamma \begin{cases} F_{0203} + F_{3112} = 0 \\ F_{0103} + F_{2312} = 0 \\ F_{0102} + F_{2331} = 0 \end{cases}$$

となる．

前節で述べたように，F は Λ^2 上の対称双線形形式とみなせるから，ホッジ基底 $\{e_a \wedge e_b\}$ に関する行列 $\langle F \rangle$ は，成分

$$F(e_a \wedge e_b, e_c \wedge e_d) = F(e_a, e_b, e_c, e_d) = F_{ab,cd}$$

を持つ 6×6 行列である．ここに，ab と cd はホッジの 2 重添字である．この $\langle F \rangle$ を，3×3 行列 A, B, C, D を用いて

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

と書く．

F は組対称であるから，$\langle F \rangle$ は対称である．よって，A と D は対称で ${}^tB = C$ である．ゆえに，下半分を省略して $\langle F \rangle$ は

	01	02	03	23	31	12
01	F_{0101}	F_{0102}	F_{0103}	F_{0123}	F_{0131}	F_{0112}
02		F_{0202}	F_{0203}	F_{0223}	F_{0231}	F_{0212}
03			F_{0303}	F_{0323}	F_{0331}	F_{0312}
23				F_{2323}	F_{2331}	F_{2312}
31					F_{3131}	F_{3112}
12						F_{1212}

と書ける．

さて，組 α の式から，A と D の対角成分は，符号が逆になっていることが分かる．同様に，組 γ から，他の成分も，絶対値が同じで符号だけが異なることが分かる．よって $D = -A$ である．

$\langle F \rangle$ は対称であるから，組 β から，行列 B は対称である．そして，${}^tB = C$ から $C = B$ となる．以上より，F がアインシュタインとなる条件は，$\langle F \rangle$ が，与えられた形をすることであることが分かる．

(2) 先に述べたように，F が巡回対称 (定義 5.1.1) であることは

$$F_{0123} + F_{0231} + F_{0312} = 0$$

と同値である．そしてこれは trace B に他ならない．

また，$\mathsf{C}_{13}F = k < , >$ であるから，F がトレース・フリーである条件は $k = 0$ である．しかるに上記の (0,0) 式から $A = -k$ である．□

注意 5.3.2　2 重添字を簡潔にして，計算をもっと簡単にすることもできる．V の正規直交基底で正の向きを持つものを $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ とする．いま，$\lambda = ab$ で 2 重添

字 01, 02,03, 23, 31, 12 を表し，2 重ベクトルを e_λ, その符号を ε_λ と書くことにする．つまり，$e_\lambda = e_a \wedge e_b$, $\varepsilon_\lambda = \varepsilon_a \varepsilon_b$ である．この ε_λ **が** e_λ **の符号である**ことは，

$$
\begin{aligned}
< e_\lambda, e_\lambda > &=< e_a \wedge e_b, e_a \wedge e_b > \\
&=< e_a, e_a >< e_b, e_b > - < e_a, e_b >^2 = \varepsilon_a \varepsilon_b = \varepsilon_\lambda
\end{aligned}
$$

から分かる．また，ギリシャ文字 $\alpha, \beta, \ldots$ で 2 重添字 01, 02, 03 の〈先の方〉を表すことにする．対応する 2 重添字の〈後の方〉はダッシュを付けて表す．つまり，$\alpha = 01$ ならば $\alpha' = 23$ である．‖

このように記号を決めると，Λ^2 のホッジ基底 は $\{e_a, e_{\alpha'}\}$ と書ける．これにホッジのスター作用素を作用させると

$$
*(e_\alpha) = e_{\alpha'}, \quad *(e_{\alpha'}) = -e_\alpha
$$

となり (補題 5.2.2), 命題 5.3.1 の (1) で述べた行列 $\langle F \rangle$ は

$$
F_{\alpha\beta} + F_{\alpha'\beta'} = 0, \quad F_{\alpha\beta'} = F_{\alpha'\beta}
$$

となる．

Λ^2 上の線形作用素関する行列については，次の一般的な表記を用いることにする．X の基底 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ に関して，行列 $T: X \to X$ は $(a^i{}_j)$ と書く．ここに，任意の j に対して $T(x_j) = \Sigma a^i{}_j x_i$ である．(抽象線形代数学の場合と正定値計量を持つ場合では，添字 i をそのまま下に降ろして書いてもよい.)

1.2 節で述べた添字の上げ下げの規則は，2 重添字の場合でも成立する．つまり，V 上の歪対称，組対称な (0,4) テンソルを F とし，それに対応する (自己共役な) 線形作用素を $\mathbb{F}: \Lambda^2 \to \Lambda^2$ とすると，Λ^2 のホッジ基底 $\{e_\lambda\}$ に関する $\mathbb{F}$ の行列 $[\mathbb{F}]$ は $(F^\lambda{}_\mu)$ となる．ここに $F^\lambda{}_\mu = \varepsilon_\lambda F_{\lambda\mu}$ である．もし $\lambda = ab$, $\mu = cd$ ならば $F_{\lambda\mu} = F_{abcd} = F(e_a, e_b, e_c, e_d)$ である．

系 5.3.3 V 上の歪対称，組対称な (0,4) テンソルを F とする．F がアインシュタインであるための必要十分条件は，対応する Λ^2 上の線形作用素 $\mathbb{F}$ がホッジのスター作用素 $*$ と可換となることである．

証明 Λ^2 上のホッジ基底 $\{e_\alpha, e_{\alpha'}\}$ に関する F と $\mathbb{F}$ の行列を，それぞれ $\langle F \rangle$, $[\mathbb{F}]$

とする．命題 5.3.1 より，

$$F \text{ がアインシュタイン } \Leftrightarrow \langle F \rangle = \begin{bmatrix} A & B \\ B & -A \end{bmatrix}$$

である．上記の注意より，$\langle F \rangle$ がこの形となるための条件は $[\mathbb{F}]$ が

$$\begin{bmatrix} -A & -B \\ B & -A \end{bmatrix}$$

という形になることである．そして，明らかに，$[\mathbb{F}]$ がこの形となるための条件は，これが $*$ の行列，つまり

$$\begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

と可換となることである．これは，$\mathbb{F}$ と $*$ が可換であることに等しい．□

このことから，時空がアインシュタイン多様体であるための必要十分条件は，各点においてその曲率テンソルがホッジのスター作用素と可換となることである，が分かる．この事実は，断面曲率を用いるとより直裁的に述べることができる (Thorpe 1969).

系 5.3.4　時空 M がアインシュタイン多様体であるための必要十分条件は，直交する (非退化) 2 次元平面の断面曲率が等しくなる，つまり $K(\Pi) = K(\Pi^{\perp})$ が成立することである．

最後に，$\Lambda^2{}_{cx}$ 上の線形作用素に関する，実数行列と複素行列の関係について述べておく．

補題 5.3.5　$\mathbb{F}$ を $\Lambda^2{}_{cx}$ 上の線形作用素とする．Λ^2 のホッジ基底 $\{e_\alpha, e_{\alpha'}\}$ に関する $\mathbb{F}$ の (実) 行列 $[\mathbb{F}]$ を

$$\begin{bmatrix} F^\beta{}_\alpha & F^\beta{}_{\alpha'} \\ F^{\beta'}{}_\alpha & F^{\beta'}{}_{\alpha'} \end{bmatrix}$$

とすると，(複素) 行列 $[\mathbb{F}]_{cx}$ は，$\Lambda^2{}_{cx}$ の基底 $\{e_\alpha\}$ と $\{e_{\alpha'}\}$ に関して $[F^\beta{}_\alpha + \boldsymbol{i}F^{\beta'}{}_\alpha]$ となる．

証明　Λ^2_{cx} において $e_{\beta'} = *(e_\beta) = \boldsymbol{i}e_\beta$ であるから，

$$\begin{aligned}\mathbb{F}(e_\alpha) &= \Sigma_\lambda F^\lambda{}_\alpha e_\lambda = \Sigma F^\beta{}_\alpha e_\beta + \Sigma F^{\beta'}{}_\alpha e_{\beta'} \\ &= \Sigma F^\beta{}_\alpha e_\beta + \boldsymbol{i}\Sigma F^{\beta'}{}_\alpha e_\beta = \Sigma_\beta (F^\beta{}_\alpha + \boldsymbol{i}F^{\beta'}{}_\alpha)\, e_\beta\end{aligned}$$

となる．基底 $\{e_{\alpha'}\}$ は $\boldsymbol{i}$ によるスカラー倍であるから，同じ行列を得る．□

5.4　ペトロフの分類

本節では，4 次元の向き付けられたローレンツ・ベクトル空間 V で定義されたトレース・フリーの曲率に関するペトロフの分類を述べる．この分類を，時空の各点においてワイルの共形テンソルに利用するのである．

V 上のトレース・フリーの曲率を C，それから Λ^2 に導入された線形作用素を $\mathbb{C}$ とする．もちろんトレース・フリーの曲率は ($k=0$ である) アインシュタインであるから，系 5.3.3 より，$\mathbb{C}$ は，ホッジのスター作用素と可換であり，Λ^2_{cx} 上の複素線形作用素となる．次の注意で，$\mathbb{C}$ の (複素) トレースがゼロであることが分かる．

注意 5.4.1　V 上の歪対称，組対称 (0,4) テンソルを F とする．このとき $\mathrm{trace}_{\,cx}\mathbb{F} = 0$ であるための必要十分条件は，F がトレース・フリーで巡回対称となること (したがって F はトレース・フリーの曲率) である．この事実は，5.3 節の表記を使えば，

$$\langle F \rangle = \begin{bmatrix} A & B \\ B & -A \end{bmatrix}$$

のとき

$$[\mathbb{F}] = \begin{bmatrix} -A & -B \\ B & -A \end{bmatrix}, \quad [\mathbb{F}]_{cx} = -A + \boldsymbol{i}B$$

であるから，命題 5.3.1 より分かる．‖

3 次元複素ベクトル空間上のトレースがゼロである線形作用素は，固有値によって分類される．ペトロフが最初 (1954 年) に行った分類では，アインシュタイン多様体 ($\mathrm{Ric} = kg$) のリーマン曲率変換 $\mathbb{R}$ を，各点で，独立な固有値の数 $\{3, 2, 1\}$ で 3 個に分けている (Thorpe 1969 の簡潔な計算を見よ)．この分類を**ワイル曲率**に制限すれば，時空への応用が可能となる．また，この分類の最初の 2 個は，さらに 2 個ずつに分け

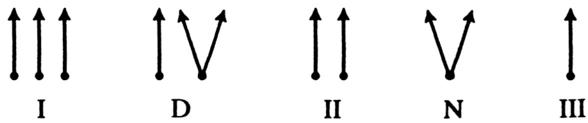


図 5.1　$\mathbb{C}$ の固有値で記述したペトロフ・タイプ．左から右へ，矢印の始点がつながり，1 本にまとまることに注意．

られる．(固有値 λ の重複度は，幾何学的にいえば，固有空間 E_λ，つまり λ に属する固有ベクトルが張る部分空間の次元である.)

補題 5.4.2　4 次元ローレンツ・ベクトル空間 V のトレース・フリーな曲率 $C \neq 0$ は，それから導入される Λ^2_{cx} 上の線形作用素 $\mathbb{C}$ でいえば，次のような 5 つのペトロフ・タイプに分類される．

I 型　$\mathbb{C}$ は異なる 3 個の固有値を持つ．

D 型　$\mathbb{C}$ は，異なる 2 個の固有値を持ち，対角化可能である．

II 型　$\mathbb{C}$ は異なる 2 個の固有値を持つ．各固有値の重複度は 1 である．

N 型　$\mathbb{C}$ は固有値を 1 個だけ持ち，それはゼロである．その重複度は 2 である．

III 型　$\mathbb{C}$ は固有値を 1 個だけ持ち，それはゼロである．その重複度は 1 である．

(これらの型を図示すると図 5.1 のようになる.)

証明　$\mathbb{C}$ の (重複を含めた) 3 個の固有値の重複度の和 σ について考える．

もし $\sigma = 3$ ならば，$\mathbb{C}$ は対角化可能である．通常の場合，つまり I 型では，$\mathbb{C}$ の固有値は異なっている．D 型，つまり〈退化している〉場合では，2 個だけが異なっている．3 個の固有値が等しくなることはない．なぜなら，trace $\mathbb{C} = 0$ より $\mathbb{C} = 0$ となり，これは条件に反する．

もし $\sigma = 2$ ならば，通常の場合，つまり II 型では，異なる固有値は 2 個であり，それらの重複度は 1 である．退化している場合の N 型では，固有値は等しくなり，trace $\mathbb{C} = 0$ から，それらはゼロとなる．

もし $\sigma = 1$ ならば，3 個の固有値が等しく，それらはゼロである．つまり III 型である．□

型	$\langle g \rangle$ の行列	$[\mathbb{C}]$ の行列	状況
I, D	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$	$\Sigma\lambda_j = 0$ I: λ_j 異なる D: $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda, \lambda_1 = -2\lambda$
II, N	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$	II: $\lambda \neq 0$ N: $\lambda = 0$
III	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	

表 5.2 各ペトロフ・タイプにおける $\langle g \rangle$ と $[\mathbb{C}]$ の標準形．いずれの場合でも，行列 $\langle g \rangle$ に-1 を掛けても $[\mathbb{C}]$ は不変であることに注意．(Λ^2_{cx} の基底でいえば，i によるスカラー倍をしたことになる.)

ペトロフ・タイプのＩ型 (つまり固有値が全て異なる) が一般的な場合である．それ以外のタイプは，**代数的に特別な場合である**，と呼ばれる．

D 型と II 型の場合，固有値を $-2\lambda, \lambda, \lambda$ と書くことにする．D 型では λ の重複度を 2, II 型ではこの重複度を 1 とする．N 型と III 型では，0 の固有空間が存在するから，$\mathbb{C}$ は非可逆である (I 型でも，固有値の中に 0 があれば非可逆となる.)

$C = 0$ の場合，ペトロフ・タイプで O 型と呼ばれることもある．つまり時空では，0 型は**共形的平坦** (conformally flat) ということである．

標準形の理論を使えば (例えば，Mal'cev 1963 を見よ), Λ^2_{cx} の適当な基底を使い，g と $\mathbb{C}$ の行列を次の表のように書くことができる．

$\mathbb{C}$ の行列 P は 3×3 でトレースが 0 であり，この行列で $\mathbb{C}$ の固有値を計算するこ

とができる．$\mathbb{C}$ のタイプは，特性多項式

$$f(\lambda) = \det(P - \lambda I) = -\lambda^3 + c(P)\lambda + \det P$$

で得ることができる．

下記において，3×3 行列の階数が 1 になるかどうかはすぐに分かる．

補題 5.4.3　$\mathbb{C} \neq 0$ の行列を P とし，$c = c(P), d = \det(P)$ と置く．このとき $\mathbb{C}$ のタイプに対して次が成立する．

(1) I 型 $\Leftrightarrow 27d^2 \neq 4c^3$

(2) N 型 $\Leftrightarrow \text{rank } P = 1 \Leftrightarrow P^2 = 0$

(3) III 型 $\Leftrightarrow c = d = 0, \text{rank } P \neq 1 \Leftrightarrow P^3 = 0, P^2 \neq 0$

(4) D 型あるいは II 型 $\Leftrightarrow 27d^2 = 4c^3 \neq 0$

重複固有値が $\lambda = -3d/2c$ で $\mathbb{C}$ が D 型 $\Leftrightarrow \text{rank } (P - \lambda I) = 1$

証明　(1) $\mathbb{C}$ の固有値，つまり $f(\lambda)$ の解が異なる条件は，f と微分 f' が互いに素となることである．ユークリッドのアルゴリズムから，これは $d - 4c^3/27d \neq 0$ となる．

(2) および (3) N 型，あるいは III 型 $\Leftrightarrow$ 固有値は 0 のみ $\Leftrightarrow f(\lambda) = -\lambda^3 \Leftrightarrow c = d = 0$, N 型は 2 個の独立な固有ベクトルを持つから，$\text{rank } (P - 0I) = \text{rank } (P) = 1$ である．III 型ではこの階数が 2 である．N 型と III 型の場合のみ全ての固有値が 0 であるから，行列 P のジョルダン標準形は，それぞれ，

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる．これから，P^2, P^3 についての結論が分かる．

(4) 上記のことから，D 型，あるいは II 型 $\Leftrightarrow 27d^2 = 4c^3 \neq 0$ が分かる．ユークリッドのアルゴリズムから，(f, f') の最大公約因子は $(9d/2c)\lambda + c$ である．つまり，$\lambda = -2c^2/9d$ が重複固有値であり，$27d^2 = 4c^3$ であるから，$\lambda = -3d/2c$ となる．この中で，λ が $(P - \lambda I) = 1$ を満たすものが D 型である．□

別な形によるペトロフ・タイプの記述に関しては，Kramer, et al, の本 (1980) の 4.4 節を見よ．

系 5.4.4　カー時空は D 型である．

証明　カー時空 K はリッチ平坦であるから，ワイル・テンソルは曲率テンソル R に帰着する．いま，$\{E_a\}$ をボイヤー－リンキスト標構場 (定義 2.6.1) とする．先ず，ブロック I と III を考える．ここでは E_0 が時間的ベクトルであり，ホッジの 2 重添字は 01,02,03,23,31,12 となる．定理 2.7.2 で $\varepsilon = \mathrm{sgn}\Delta = +1$ として，曲率形式は

$$\begin{aligned}
\Omega^0{}_1 &= 2\mathbf{I}\,\omega^0\wedge\omega^1 - 2\mathbf{J}\omega^2\wedge\omega^3 & \Omega^2{}_3 &= 2\mathbf{J}\omega^0\wedge\omega^1 + 2\mathbf{I}\omega^2\wedge\omega^3\\
\Omega^0{}_2 &= -\mathbf{I}\omega^0\wedge\omega^2 + \mathbf{J}\omega^3\wedge\omega^1 & \Omega^3{}_1 &= -\mathbf{J}\omega^0\wedge\omega^2 - \mathbf{I}\omega^3\wedge\omega^1\\
\Omega^0{}_3 &= -\mathbf{I}\omega^0\wedge\omega^3 + \mathbf{J}\omega^1\wedge\omega^2 & \Omega^1{}_2 &= -\mathbf{J}\omega^0\wedge\omega^3 - \mathbf{I}\omega^1\wedge\omega^2
\end{aligned}$$

となる．ここに，

$$\mathbf{I} = \mathrm{M}r\rho^{-6}(r^2 - 3a^2C^2), \quad \mathbf{J} = \mathrm{M}aC\rho^{-6}(3r^2 - a^2C^2)$$

である．

一般に，形式 Ω^a_b に E_c, E_d を代入すれば行列 R^a_{bcd} を得る．上記の場合，添字 b は 0 でないから，符号の変更なしにこの添字を上げることができる．よって，$\{E_a\}$ に関するホッジ基底を用いたとき，2 重添字を ab, cd として，$\mathbb{R}\colon \Lambda^2 \to \Lambda^2$ の行列は

$$R^{ab}{}_{cd} = R^a{}_{bcd} = \Omega^a{}_b(E_c, E_d)$$

となる．ゼロの部分を省略して書くと

$[\mathbb{R}] =$

	01	02	03	23	31	12
01	**2I**			**−2J**		
02		**−I**			**J**	
03			**−I**			**J**
23	**2J**			**2I**		
31		**−J**			**−I**	
12			**−J**			**−I**

である．添字 a を下げると，最初の3行の符号が逆になり，Λ^2 の双線形形式としての R の(対称)行列 $(R_{ab\,cd})$ は

$$\langle\mathbb{R}\rangle = \begin{array}{c|cccccc} & 01 & 02 & 03 & 23 & 31 & 12 \\ 01 & -2\mathbf{I} & & & 2\mathbf{J} & & \\ 02 & & \mathbf{I} & & & -\mathbf{J} & \\ 03 & & & \mathbf{I} & & & -\mathbf{J} \\ & & & & & & \\ 23 & 2\mathbf{J} & & & 2\mathbf{I} & & \\ 31 & & -\mathbf{J} & & & -\mathbf{I} & \\ 12 & & & -\mathbf{J} & & & -\mathbf{I} \end{array}$$

となる．

これが，命題 5.3.1 の行列の最も簡単な形である．

行列 $[\mathbb{R}]$ に補題 5.3.5 を用いると，Λ^2_{cx}上の複素行列として

$$P = [\mathbb{R}]_{cx} = \begin{bmatrix} 2(\mathbf{I}+\boldsymbol{i}\mathbf{J}) & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{I}-\boldsymbol{i}\mathbf{J} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{I}-\boldsymbol{i}\mathbf{J} \end{bmatrix}$$

を得る．この行列は，時間的基底 $\{e_\alpha\}$ でも空間的基底 $\{e_{\alpha'}\}$ でも同じ形になる．なぜなら，先に述べたように，2つの基底の違いは，$\boldsymbol{i}$ によるスカラー倍だけなのである．

もし $\lambda = -\mathbf{I} - \boldsymbol{i}\mathbf{J}$ がゼロにならないなら, P は D 型の固有値 $-2\lambda, \lambda, \lambda$ を持つ．実際，$\rho^2 = r^2 + a^2C^2$ を $(r + \boldsymbol{i}\ aC)(r - \boldsymbol{i}\ aC)$ と書いて，

$$\begin{aligned} \mathbf{I} + \boldsymbol{i}\mathbf{J} &= \mathrm{M}\rho^{-6}\big[r(r^2 - 3a^2C^2) + \boldsymbol{i}\ aC(3r^2 - a^2C^2)\big] \\ &= \mathrm{M}\rho^{-6}(r + \boldsymbol{i}\ aC)^3 = \mathrm{M}(r - \boldsymbol{i}\ aC)^{-3} \end{aligned}$$

である．つまり，**カー時空における $\mathbb{C}$ の重複固有値**は

$$\lambda = -\mathbf{I} - \boldsymbol{i}\mathbf{J} = -\mathrm{M}(r - \boldsymbol{i}\ aC)^{-3}$$

なのである．この関数は，カー時空 K 上ではゼロにならない．関数 r と $C = \cos\vartheta$ が同時にゼロとなるのはリング状特異領域の所であり，これは K ではない．

ここまでの $\langle R\rangle$ の計算ではブロックⅡが抜けていた．このブロックでは，時間的となるのは，E_0 ではなく，E_1 である．しかるに，曲率形式(定理 2.7.2)において $\varepsilon = -1$

として，ホッジの 2 重添字を 10,12,13; 32,03,20 とすると，ブロック II における行列 $\langle R \rangle$ は，上記の $\langle R \rangle$ と同一になる．よって $[\mathbb{R}]$ も同一であり，ブロック II は D 型となる．

連続性から，地平面でも固有値 λ は (ゼロに近づかないので) 同じ形となる．以上より，K 全体で D 型であることが示された．□

この節では大胆に符号を設定したが，これは，最終的な結果をきれいにするためである．このような λ の値は，例えば，Stewart and Walker (1973) と同じである．Chandrasekhar (1983) の設定とは違っている．

5.5 主要零的方向

零的ベクトルを使ってもペトロフ・タイプを記述することができる．この方法は，複素固有値を使う方法ほど直接的ではないが，幾何学的には重要な意味を持っている．例えば，これにより，カー時空の主要零的測地線の曲率による特徴付けを与えることができる．

V 上のトレース・フリー曲率を R とし，これから Λ^2_{cx} 上に導入された線形作用素を $\mathbb{C}$ とする．また，$\Lambda^2 = \Lambda^2(V)$ 上の実スカラー積を $<\ ,\ >$ とし，Λ^2_{cx} 上の複素スカラー積 (定義 5.2.4) を $\boldsymbol{g}$ で表す．(もちろん，C としては時空のワイル・テンソルを念頭においている．)

一般的な定義として，Λ^2_{cx} の 2 重ベクトル β , $\beta \neq 0$ が $\boldsymbol{g}(\beta, \beta) = 0$ を満たすとき，β は $\boldsymbol{g}$ **零的** (g null) と呼ぶことにする．これは，β が零的で分解可能であることと同値である．実際，$\boldsymbol{g}(\beta, \beta) = 0$ である条件は $<\beta, \beta>= 0$ かつ $<\beta, *\beta>= 0$ であるが，この右側の式は分解可能であることを示している (命題 5.2.8 を見よ).

5.2 節で述べたように，分解可能な零的 2 重ベクトル δ は零的直線 $N(\delta) = (v)$ を一意に決定する．そして，δ と同じ複素直線上にある (ゼロでない) 2 重ベクトルは同じ零的方向を示している．

定義 5.5.1 $\boldsymbol{g}$ 零的 2 重ベクトル $\delta \in \Lambda^2_{cx}$ で $\boldsymbol{g}(\mathbb{C}(\delta), \delta) = 0$ を満たすものを，C の **主要零的 2 重ベクトル** (principal null bivector) と呼ぶ．これにより決定される V の零的直線 $N(\delta)$ を，**主要零的方向** (principal null direction) と呼ぶ．そして，この直線上にある (ゼロでない) ベクトルを，**主要零的ベクトル** (principal null vector) と呼ぶ (Debever 1958).

ちなみに，$\mathbb{C}$ の $\boldsymbol{g}$ 零的固有ベクトル δ は，$\mathbb{C}(\delta) = \lambda\delta$ ならば $\boldsymbol{g}(\mathbb{C}\delta, \delta) = \lambda g(\delta, \delta) = 0$

となるから，主要ベクトルである．これにより，主要零的ベクトル v に対する重複度 m が定義できる．

定義 5.5.2　C の主要零的ベクトル $v \in N(\delta)$ は次のような重複度を持つ．

δ が $\mathbb{C}$ の固有ベクトルでないとき $m=1$.

$\mathbb{C}(\delta)=\lambda\delta$ で $\lambda \neq 0$ のとき $m=2$.

$\mathbb{C}(\delta)=0$ で $\dim Ker\,\mathbb{C}=1$ のとき $m=3$.

$\mathbb{C}(\delta)=0$ で $\dim Ker\,\mathbb{C}=1$ のとき $m=4$.

もちろんこれらが成立するのは $C \neq 0$ の場合である．いま v が重複度 m を持つとき，v を m **主要ベクトル** (m principal vector) と呼ぶことにする．さらに，1主要零的ベクトルを**単純** (simple), $m \geq 2$ のものを**重複** (repeated) と呼ぶ．ベクトル v に対するこれらの用語は，v が含まれる2重ベクトル δ と直線 $N(\delta)$ にも適用することにする．

これを使うと，ペトロフ・タイプは次のように特徴づけることができる．

命題 5.5.3　トレース・フリーの曲率 $C \neq 0$ の主要零的方向とペトロフ・タイプは次のような関係がある．

I 型	4個の単純主要零的ベクトル	(1,1,1,1)
II 型	1個の2主要零的ベクトルと2個の単純主要零的ベクトル	(2,1,1)
D 型	2個の2主要零的ベクトル	(2,2)
III 型	1個の3主要零的ベクトルと1個の単純主要零的ベクトル	(3,1)
N 型	1個の4主要零的ベクトル	(4)

(これらを図示すると図5.2のようになる.)

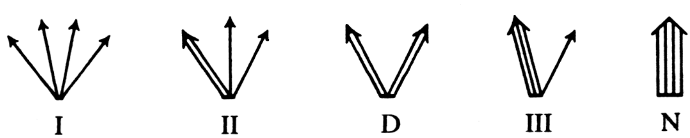


図 5.2　主要零的ベクトルで記述したペトロフ・タイプ．(矢印の形を図 5.1 の場合と比較せよ.)

証明 先ず，C が D 型であるとする．いま，$\mathbb{C}$ の (複素) 固有値を $-2\lambda, \lambda, \lambda$ とし，固有値 -2λ の固有ベクトルを $\xi \in \Lambda^2$ とする．この固有ベクトルに対する $\boldsymbol{g}$ の正規直交基底は，表 5.1 のように，容易に求めることができる．注意 5.2.6 で述べたように，$\mathbb{C}$ は $\boldsymbol{g}$ に関して自己共役であるから，線形代数の理論より，ξは，**$\boldsymbol{g}$ に関して，λ 固有空間 E_λ に垂直**となる．$\boldsymbol{g}$ は非退化であるから，ξ も固有空間 E_λ も，$\boldsymbol{g}$ に関して零的ではない．よって，固有空間 E_λ には，$\boldsymbol{g}$ に関して直交する基底 η_1, η_2 が存在する．必要ならスカラー倍して，2 重ベクトル ξ, η_1, η_2 は全て $\boldsymbol{g}(\zeta, \zeta) = +1$ なる関係を満たすようにする．(複素ベクトル空間における因果的特性は，零的か零的でないか，の 2 種類になる.) 以上より，ξ, η_1, η_2 は，Λ^2 の，$\boldsymbol{g}$ に関する正規直交基底となる．

いま，$\beta \in \Lambda^2$ を $\beta = a\xi + b\eta_1 + c\eta_2$ と書く．この β が主要零的 2 重ベクトルであるための必要十分条件は，

$$(1) \qquad 0 = \boldsymbol{g}(\beta, \beta) = a^2 + b^2 + c^2,$$

$$(2) \qquad 0 = \boldsymbol{g}(\mathbb{C}\beta, \beta) = -2\lambda a^2 + \lambda b^2 + \lambda c^2$$

である．(1) 式に λ を掛けて (2) を引き，$0 = -3\lambda a^2$ を得る．よって $a = 0$ である．したがって，(1), (2) は

$$(3) \qquad b^2 + c^2 = 0$$

となる．β はスカラー倍を除いて決定されるから，$b = 1$ となる．よって $c = \pm \boldsymbol{i}$ で，主要零的 2 重ベクトルは $\eta_1 \pm \boldsymbol{i}\eta_2$ となる．これらは，明らかに，$\mathbb{C}$ の固有値 $l \neq 0$ に対する固有ベクトルとなるから (η_1, η_2 は固有ベクトルである), 定義から，重複度は 2 である．

I 型の場合には少し話しがややこしいので，先ず，II 型を考える．これが D 型と異なるのは，重複固有値が単純固有ベクトルを持つ，という所である．表 5.1 から分かるように (厳密には線形代数の理論を使って), Λ^2 の基底 ξ, ν_1, ν_2 で，$\boldsymbol{g}$ と $\mathbb{C}$ の行列が

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

となるものが存在する．ゆえに，$\beta = a\xi + b\nu_1 + c\nu_2$ と置くと $\mathbb{C}(\beta) = -2\lambda a\xi + (c + \lambda b)\nu_1 + (\lambda c)\nu_2$ となる．これから，2 重ベクトル $\beta \in \Lambda^2$ が主要ベクトルであるための必要十分条件は，

$$(1) \qquad 0 = \boldsymbol{g}(\beta, \beta) = a^2 + 2bc,$$

$$(2) \qquad 0 = \boldsymbol{g}(\mathbb{C}(\beta), \beta) = 2\lambda(-a^2 + bc) + c^2$$

となる．この (1) を使って (2) を簡単にすると

$$(3) \qquad 0 = c(c + 6b\lambda)$$

となる．

場合 1. $c = 0$ のとき．式 (1) より $a = 0$ となり，β は ν_1 である，としてよいことになる．$\mathbb{C}$ に関する式より ν_1 は固有ベクトルであることが分かり，II 型なので $\lambda \neq 0$ であるから，それは $\mathbb{C}$ の核ではない．よって ν_1 は重複度 2 である．

場合 2. $c \neq 0$ のとき．いま $b = -1/2$ とすると，式 (3) から $c = 3\lambda$ となり，式 (1) から $a^2 = 3\lambda$ となる．よって，2 個の主要零的 2 重ベクトルは

$$\beta = \pm\sqrt{3\lambda}\,\xi - \frac{1}{2}\nu_1 + 3\lambda\nu_2$$

となる．これらは，固有ベクトルではないので，重複度は 1 である．

N 型は，上記で $\lambda = 0$ としたものである．また，II 型の証明を少し変えれば，III 型の場合を示すことができる．□

この命題での (合計 4 個の) 添字は，代数幾何学のベズーの定理から分かる．実際，主要零的方向は，複素射影空間 CP^2 における曲線 $\boldsymbol{g}(\delta, \delta) = 0$ と $\boldsymbol{g}(\mathbb{C}\delta, \delta) = 0$ との共通部分から導くことができる．

下記の命題の**ザックスの尺度** (Sachs criteria) では，2 重ベクトルや複素数を仲介とせず，直接，トレース・フリーの曲率とその主要零的ベクトルの関係を与えている．零的ベクトルを検討する場合には，普通の正規直交基底ではなく次のようなものを使うと便利なことが多い．

定義 5.5.4　4 次元ローレンツ・ベクトル空間 V の基底 k, ℓ, x, y において，k と ℓ が零的ベクトルで $< k, \ell >= -1$ を満たし，x と y は，それぞれ正規直交で，かつ k と ℓ に直交しているとする．このときこの基底を**実零的** 4 **組** (real null tetrad) と呼ぶ．

このような 4 組において，$\Pi = \mathrm{Span}\{k, \ell\}$ は時間的であり，$\Pi^\perp = \mathrm{Span}\{x, y\}$ は空間的である．4 組の中のベクトルどうしでは，$< k, \ell >= -1$ と $< x, x >=< y, y >= +1$ 以外は，スカラー積は全てゼロとなる．

いま e_0, e_1, e_2, e_3 を V の正規直交基底とするとき，

$$k = (e_0 + e_1)/\sqrt{2}, \quad \ell = (e_0 - e_1)/\sqrt{2}, \quad x = e_2, \quad y = e_3$$

を，$\{e_a\}$ **に関する**零的 4 組と呼ぶ．(カー時空に利用するときにはこの添字が便利だが，$1 \to 3 \to 2 \to 1$ とした添字が使われることもある.) この 4 組から，$\Lambda^2 = \Lambda^2(V)$

の基底

$$k \wedge \ell,\ k \wedge x,\ k \wedge y,\ \ell \wedge x,\ \ell \wedge y,\ x \wedge y$$

が作られる．これらの 2 重ベクトルの間では，

$$< k \wedge \ell, k \wedge \ell > = < k \wedge x, \ell \wedge x > = < k \wedge y, \ell \wedge y > = -1,$$
$$< x \wedge y, x \wedge y > = +1,$$

以外はスカラー積は全てゼロとなる．

命題 5.5.5　V のトレース・フリーの曲率を $C \neq 0$ とする．k を V の零的ベクトルとすると，次が成立する．

(1) k は主要である．$\Leftrightarrow$ 任意の $x, y \perp k$ に対して $C(k, x, k, y) = 0$ が成立する．

(2) k は m 主要 ($m \geq 2$) である．$\Leftrightarrow$ 任意の $x \perp k$ と $s \in V$ に対して $C(k, x, k, s) = 0$ が成立する．

(3) k は m 主要 ($m \geq 3$) である．$\Leftrightarrow$ 任意の $x \perp k$ に対して $C_{kx} = 0$ である．

(4) k は 4 主要である．$\Leftrightarrow$ 任意の $y \in V$ に対して $C_{ky} = 0$, つまり $C(k, \cdot, \cdot, \cdot) = 0$ である．

証明　(1) k が主要であるとする．定義から，$\delta = k \wedge x_0$ が $\mathbb{C}$ の主要零的 2 重ベクトルとなるような $x_0 \perp k$ が存在する．5.2 節で見たように，空間的ベクトル $x \perp k$ に対し，零的 2 重ベクトル $k \wedge x$ も k を決定する．$k \wedge x$ は $k \wedge x_0$ と同じ複素直線上にあるから，$\boldsymbol{g}(\mathbb{C}(k \wedge x), k \wedge x) = 0$ が成立する．よって，$x \perp k$ に対して (k の重複度を含めて) $C(k, x, k, x) = 0$ が成立する．これから，$k^{\perp}$ なる任意の x, y に対して $C(k, x, k, y) = 0$ を得る．逆は明らかゆえ，(1) が示された．

(2) 先ず，$\boldsymbol{i}(k \wedge x) = *(k \wedge x) = k \wedge y$ であるから，2 重ベクトル $k \wedge x$ が複素線形作用素 $\mathbb{C}$ の固有ベクトルであるための必要十分条件は，$\mathbb{C}(k \wedge x)$ と $\mathbb{C}(k \wedge y)$ が複素直線 $P = \mathrm{Span}_R\{k \wedge x, k \wedge y\}$ に含まれることである．言い方を変えれば，$\mathbb{C}(k \wedge x)$ と $\mathbb{C}(k \wedge y)$ が $P^{\perp}$ と直交する，ということになる．ℓ をとり，k, ℓ, x, y が零的 4 組となるようにすることができる．これから 2 重ベクトルを作り，スカラー積を計算すれば，

$$P^{\perp} = \mathrm{Span}\{k \wedge \ell, k \wedge x, k \wedge y, x \wedge y\}$$

であることが分かる．よって，$m \geq 2$ として，k が m 主要となるための必要十分条件は，$\mathbb{C}(k \wedge x)$ と $\mathbb{C}(k \wedge y)$ が $P^{\perp}$ と直交することである．

先ず，k が m 主要（$m \geq 2$）であるとする．式 $C(k,x,s,t) = <\mathbb{C}(k \wedge x), s \wedge t>$ において，$s \wedge t$ を $k \wedge \ell, k \wedge x, k \wedge y$ と置き換えて行けば，

$$C(k,x,k,\ell) = C(k,x,k,x) = C(k,x,k,y) = 0$$

となることが分かる．また $C(k,x,k,k) = 0$ であるから，任意の $s \in V$ に対して $C(k,x,k,s) = 0$ となることが分かる．$k \wedge x$ を $k \wedge y$ に置き換えれば，x を y に変えた式でも成立することが分かる．以上より，C についての結論が出た．

逆を仮定すれば，上記の 3 式はすぐに出る．さらに $C(k,x,x,y) = 0$ であれば，$\mathbb{C}(k \wedge x)$ は $P^{\perp}$ と直交する．よって，$k \wedge x$ は $\mathbb{C}$ の固有ベクトルで，k は m 主要（$m \geq 2$）となることが出る．この $C(k,x,x,y) = 0$ を示すために，零的 4 組 $\{t_\alpha\} = k, \ell, x, y$ を使って C を縮約すると

$$0 = (\mathsf{C}C)(k,y) = \Sigma g^{ab} C(k,t_a,y,t_b) = -C(k,\ell,y,k) + C(k,x,y,x)$$

である．C の条件より $C(k,y,k,\ell) = 0$ となる．しかるに $C(k,\ell,y,k) = 0$ ゆえ $C(k,x,x,y) = 0$ を得る．

(3), (4) についても同様．線形代数の演習問題である．□

5.6　D 型曲率

ここでは D 型のワイル曲率テンソルを考える．一般的なタイプである I 型との関連を調べ，カー時空への応用を与える．代数的に見れば，I 型以外は退化した特別なものであるが，D 型は，Λ^2_{cx} 上のワイル作用素 $\mathbb{C}$ が対角化している，という特徴を持っている．

補題 5.6.1　Λ^2_{cx} で，$\boldsymbol{g}$ に関して直交している基底 $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ を取ると，V の正規直交基底 $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ が存在し，

$$\xi_1 = e_2 \wedge e_3, \quad \xi_2 = e_3 \wedge e_1, \quad \xi_3 = \pm e_1 \wedge e_2$$

が成立する．

下記の証明から分かるように，これを満たす正規直交基底は，添字の付け替えと符号の逆転を除いて一意に決まる．また，$-\boldsymbol{i}$ によるスカラー倍をすると，この(空間的)基底は，時間的基底 $\{e_0 \wedge e_1, e_0 \wedge e_2, e_0 \wedge e_3\}$ になる(添字の位置に注意).

証明 (Thorpe 1969) いま ξ_1, ξ_2, ξ_3 は，$\boldsymbol{g}$ に関する単位 2 重ベクトルであるから，$<\,,\,>$ に関しても単位 2 重ベクトルであり，それに分解可能でもある．(前に述べたように，$<\xi, *\xi>=0$ ならば ξ は分解可能である.) ξ_1 と ξ_2 が $\boldsymbol{g}$ に関して直交することから，$<\xi_1, \xi_2>=0$ かつ $<\xi_1, *\xi_2>=0$ が出る．この後者の式にホッジ恒等式を使えば

$$\xi_1 \wedge \xi_2 = -\xi_1 \wedge **\xi_2 = <\xi_1, *\xi_2> \omega = 0$$

だから $\xi_1 \wedge \xi_2 = 0$ となる．(以下，付録 D で述べる，2 重ベクトルに関する性質を用いる.) いま $\xi_1 \wedge \xi_2 = 0$ が成立しているから，分解可能な 2 重ベクトル ξ_1 と ξ_2 はベクトルを共有する．つまり，$V = T_p(M)$ にベクトル v, w, e_3 が存在し，

$$\xi_1 = v \wedge e_3, \quad \xi_2 = e_3 \wedge w$$

が成立する．これらのベクトルは，お互い正規直交するようにできる．先ず，e_3 を単位ベクトルにとる．ξ_1, ξ_2 で決まる V の 2 平面 P_1, P_2 のそれぞれにおいて，$v \in P_1$, $w \in P_2$ を，e_3 に直交するもの e_1, e_2 で置き換える．これを行っても，2 重ベクトル ξ_1 と ξ_2 は不変であり，e_1 と e_2 は長さを 1 にできる．なお，$<\xi_1, \xi_2>=0$ より $<e_1, e_2>=0$ であることが分かる．

$e_1 \wedge e_2$ は，ξ_1 と ξ_2 の両方に，$\boldsymbol{g}$ に関して直交しているから，ある複素数 z があり，$e_1 \wedge e_2 = z\xi_3$ となる．また，$e_1 \wedge e_2$ は $\boldsymbol{g}$ に関して長さが 1 であるから $z^2 = 1$ であり，$z = \pm 1$ となる．□

V の正規直交基底 $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ につき，2 重ベクトル $e_2 \wedge e_3$, $e_3 \wedge e_1$, $e_1 \wedge e_2$ が Λ^2_{cx} のワイル作用素 $\mathbb{C}$ の固有ベクトルとなるとき，この $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ を**標準標構** (canonical frame) と呼ぶ．この標構により，I 型と D 型については表 5.1 で与えた標準形を得ることができる (D 型の場合は $\lambda_2 = \lambda_3$ としている). 時間的 2 重ベクトル $e_0 \wedge e_1, e_0 \wedge e_2, e_0 \wedge e_3$ についても同様である．上記の補題から，ξ_3 の符号を変えても全体に影響しないので，$\mathbb{C}$ が対角化可能ならば標準標構は必ず存在することが分かる．ペトロフ・タイプの他の型については，**標準零的 4 組** (canonical null tetrad) $k, \ell, m, \overline{m}$ が存在する (5.8 節を見よ). つまり，この $k \wedge \ell$, $k \wedge x$, $\ell \wedge y$ により (順番を適当にとり), 表 5.1 の標準形の基底とすることができるのである．先ず必要となるのが，ワイル・テンソルの，単純で幾何学的に意味のある成分を見つけることである．

補題 5.6.2　いま，Λ^2_{cx} のワイル作用素 $\mathbb{C}$ が，対角化可能であり，固有値 $\lambda_j = a_i + \boldsymbol{i}\, b_j (j = 1, 2, 3)$ を持つとする．このとき，Λ^2 で定義される C の行列 $\langle C \rangle$ は，ある標準基底に関し，

	01	02	03	23	31	12
01	$-a_1$			$-b_1$		
02		$-a_2$			$-b_2$	
03			$-a_3$			$-b_3$
23	$-b_1$			a_1		
31		$-b_2$			a_2	
12			$-b_3$			a_3

と書ける．ここで，省略してある所にはゼロが入る．

証明　仮定から

$$\mathbb{C}(e_2 \wedge e_3) = \lambda_1(e_2 \wedge e_3) = a_1 e_2 \wedge e_3 - b_1 e_0 \wedge e_1,$$
$$\mathbb{C}(e_3 \wedge e_1) = \lambda_2(e_3 \wedge e_1) = a_2 e_3 \wedge e_1 - b_2 e_0 \wedge e_2,$$
$$\mathbb{C}(e_1 \wedge e_2) = \lambda_3(e_1 \wedge e_2) = a_3 e_1 \wedge e_2 - b_3 e_0 \wedge e_3$$

である．Λ^2 の $\mathbb{C}$ の，ホッジ基底 $\{e_0 \wedge e_1, \ldots, e_1 \wedge e_2\}$ による行列を $[\mathbb{C}]$ と表す．$[\mathbb{C}]$ の最後の 3 行は

	01	02	03	23	31	12
23	$-b_1$			a_1		
31		$-b_2$			a_2	
12			$-b_3$			a_3

となる (省略してある所にはゼロが入る)．これらの 3 行は，$\langle C \rangle$ の最後の 3 行と同一である．よって，命題 5.3.1 より，行列 $\langle C \rangle$ の全体は上述のようになる．□

この補題を使えば，D 型の場合，重複固有値を $-2\lambda, \lambda, \lambda$ として，標準標構での行列 $\langle C \rangle$ を得ることができる．つまり，$\lambda = a + \boldsymbol{i}b$ として，$a_1 = -2a$, $a_2 = a_3 = a$, $b_1 = -2b$, $b_2 = b_3 = b$ とすればよい．

(リッチ平坦になっている) カー時空の場合には，5.4 節の行列から，ボイヤー－リンキスト標構 E_0, E_1, E_2, E_3 が標準標構であることが分かる．ボイヤー－リンキスト座

標を使う理由がここにある．5.4 節の行列 $\langle R\rangle$ とこの補題は，D 型の式で $\lambda = -\mathbf{I} - \boldsymbol{i}\,\mathbf{J}$ として結びついている．

次に，D 型時空 M 大域的な性質について考える．ホッジのスター作用素は $V = T_p(M)$ の向きに依存して定義される．そこで，簡単ため，M は向き付け可能で，滑らかな 4 ベクトル場 $p \to \omega_p$ (付録 D を見よ) により向きが与えられているとする．これで，各 $\Lambda^2(T_pM)$ 上に，一貫して，複素構造が定義される．M の各点 p において，ワイル曲率作用素 $\mathbb{C}$ が対角化出来て，(ゼロでない) 固有値 $-2\lambda(p)$, $\lambda(p)$, $\lambda(p)$ を持つ．この作用素の構造は M 全体で同一であるから，M 上で滑らかな複素数値関数 λ が得られる．

点 $p \in M$ において，2 本の主要零的方向で張られる 2 次元接平面を Π_p とする．カー時空の用語を用いて，この Π_p を，$p \in M$ における**主要平面** (principal plane) と呼ぶことにする．よって，$p \to \Pi_p$ は，M 上の (滑らかな) 時間的平面が作る分布となる．

補題 5.6.3 D 型時空における正規直交標構を $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ とする．このとき，次の (1)〜(4) は同値である．

(1) この標構は標準標構である．

(2) $e_0 \wedge e_1$ (あるいは $e_2 \wedge e_3$) は，$\mathbb{C}$ の単純固有値 -2λ の固有ベクトルである．

(3) Span $\{e_0, e_1\}$ は主要平面である．

(4) $e_0 \pm e_1$ は主要零的ベクトルである．

証明 先ず，(1) $\Rightarrow$ (2) と (3) $\Leftrightarrow$ (4) は明らかである．また，5.5 節で示したように，Λ^2_{cx} において，-2λ の固有ベクトルの $\boldsymbol{g}$ に関する直交成分は λ の固有空間である．つまり (2) $\Rightarrow$ (1). 次に (1) が成立すると仮定する．すなわち，$\eta_1 = e_1 \wedge e_2$ と $\eta_2 = e_3 \wedge e_1$ が $\mathbb{C}$ の λ 固有ベクトルとする．命題 5.5.3 の証明から分かるように，主要零的方向は $N(\eta_1 \pm \boldsymbol{i}\,\eta_2)$ である．しかるに，

$$\begin{aligned}\eta_1 \pm \boldsymbol{i}\eta_2 &= e_1 \wedge e_2 \pm \boldsymbol{i}\; e_3 \wedge e_1 = e_1 \wedge e_2 \pm *(e_3 \wedge e_1)\\ &= e_1 \wedge e_2 \pm e_0 \wedge e_2 = (e_1 \pm e_0) \wedge e_2\end{aligned}$$

である．よって，符号を適当にとり，主要零的方向は $e_0 \pm e_1$ となる．つまり (1) $\Rightarrow$ (4) が示された．

最後に，(4) を仮定する．標準標構を $\{u_0, u_1, u_2, u_3\}$ とし，$u_0 \pm u_1$ が主要方向であるとする．つまり，$u_0 + u_1 = r(e_0 + e_1)$, $u_0 - u_1 = s(e_0 - e_1)$ である．楔積を計算すると，$u_0 \wedge u_1$ と $e_0 \wedge e_1$ が同一方向であることが分かる．よって，$e_0 \wedge e_1$も，$\mathbb{C}$ の -2λ の固有ベクトルとなる．よって (4) $\Rightarrow$ (2) が示された．□

系 5.6.4　カー時空において，抽象的に曲率から導入された主要零的方向は，2.5 節で $\pm\partial_r + \Delta^{-1}V$ により定義した主要零的方向と一致する．

証明　ボイヤー－リンキスト標構は標準標構であるから，上記の補題から，抽象的な主要零的方向は $E_0 \pm E_1$ で与えられる．これを座標で表すのであるが，前に出たように

$$E_0 = \frac{1}{\rho\sqrt{\varepsilon\Delta}}\big[(r^2 + a^2)\partial_t + a\partial_\phi\big], \qquad E_1 = \frac{\sqrt{\varepsilon\Delta}}{\rho}\partial_r$$

である．$E_0 \pm E_1$ で与えられる方向はゼロでないスカラー倍で不変であり，$\pm$ に ε を掛けても $\pm$ は変わらない．よって，上式に $\rho/\sqrt{\varepsilon\Delta}$ を掛け，符号を調整すれば，

$$\begin{aligned}\partial_r \pm (\varepsilon/\Delta)\big[(r^2 + a^2)\partial_t + a\partial_\phi\big] &\approx \pm\partial_r + (1/\Delta)\big[(r^2 + a^2)\partial_t + a\partial_\phi\big] \\ &= \pm\partial_r + \Delta^{-1}V\end{aligned}$$

が零的方向を表すようにできる．□

リッチ平坦の場合には，D 型の固有値と断面曲率の間に次のような関係がある．

系 5.6.5　リッチ平坦な D 型の時空において，各点における主要平面を Π とする．また，$\mathbb{R}$ の重複固有値を λ とする．このとき次が成立する．

(1) K を断面曲率として $K(\Pi) = K(\Pi^\perp) = -2Re\,\lambda$ となる．

(2) いま，$u \in \Pi$ と $x \in \Pi^\perp$ を単位ベクトルとすると (むろん x は空間的である)，$K(\mathrm{Span}\{u, x\}) = Re\,\lambda$ となる．

証明　各点における標準標構を $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ とする．

(1) このとき，e_2, e_3 が $\Pi^\perp$ の基底で，$< e_2 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3 >= +1$ である．$e_2 \wedge e_3$

が，Λ^2_{cx} の $\mathbb{R}$ の -2λ 固有ベクトルであるから，補題 5.6.2 より

$$\begin{aligned} K(\Pi) &= R(e_2, e_3, e_2, e_3) \\ &=< \mathbb{R}(e_2 \wedge e_3), e_2 \wedge e_3 >= a_1 = -2a = -2Re\lambda \end{aligned}$$

が成立する．(カー時空では $Re\,\lambda = -\mathbf{I}$ ゆえ，第 2 章で見たように，$K(\Pi) = 2\mathbf{I}$ となる.) 系 5.3.4 より (あるいは直接計算して)，$K(\Pi^\perp)$ についても同様である．

(2) u が時間的ならば，$u = e_0$, $x = e_2$ としてよい．このとき，$P = \mathrm{Span}\{u, x\}$ に対して

$$K(P) = - < \mathbb{R}(e_0 \wedge e_2), e_0 \wedge e_2 >= -(-a_2) = a = Re\,\lambda$$

である．u が空間的ならば，e_1 と e_2 を使い，

$$K(P) =< \mathbb{R}(e_1 \wedge e_2), e_1 \wedge e_2 >= a_3 = a = Re\,\lambda$$

を得る．□

ペトロフ・タイプの方向からカー時空を調べると，次の重要な副産物を得ることができる．

系 5.6.6 カー時空の等長変換では，関数 r と $C = \cos\vartheta$ が不変である．

証明 等長変換を $\psi: M \to M$ と置く．外積に関する一般的な性質から，滑らかな写像 ψ の微分写像 $d\psi$ は線形写像$\widehat{\psi} = \Lambda^m d\psi : \Lambda^m(p) \to \Lambda^m(\psi p)$ を与える．ここで $\Lambda^m(q) = \Lambda^m(T_q(M))$ で，いまの場合は $m = 2, 3, 4$ である．さて，単位 4 ベクトル場 ω により M に向きが与えられているとする．このとき $\widehat{\psi} = \pm\omega$ で，符号は M 全体で一定である．

いま，ψ が向きを保存する，つまり $\widehat{\psi}(\omega) = +\,\omega$ であるとしてよい．もしそうでないなら，(向きを逆にする) 赤道等長変換 ϵ を使い，$\epsilon \circ \psi$ が向きを保存するようにする．ϵ は r と C を不変にするから，以下の ψ を $\epsilon \circ \psi$ に変えても同じ結論を得る．

ホッジのスター作用素の定義から，任意の $p \in M$ について，変換$\widehat{\psi} = d\psi \wedge d\psi : \Lambda^2(p) \to \Lambda^2(\psi p)$ は，$*$ と可換であり，複素線形となる．

等長変換はリーマン曲率を保存する．つまり

$$d\psi(R_{vw}(x)) = R_{d\psi v, d\psi w}(d\psi x), \qquad v, w, x \in T_p(M), \quad p \in M$$

が成立する．そして，$\widehat{\psi}$ は曲率変換と可換である．つまり，$\widehat{\psi}\circ\mathbb{R}=\mathbb{R}\circ\widehat{\psi}:\Lambda^2(p)\to\Lambda^2(\psi p)$ である．同様にして，$\widehat{\psi}$ はワイル・テンソルを保存し，$\mathbb{C}$ と可換である (これは，いまの場合 $\mathbb{R}=\mathbb{C}$ ゆえ明らかである)．よって，$\widehat{\psi}$ は固有ベクトルを保存し，ψ は $\mathbb{C}$ の固有値を保存する．とくに，M はD型であるから，ψ は (M 上の複素数値関数である) 重複固有値 λ を保存する．したがって，全ての $p\in M$ に対して，$\lambda(\psi p)=\lambda(p)$ である．ここに $\lambda=-\mathrm{M}/(r+\subset iaC)^3$ である．

いま，$r\circ\psi$ を $\tilde{r}$, $C=\cos\vartheta$ として $C\circ\psi$ を$\tilde{C}$ と書くことにする．このとき $(r+\boldsymbol{i}\,aC)^3=(\tilde{r}+\boldsymbol{i}\,a\tilde{C})^3$ が成立する．よって $\tilde{r}+\boldsymbol{i}\,a\tilde{C}=k(r+\boldsymbol{i}\,aC)$ であり，ここに (連続性から定数である) k は1の立方根，つまり1か $(-1+\sqrt{3}\boldsymbol{i})/2$ である．C は有界で r は有界でないから，複素解を持つことはない．よって，$\tilde{r}+\boldsymbol{i}\,a\tilde{C}=r+\boldsymbol{i}\,aC$ であり，$\tilde{r}=r$, $\tilde{C}=C$ を得る．□

ペトロフ・タイプによる検討は，時空 M の各ベクトル空間 $V=T_p(M)$ 上に主要零的方向を導入することになり，都合のよい場合では，それが M 上の1次元の分布となり，その積分曲線が M の葉層を作る (1.7 節)．これを**主要零的叢** (principal null congruence) と呼ぶ．以下において，M のペトロフ・タイプとこの叢の幾何学的性質の関係を調べる．

5.7　光学的スカラー

光学的スカラーとは，零的測地線叢，つまり時空における光の流れの幾何学的性質を記述するための関数である．これは，質点を〈分子〉とする定常流についての関係式と同様なものを光について導くため，R. K. Sachs (1961) によって定義された．(物理学へ応用された最初の事例は重力放射の研究であり，これについては Pirani 1962, Sachs 1964 を見よ.) 零的測地線叢は，少なくとも局所的には，未来向き零的ベクトル場 $\boldsymbol{k}$ で $\nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k}=0$ を満たすものとして記述できる．

いま $<\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}>=0$ であるから，任意のベクトル場 $\boldsymbol{v}$ に関して $\nabla_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{k}\perp\boldsymbol{k}$ となる．つまり，(各点において) $\boldsymbol{k}$ の共変微分は3次元部分空間 $\boldsymbol{k}^\perp$ 内にある．また $\nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k}=0$ であるから，共変微分 $\nabla\boldsymbol{k}$ は，$\boldsymbol{k}^\perp$ へ制限したもので，つまり，$\boldsymbol{k}^\perp$ から $\boldsymbol{k}^\perp$ への写像$\boldsymbol{v}\to\nabla_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{k}$ により決定される．そして，$\nabla_{\boldsymbol{v}+c\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k}=\nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k}$ であるから，この写像は，$\boldsymbol{k}$ のスカラー倍だけ異なるベクトルを同一視してできる商ベクトル空間$\boldsymbol{k}^\perp/\boldsymbol{k}$ の上への線形作用素と考えてよい．$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\perp\boldsymbol{k}$ のとき$<\boldsymbol{x}+a\boldsymbol{k},\boldsymbol{y}+b\boldsymbol{k}>=<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>$ が成立するから，この商空間に計量テンソルを定義することができる．つまり，各点において，

$\boldsymbol{k}^{\perp}/\boldsymbol{k}$ は，2 次元の内積空間であり，$\boldsymbol{k}$ による叢が作る光のビームを遮断する〈スクリーン〉になっているのである．

共変微分 $\nabla \boldsymbol{k}$ は，$\boldsymbol{k}$ の流れの 2 次近似である．つまり，点 p を与えたとき，その近くの点 $p+\varepsilon \boldsymbol{x}$ における $\boldsymbol{k}$ の値がほぼ $\boldsymbol{k}+\varepsilon\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{k}$ なのである．$\boldsymbol{k}^{\perp}/\boldsymbol{k}$ 上で，$\boldsymbol{v} \to \nabla_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{k}$ で定義される線形作用素を D とする．この D を使い，流れ $\boldsymbol{k}$ に対して与えられる $\boldsymbol{k}^{\perp}/\boldsymbol{k}$ 上の小円板 $C = \{\boldsymbol{v}\colon |\boldsymbol{v}| \leq \varepsilon\}$ の無限小変形を記述する．時間経過に従って，スクリーン上でこの円板がどのように変化するのかを見るのである．(流れ $\boldsymbol{k}$ の異なる点におけるスクリーンは，γ に沿った平行移動により，常識的に一致させていく.)

この変化は，次のように 3 種類に分類することができる．いま，$\boldsymbol{k}^{\perp}/\boldsymbol{k}$ の正規直交基底を $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ とし，$\boldsymbol{k}_{y,x} =< \nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{k}, \boldsymbol{y} >$ のように書くことにする．このとき，$\boldsymbol{k}^{\perp}/\boldsymbol{k}$ 上の作用素 $D \approx \nabla \boldsymbol{k}$ は行列で

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_{x,x} & \boldsymbol{k}_{y,x} \\ \boldsymbol{k}_{x,y} & \boldsymbol{k}_{y,y} \end{bmatrix}$$

と表示される．この行列を用いて光学的スカラーを表す．

定義 5.7.1 時空上で零的測地線を与えるベクトル場を $\boldsymbol{k}$ とする．$\boldsymbol{k}^{\perp}/\boldsymbol{k}$ の正規直交基底 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$, に関して，$\boldsymbol{k}$ の**光学的スカラー** (optical scalar) を次のように定義する．

1. **拡大** (expansion). $\theta = \frac{1}{2}(\boldsymbol{k}_{x,x} + \boldsymbol{k}_{y,y})$
2. **回転** (rotation)(あるいは**振れ** (twist)). $\omega = \frac{1}{2}(\boldsymbol{k}_{y,x} - \boldsymbol{k}_{x,y})$
3. **複素剪断** (complex shear). $\sigma = (1/2)(\boldsymbol{k}_{y,y} - \boldsymbol{k}_{x,x}) + (\boldsymbol{i}/2)$

ここに θ は，流れにより円板 C の面積が拡大 (縮小) するときの無限小測度を表す (図 5.3 を見よ)．回転 ω は D の歪対称部分である．つまり $A = \frac{1}{2}(D - D^{t})$ であり，円板の無限小回転を表す．よって，$\theta = \frac{1}{2}\mathrm{trace}D$ は不変量で，ω は，$\omega^2 = \det A$ であるから，符号を除いて不変量である．

$\boldsymbol{k}$ は零的ベクトル場であるから，θ は，$\boldsymbol{k}$ の発散の半分である．また，ω は，$\boldsymbol{k}$ の回転と関係している．実際，**$\boldsymbol{k}$ が超曲面直交ある (つまり $\boldsymbol{k}^{\perp}$ が積分可能である) ための必要十分条件は，ω となることである**．これを示すには，

$$\begin{aligned} \omega = 0 &\Leftrightarrow < \nabla_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x} >=< \nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{k}, \boldsymbol{y} > \\ &\Leftrightarrow < \boldsymbol{k}, \nabla_{\boldsymbol{y}}\,\boldsymbol{x} >=< \boldsymbol{k}, \nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{y} > \\ &\Leftrightarrow < \boldsymbol{k}, [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] >= 0 \end{aligned}$$

が成立すればよいが，ここで $\boldsymbol{k}^{\perp} = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$ であるから，

$$\begin{aligned} <\boldsymbol{k}, [\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x}]> &= <\boldsymbol{k}, \nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{x}> - <\boldsymbol{k}, \nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k}> \\ &= <\nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x}> - \frac{1}{2}\boldsymbol{x} <\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}> = 0 \end{aligned}$$

となる．

零的叢の複素剪断 σ は，D の中でトレース・フリーで対称である部分を表している．つまり $T = \frac{1}{2}(D + D^t) - \theta I$ で，この行列は

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_{x,x} - \boldsymbol{k}_{y,y} & \boldsymbol{k}_{y,x} + \boldsymbol{k}_{x,y} \\ \boldsymbol{k}_{x,y} - \boldsymbol{k}_{y,x} & \boldsymbol{k}_{y,y} + \boldsymbol{k}_{x,x} \end{bmatrix}$$

となる．さて，T はトレースがゼロの対称作用素であるから，これは，円板 C が，面積を一定にしたまま楕円へゆがんでいく量を表している (図 5.3 を見よ)．つまり剪断 σ は〈非点収差〉を測っているのである．この σ 自体は不変量ではないが，絶対値は，$|\sigma|^2 = -\det T$ となるので，不変量である．

次は，叢の零的測地線に沿った光学的スカラーの変化を表したもので，**ザックスの方程式** (Sachs equation) と呼ばれている．

命題 5.7.2　測地線を与える零的ベクトル場を $\boldsymbol{k}$ とするとき次が成立する．

(1a)　$\boldsymbol{k}[\omega] = -2\theta\omega$

(1b)　$\boldsymbol{k}[\theta] = \omega^2 - \theta^2 - |\sigma|^2 - \frac{1}{2}\mathrm{Ric}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k})$

(S2)　$\boldsymbol{k}[\sigma] = -2\theta\sigma + \frac{1}{2}(R_{\boldsymbol{kxkx}} - R_{\boldsymbol{kyky}}) - \boldsymbol{i}R_{\boldsymbol{kxky}}$

ここに，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は，正規直交している $\perp\boldsymbol{k}$ の平行ベクトル場で，$\boldsymbol{k}$ 方向に平行であるとする．

(この証明は省略する．より一般的な形での結果を次の節で証明する.)

ザックスの方程式は多くの幾何学的情報を与えてくれる．方程式 (1a) から，(正の) 拡大が回転を減少させることが分かる．角運動量の保存則どおりである．また，ある流れに沿って回転がゼロならば，それは恒等的にゼロであることも分かる．方程式 (1b) から，回転が大きくなれば拡大が増加する (つまり〈遠心力〉である) が，拡大，剪断，質量が大きくなれば拡大は減少することが分かる．ちなみに，相対論的には，質量は

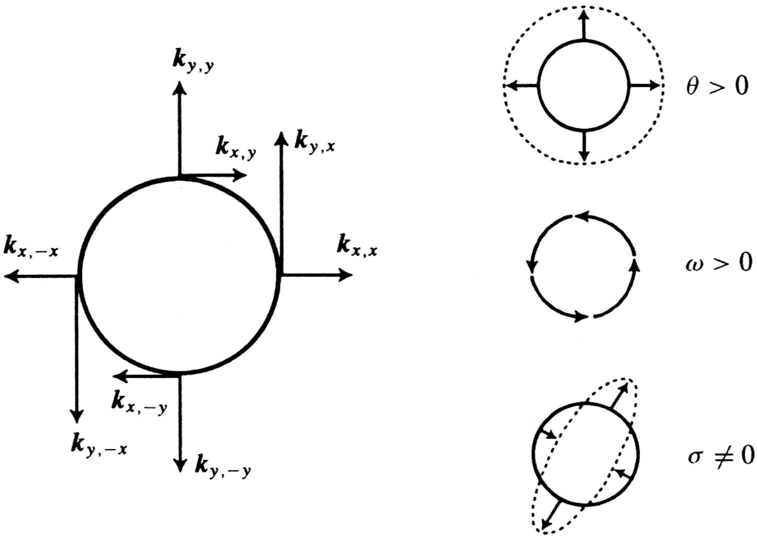


図 5.3　∇k により生じる円板 C の無限小変形.

リッチ曲率で表現されるのである (1.6 節を見よ).

そして方程式 (S2) からは，(正の) 拡大が剪断を減少させることが分かる．ここの曲率の項については，次の節で説明する．

次の例は，カー時空の主要零的叢を直観的に理解するための比較例である．

例 5.7.3　3 次元ユークリッド空間 R^3 において，原点にある光源から放射された光線は，球座標では，∂_r の積分曲線として表される．特殊相対性理論では，光線 γ は，ミンコフスキー時空 $R_1^4 = R^3 \times R_1^1$ における，零的ベクトル場 $\boldsymbol{k} = \partial_r + \partial_t$ が作る測地線として表される．この $\boldsymbol{k}$ に直交して光線に沿って平行なベクトル場 $\boldsymbol{x}$ は，γ に沿ったスクリーンの点を表している．R_1^4 を R^3 に写す射影 π を考えれば，各スクリーンは，ユークリッド空間 R^3 内で曲線 $\pi \circ \gamma$ に垂直な平面へ，等長的に写される．そして，各スクリーンを移した平面は，標準的に同一視できる．

簡単な計算から，上記の $\boldsymbol{x}$ に対して $\nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{k} = \boldsymbol{x}/r$ となることが分かる．よって，光学的スカラーは $\theta = 1/r$, $\omega = 0$, $\sigma = 0$ となる．つまり，予測どおり，断面が円形の光のビームは，ずっと円形の断面を持ち続けるのである．半径 r の所で (角度一定で) 切断した断面の面積は r^2 に比例している．θ は，発散を表す量であり，面積の変化

の割合を表している．つまり，常識通り，拡大に伴って断面の面積が変化する割合は，$1/r$ ではなく，r に比例しているのである．

ザックスの方程式で自明でないのは (1a) で，$\boldsymbol{k}[\theta] = -\theta^2$ となる．これは，

$$\boldsymbol{k}[\theta] = (\partial_r + \partial_t)[1/r] = \partial_r(1/r) = -1/r^2 = -\theta^2$$

から分かる．$\boldsymbol{k}^\perp$ の積分超曲面は ($\omega = 0$ なので) t 軸に頂点を持つ光円錐である．‖

次にカー時空について考える．この時空では，主要零的叢は (地平線を除いて) 零的ベクトル場$\boldsymbol{k}_\pm = \pm\partial_r + \Delta^{-1}V$ で与えられる．そしてこれは測地線である．ボイヤー－リンキスト標構場 E_0, E_1, E_2, E_3 (2.6 節) を使えば，$\boldsymbol{k}_\pm = (\rho/\sqrt{\varepsilon\Delta})(E_0 \pm E_1)$ となる．スクリーンの基底ベクトルとして $\boldsymbol{x} = E_2$, $\boldsymbol{y} = E_3$ を取れば，

$$\nabla\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k}_\pm) = E_2[\ \rho/\sqrt{\varepsilon\Delta}](E_0 \pm E_1) + (\rho/\sqrt{\varepsilon\Delta})(\nabla_{E_2}E_0 \pm \nabla_{E_2}E_1)$$

となる．ここに，$\varepsilon = \mathrm{sgn}\Delta$ である．いまは $\boldsymbol{x} = E_2$, $\boldsymbol{y} = E_3$ 成分が問題なのだから，この式の右辺第1項は無視してよい．系 2.6.7 で用意した共変微分の関係式から

$$\nabla\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k}_\pm) = \rho^{-2}(\pm rE_2 + \varepsilon aCE_3) + (E_0 \text{と } E_1 \text{の項})$$

となる．同様にして

$$\nabla\boldsymbol{y}(\boldsymbol{k}_\pm) = \rho^{-2}(-\varepsilon aCE_2 + \pm rE_3) + (E_0 \text{と } E_1 \text{の項})$$

である．よって，$\boldsymbol{k}^\perp/\boldsymbol{k}$ 上の，正規直交基底 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に関する，$D = \nabla\boldsymbol{k}$ の行列は

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_{x,x} & \boldsymbol{k}_{y,x} \\ \boldsymbol{k}_{x,y} & \boldsymbol{k}_{y,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm r/\rho^2 & \varepsilon aC/\rho^2 \\ -\varepsilon aC/\rho^2 & \pm r/\rho^2 \end{bmatrix}$$

となる．以上より，$\boldsymbol{k}_\pm$ は

$$\text{拡大: } \theta_\pm = \pm r/\rho^2, \quad \text{回転: } \omega_\pm = \varepsilon aC/\rho^2, \quad \text{剪断: } \sigma = 0$$

となる．つまり，カー時空における重力源の回転は，赤道面を除いて，主要零的測地線の回転を引き起こすのである．回転の意味は，北半球と南半球で**逆になっている**．赤道面上にない主要零的測地線は θ を持ち，$r = 0$ を境にしてこの符号が変わる．例えば，$r = -\infty$ からブラックホールの核へ進んでくる主要零的測地線は $\theta < 0$ であり，

$r > 0$ となると,〈外向き〉の言葉どおり，ミンコフスキー時空の場合と同様に $\theta > 0$ となる．そして，$r \to \infty$ になるに従って，光学的スカラーの値はミンコフスキー時空の場合の値に近づいていくのである．

シュワルツシルド時空の場合には，$a = 0$ なので，主要零的測地線の光学的スカラーの値は $\theta = 1/r$, $\omega = \sigma = 0$ となる．例 5.7.3 で述べたニュートンやミンコフスキー時空の場合と同じ値となるのである．

カー時空の主要零的測地線では剪断がゼロであるから (そしてリッチ平坦であるから), ザックスの方程式の最初の 2 式は $\boldsymbol{k}[\omega] = -2\theta\omega$, $\boldsymbol{k}[\theta] = \omega^2 - \theta^2$ となる．これは，上記のことからも確認できる．

(S2) 式が複素数で表現されているので，(1a) と (1b) を合わせて複素数で表現することが考えられる．つまり，$\rho = -\theta + \boldsymbol{i}\,\omega$ として，

$$\boldsymbol{k}[\rho] = -\boldsymbol{k}[\theta] + \boldsymbol{ik}[\omega] = \theta^2 - 2\boldsymbol{i}\theta\omega - \omega^2 + |\sigma|^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Ric}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k})$$

となる．したがって，複素数で表現した式 (S1) として

$$\boldsymbol{k}[\rho] = \rho^2 + |\sigma|^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Ric}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k})$$

が得られる．

次の節ではこれまでの事項をさらに一般化をするのであるが，そこで使われるのが複素数範囲で表現したザックスの方程式 (S1), (S2) なのである．

5.8 ニューマン－ペンローズ技法

時空の零的ベクトルを研究するのには，**実 4 組** (real tetrad) $\{\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$ を使うのが便利である．ここに，$\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{\ell}$ は $< \boldsymbol{k}, \boldsymbol{\ell} >= -1$ を満たす零的ベクトル場で，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は，お互い直交する単位ベクトル場で，$\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{\ell}$ とも直交している (定義 5.5.4)．これをもう一歩進ませて，より簡単な関係式を導く．先ず，複素ベクトル場

$$\boldsymbol{m} = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{iy})/\sqrt{2} \qquad \overline{\boldsymbol{m}} = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{iy})/\sqrt{2}$$

を定義する．そして，$\{\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{m}, \overline{\boldsymbol{m}}\}$ を**複素零的 4 組** (complex null tetrad) と呼ぶ．実際，$\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$ は正規直交ベクトル場で，$< \boldsymbol{m}, \boldsymbol{m} >=< \overline{\boldsymbol{m}}, \overline{\boldsymbol{m}} >= 0$ より，$\boldsymbol{m}$ と $\overline{\boldsymbol{m}}$ は

零的ベクトル場である．また $<\boldsymbol{m}, \overline{\boldsymbol{m}}>= 0$ であり，この 4 組による計量の成分は

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

となる．

普通の (実) テンソルを，この複素零的 4 組による成分で表すことができる．例えば，A を (0,2) 型テンソルとすると，

$$A(\boldsymbol{k}, \overline{\boldsymbol{m}}) = A(k, (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{y})/\sqrt{2}) = (1/\sqrt{2})\left[A(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{i}A(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{y})\right]$$

である．いろいろな曲率テンソルに表れる対称に関する性質は，そのまま成立する．縮約についてもそのまま成立する．実際，

$$\mathsf{C}A = \Sigma g^{ab} A_{ab} = -A(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\ell}) - A(\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{k}) + A(\boldsymbol{m}, \overline{\boldsymbol{m}}) + A(\overline{\boldsymbol{m}}, \boldsymbol{m})$$

であり，最後の 2 項は

$$\frac{1}{2}\left[A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{i}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{y}) + A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{i}\boldsymbol{y})\right] = A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + A(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$$

となる．

複素零的 4 組を使って時空の幾何学を展開するときに強力な武器になるのが**ニューマン－ペンローズ技法** (Newman-Penrose formalism) である．これを使うと，共変微分の ∇ や曲率テンソルの R 等のような普通の記号は表れない．∇ はクリストッフェルの記号のようなものになり，全てのテンソルは零的 4 組による成分表示となる．このため，曲率の式，それのリッチ／ワイルによる分解，ビアンキの恒等式，等々は多くの式の羅列となる (Chandrasekhar 1983, Kramer, et al, 1980, Newman Penrose 1962)．それにもかかわらず，より大きな便利さがあるのでこの表現を使うのである．例えば，主要零的ベクトルの重複度 m の特徴づけが簡単になり，ペトロフ・タイプを調べるための微分方程式が簡単に表現できるのである．そして，それらの微分方程式は，確かに数は多いが，全て複素数値関数 f の第 1 微分 $v[f]$ のみの式となるのである．

以下に，ニューマン－ペンローズ技法と一般の公式の関係を導く．先ず，零的 4 組による共変微分を，クリストッフェルの記号のような形で表す．

定義 5.8.1　零的 4 組の場 $\{\boldsymbol{k},\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{m},\overline{\boldsymbol{m}}\}$ に対し，複素数値関数

$$\kappa = -<\nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k},\boldsymbol{m}> \quad \nu = <\nabla_{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{\ell},\overline{\boldsymbol{m}}> \quad \varepsilon = \tfrac{1}{2}\big[-<\nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k},\boldsymbol{\ell}> + <\nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{m},\overline{\boldsymbol{m}}>\big]$$

$$\rho = -<\nabla_{\overline{\boldsymbol{m}}}\boldsymbol{k},\boldsymbol{m}> \quad \mu = <\nabla_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{\ell},\overline{\boldsymbol{m}}> \quad \gamma = \tfrac{1}{2}\big[<\nabla_{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{k}> - <\nabla_{\boldsymbol{\ell}}\overline{\boldsymbol{m}},\boldsymbol{m}>\big]$$

$$\sigma = -<\nabla_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{k},\boldsymbol{m}> \quad \lambda = <\nabla_{\overline{\boldsymbol{m}}}\boldsymbol{\ell},\overline{\boldsymbol{m}}> \quad \beta = \tfrac{1}{2}\big[-<\nabla_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{k},\boldsymbol{\ell}> + <\nabla_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{m},\overline{\boldsymbol{m}}>\big]$$

$$\tau = -<\nabla_{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{k},\boldsymbol{m}> \quad \pi = <\nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\ell},\overline{\boldsymbol{m}}> \quad \alpha = \tfrac{1}{2}\big[<\nabla_{\overline{\boldsymbol{m}}}\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{k}> - <\nabla_{\overline{\boldsymbol{m}}}\overline{\boldsymbol{m}},\boldsymbol{m}>\big]$$

を，零的 4 組の**スピン係数** (spin coefficient) と呼ぶ．

この式の記号は，4 組を逆にしたとき対応するように使われている．すなわち，$\boldsymbol{k}\leftrightarrow\boldsymbol{\ell}$, $\boldsymbol{m}\leftrightarrow\overline{\boldsymbol{m}}$ とすると

$$\kappa\leftrightarrow-\nu, \rho\leftrightarrow-\mu, \sigma\leftrightarrow-\lambda, \tau\leftrightarrow-\pi, \varepsilon\leftrightarrow-\gamma, \beta\leftrightarrow-\alpha$$

となるのである．(4 組を逆にすることについて，詳しくは Geroch, et al, 1973 を見よ.) 〈逆〉としての $\boldsymbol{m}$ と $\overline{\boldsymbol{m}}$ は，複素数としての共役の関係にあることに注意せよ．また，ここに λ が出てくるが，固有値を表す λ との違いは文脈の上から明らかに区別がつく．

零的 4 組の中のベクトル場 $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ について $<\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}>$ は定数であるから，$<\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}>$ は $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ に関して歪対称である．よって，複素共役を使えば，$<\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}>$ をスピン係数で表すことができる．例えば，$<\nabla_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{k}>=\bar{\alpha}+\beta$ である．

そして，ベクトルの**零的 4 組による表現**

$$\boldsymbol{\nu} = -<\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\ell}>\boldsymbol{k} - <\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{k}>\boldsymbol{\ell} + <\boldsymbol{\nu},\overline{\boldsymbol{m}}>\boldsymbol{m} + <\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{m}>\overline{\boldsymbol{m}}$$

を使うと，次の，共変微分に関する式を得る．

系 5.8.2　零的 4 組 $\{\boldsymbol{k},\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{m},\overline{\boldsymbol{m}}\}$ の共変微分は

$$\begin{aligned}
\nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k} &= (\varepsilon+\bar{\varepsilon})\boldsymbol{k} - \bar{\kappa}\boldsymbol{m} - \kappa\overline{\boldsymbol{m}} & \nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\ell} &= -(\varepsilon+\bar{\varepsilon})\boldsymbol{\ell} + \pi\boldsymbol{m} + \bar{\pi}\overline{\boldsymbol{m}}\\
\nabla_{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{k} &= (\gamma+\bar{\gamma})\boldsymbol{k} - \bar{\tau}\boldsymbol{m} - \tau\overline{\boldsymbol{m}} & \nabla_{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{\ell} &= -(\gamma+\bar{\gamma})\boldsymbol{\ell} + \nu\boldsymbol{m} + \bar{\nu}\overline{\boldsymbol{m}}\\
\nabla_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{k} &= (\bar{\alpha}+\beta)\boldsymbol{k} - \bar{\rho}\boldsymbol{m} - \sigma\overline{\boldsymbol{m}} & \nabla_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{\ell} &= -(\bar{\alpha}+\beta)\boldsymbol{\ell} + \mu\boldsymbol{m} + \bar{\lambda}\overline{\boldsymbol{m}}\\
\nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{m} &= \bar{\pi}\boldsymbol{k} - \kappa\boldsymbol{\ell} + (\varepsilon-\bar{\varepsilon})\boldsymbol{m} & \nabla_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{m} &= \bar{\lambda}\boldsymbol{k} - \sigma\boldsymbol{\ell} + (-\bar{\alpha}+\beta)\boldsymbol{m}\\
\nabla_{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{m} &= \bar{\nu}\boldsymbol{k} - \tau\boldsymbol{\ell} + (\gamma-\bar{\gamma})\boldsymbol{m} & \nabla_{\boldsymbol{m}}\overline{\boldsymbol{m}} &= \mu\boldsymbol{k} - \bar{\rho}\boldsymbol{\ell} + (\bar{\alpha}-\beta)\overline{\boldsymbol{m}}
\end{aligned}$$

となる．

複素共役をとればあと 6 個の式が出来，合計 16 個の式が揃う．しかるに，4 組を逆にして $\boldsymbol{k} \leftrightarrow \boldsymbol{\ell}$, $\boldsymbol{m} \leftrightarrow \overline{\boldsymbol{m}}$ とすれば，$\nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k}$ から $\nabla_{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{\ell}$ が出る，というようにして上記の式を減らすことも可能である．実ベクトル場 $\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{\ell}$ で作られた 4 個の式では，共変微分の結果も実ベクトルであることを注意しておく．

関係式 $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ をこの零的 4 組で表すと

$$[\boldsymbol{k},\boldsymbol{\ell}] = -(\gamma+\bar{\gamma})\boldsymbol{k} - (\varepsilon+\bar{\varepsilon})\boldsymbol{\ell} + (\pi+\bar{\tau})\boldsymbol{m} + (\bar{\pi}+\tau)\overline{\boldsymbol{m}} \quad (\text{実})$$
$$[\boldsymbol{k},\boldsymbol{m}] = (\bar{\pi}-\bar{\alpha}-\beta)\boldsymbol{k} - \kappa\boldsymbol{\ell} + (\varepsilon-\bar{\varepsilon}+\bar{\rho})\boldsymbol{m} + \sigma\overline{\boldsymbol{m}}$$
$$[\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{m}] = \bar{\nu}\boldsymbol{k} + (\bar{\alpha}+\beta-\tau)\boldsymbol{\ell} + (\gamma-\bar{\gamma}-\mu)\boldsymbol{m} - \bar{\lambda}\overline{\boldsymbol{m}}$$
$$[\boldsymbol{m},\overline{\boldsymbol{m}}] = (\mu-\bar{\mu})\boldsymbol{k} + (\rho-\bar{\rho})\boldsymbol{\ell} + (\bar{\beta}-\alpha)\boldsymbol{m} + (\bar{\alpha}-\beta)\overline{\boldsymbol{m}} \quad (\text{虚})$$

となる．

式 $\nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k} = (\varepsilon+\bar{\varepsilon})\boldsymbol{k} - \bar{\kappa}\boldsymbol{m} - \kappa\overline{\boldsymbol{m}}$ から，

$$\boldsymbol{k}\ \text{が原測地線} \Leftrightarrow \kappa = 0, \quad \boldsymbol{k}\ \text{が測地線} \Leftrightarrow \kappa = \varepsilon + \bar{\varepsilon} = 0$$

であることが分かる．

スピン係数と光学的スカラー θ, ω, σ の間には次のような関係がある．先ず，$\boldsymbol{m} = (1/\sqrt{2})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{i}\boldsymbol{y}), \overline{\boldsymbol{m}} = (1/\sqrt{2})(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{y})$ とすると，

$$\begin{aligned}\rho &= -<\nabla_{\overline{\boldsymbol{m}}}\boldsymbol{k}, \boldsymbol{m}> = -\tfrac{1}{2} <\nabla_{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{i}\boldsymbol{y})}\boldsymbol{k}, (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{i}\boldsymbol{y})> \\ &= -\tfrac{1}{2}\big[<\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{k},\boldsymbol{x}> + <\nabla_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{k},\boldsymbol{y}> + \boldsymbol{i}(-<\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{k},\boldsymbol{y}> + <\nabla_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{k},\boldsymbol{x}>)\big] \\ &= -(1/2)(\boldsymbol{k}_{x,x} + \boldsymbol{k}_{y,y}) + (i/2)(\boldsymbol{k}_{y,x} - \boldsymbol{k}_{x,y})\end{aligned}$$

となる．定義 5.7.1 の ω と θ の式から，この式が $-\theta + \boldsymbol{i}\omega$ であることが分かる．また，スピン係数の σ の定義式を展開して

$$\begin{aligned}\sigma &= -<\nabla_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{k}, \boldsymbol{m}> = -\tfrac{1}{2} <\nabla_{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{i}\boldsymbol{y})}\boldsymbol{k}, (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{i}\boldsymbol{y})> \\ &= (1/2)\big[-<\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{k},\boldsymbol{x}> + <\nabla_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{k},\boldsymbol{y}>\big] + (i/2)\big[(<\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{k},\boldsymbol{y}> + <\nabla_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{k},\boldsymbol{x}>)\big]\end{aligned}$$

となる．これは，前述の複素剪断に他ならない．

さて，この零的 4 組を，現在の問題である時空の幾何学に利用する．先ず，零的ベクトル場 $\boldsymbol{k}$ について調べる．スピン係数が簡単になるように残りのベクトル $\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{m}, \overline{\boldsymbol{m}}$ を採用する．スピン係数が簡単になるように零的 4 組を修正する，という手法はよく使われるものである．先ず，零的 4 組 $\{\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{m}, \overline{\boldsymbol{m}}\}$ において，$\boldsymbol{k}$ はそのままにし，実数部分 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ には，$\boldsymbol{k}$ のスカラー倍を加える形に変形する．

補題 5.8.3　M 上の零的 4 組を $\{\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{m}, \overline{\boldsymbol{m}}\}$ とする．M 上の複素数値関数 f が与えられたとき，$\boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{m}_1 = \boldsymbol{m} + f\boldsymbol{k}$ を満たす零的 4 組が一意に存在する．

逆に，零的ベクトル $\boldsymbol{\ell}_1$ で $< \boldsymbol{k}, \boldsymbol{\ell}_1 >= -1$ を満たすものが与えられたとき，関数 f が一意に存在し，この関数により，$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\ell}_1, \boldsymbol{m} + f\boldsymbol{k}, \overline{\boldsymbol{m}} + \bar{f}\boldsymbol{k}$ が零的 4 組であり，

$$\boldsymbol{\ell}_1 = |f|^2\boldsymbol{k} + \boldsymbol{\ell} + \bar{f}\boldsymbol{m} + f\overline{\boldsymbol{m}}$$

を満たすようにすることができる．

証明　f が与えられたとする．上記で $\boldsymbol{m}_1$ の共役を作れば $\overline{\boldsymbol{\ell}}_1 = \overline{\boldsymbol{m}} + \bar{f}\boldsymbol{k}$ である．このとき，$\boldsymbol{m}_1$ と $\overline{\boldsymbol{m}_1}$ は，零的ベクトル場で，スカラー積は $+1$ である．そこで，

$$\boldsymbol{\ell}_1 = a\boldsymbol{k} + b\boldsymbol{\ell} + c\boldsymbol{m} + d\overline{\boldsymbol{m}}$$

と書くと，

$$< \boldsymbol{\ell}_1, \boldsymbol{k} >= -1 \Rightarrow b = 1, \qquad < \boldsymbol{\ell}_1, \boldsymbol{m}_1 >= 0 \Rightarrow d = f,$$
$$< \boldsymbol{\ell}_1, \overline{\boldsymbol{m}}_1 >= 0 \Rightarrow c = \bar{f}$$

となる．また，$< \boldsymbol{\ell}_1, \boldsymbol{\ell}_1 >= 0$ から $a = f\bar{f} = |f|^2$ となるから，

$$\boldsymbol{\ell}_1 = |f|^2\boldsymbol{k} + \boldsymbol{\ell} + \bar{f}\boldsymbol{m} + f\overline{\boldsymbol{m}}$$

である．これらの $\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{\ell}_1, \boldsymbol{m}_1, \overline{\boldsymbol{m}}_1$ が求める零的 4 組である．

逆に，$\boldsymbol{\ell}_1$ が与えられれば，求める複素数値関数 f は，

$$0 =< \boldsymbol{\ell}_1, \boldsymbol{m} + f\boldsymbol{k} >=< \boldsymbol{\ell}_1, \boldsymbol{m} > -f$$

から，$f =< \boldsymbol{\ell}_1, \boldsymbol{m} >$ で定義すればよい．□

新しい零的 4 組のスピン係数は簡単に計算できる．例えば，次節において $\tau = < \nabla_{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{k}, \boldsymbol{m} >$ の変化を調べるが，

$$\begin{aligned}\tau_1 &= - < \nabla_{\boldsymbol{\ell}_1}\boldsymbol{k}, \boldsymbol{m}_1 > \\ &= - < |f|^2\nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k} + \nabla_{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{k} + \bar{f}\nabla_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{k} + f\nabla_{\overline{\boldsymbol{m}}}\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m} + f\boldsymbol{k} >\end{aligned}$$

である．この右辺において，$f\boldsymbol{k}$ は，$\boldsymbol{k}$ とのスカラー積でゼロになるので消すことができる．よって，新しい零的 4 組では

$$\tau_1 = |f|^2\kappa + \tau + \bar{f}\sigma + f\rho$$

となる．

補題 5.8.3 で述べたものをクラス I の修正と呼ぶ．クラス II の修正は，$\boldsymbol{k}$ の役割を $\boldsymbol{\ell}$ に置き換えたものである．

もう1つ，クラス III の修正とは，$\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{\ell}$ を**ブースト** (boost) $\boldsymbol{k}_1 = g\,\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\ell}_1 = (1/g)\,\boldsymbol{\ell}$ に置き換え，$\boldsymbol{m}$ と $\overline{\boldsymbol{m}}$ を回転，$\boldsymbol{m}_1 = e^{i\vartheta}\boldsymbol{m}, \overline{\boldsymbol{m}}_1 = e^{-i\vartheta}\overline{\boldsymbol{k}}_1$ に置き換えたものである．ここに，$g \neq 0$ で，ϑ は M 上の実数値関数である．

向きを保存する零的 4 組の変換はこの 3 つの修正の組み合わせで表現されるが，これは，容易に示すことができる．

注意 5.8.4　これらの修正により，スピン係数は次のように変換される．

クラス I. κ は不変，$\rho, \sigma, \varepsilon$ は κ のスカラー倍を加えたものになることが，定義から容易に分かる．よって，もし $\kappa = 0$ ならば，スピン係数 $\rho, \sigma, \varepsilon$ は不変である．$\tau, \alpha, \beta, \gamma$ の変化は，τ の式の変化に代数的に依存している．しかしながら，π, λ, μ, ν の変化には微分が入ってくる (Newman and Penrose 1962, Chandrasekhar 1983 等を見よ).

クラス II. $\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{\ell}$ を交換すればクラス I と同様である．

クラス III. $\kappa, \rho, \sigma, \tau$ と π, λ, μ, ν は，ゼロでない関数倍の変更のみとなる．特に，ブースト $\boldsymbol{k}_1 = g\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\ell}_1 = (1/g)\boldsymbol{\ell}$ の修正では，π と τ は不変で，

$$\kappa_1 = g^2\kappa,\ \rho_1 = g\rho,\ \sigma_1 = g\sigma, \quad \lambda_1 = l/g,\ \mu_1 = \mu/g,\ \nu_1 = \nu/g^2,$$

となる．回転では，ρ と μ が不変で，定義 5.8.1 の左側と真ん中の列にある係数は (ρ と μ を除いて), 絶対値が不変となる．他のもの，つまり，$\gamma, \varepsilon, \alpha, \beta$ は複雑になる．例えば，g のブーストと ϑ の回転で

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \tfrac{1}{2}\big[- < \nabla_{g\boldsymbol{k}}(gk), \boldsymbol{\ell}/g > + < \nabla_{g\boldsymbol{k}}(e^{i\vartheta}\boldsymbol{m}), e^{-i\vartheta}\overline{\boldsymbol{m}} >\big] \\
&= \tfrac{1}{2}\big[- < \nabla_{\boldsymbol{k}}(g\boldsymbol{k}), \boldsymbol{\ell} > + g < \nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{m}, \overline{\boldsymbol{k}} > + ge^{-i\vartheta}\boldsymbol{k}[e^{i\vartheta}] < \boldsymbol{m}, \overline{\boldsymbol{m}} >\big] \\
&= g\varepsilon + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{k}[g] + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{i}g\boldsymbol{k}[\vartheta]
\end{aligned}$$

と変形されるのである．‖

さて，ニューマン－ペンローズ技法を使って曲率を表すことにする．特に，曲率をワイル曲率とリッチ曲率に分解し，それらをスピン係数で表すことを考える．

時空のワイル曲率テンソル C は簡単な表現になる．

定義 5.8.5　時空の零的 4 組を $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{m}, \overline{\boldsymbol{m}}$ とする．ワイル・テンソルを C とし，$C_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{\ell}\boldsymbol{m}\overline{\boldsymbol{k}}} = C(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{m}, \overline{\boldsymbol{m}})$ のように書いたとき，複素数値関数

$$\psi_0 = C_{\boldsymbol{kmkm}}, \psi_1 = C_{\boldsymbol{k\ell km}}, \psi_2 = C_{\boldsymbol{km}\overline{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{\ell}}, \psi_3 = C_{\boldsymbol{\ell k \ell}\overline{\boldsymbol{m}}}, \psi_4 = C_{\boldsymbol{\ell}\overline{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{\ell}\overline{\boldsymbol{m}}}$$

を，この零的 4 組の**ワイル・スカラー** (Weyl scalar) と呼ぶ.

零的 4 組で，$\boldsymbol{k} \leftrightarrow \boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{m} \leftrightarrow \overline{\boldsymbol{m}}$ とすると，

$$\psi_0 \leftrightarrow \psi_4, \qquad \psi_1 \leftrightarrow \psi_3$$

となり，ψ_2 は不変である．後の計算では，ワイル・テンソルの零的 4 組による成分とワイル・スカラーの関係が必要となる．

補題 5.8.6　ワイル・テンソルの，零的 4 組 $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{m}, \overline{\boldsymbol{m}}$ に関する成分 $C_{(\boldsymbol{xy})(\boldsymbol{vw})}$ は，ワイル・スカラーにより

	$\boldsymbol{k\ell}$	$\boldsymbol{km}$	$\boldsymbol{k}\overline{\boldsymbol{m}}$	$\boldsymbol{\ell m}$	$\boldsymbol{\ell}\overline{\boldsymbol{m}}$	$\boldsymbol{m}\overline{\boldsymbol{m}}$
$\boldsymbol{k\ell}$	$\psi_2 + \bar{\psi}_2$	ψ_1	$\bar{\psi}_1$	$-\bar{\psi}_3$	$-\psi_3$	$-\psi_2 + \bar{\psi}_2$
$\boldsymbol{km}$		ψ_0	0	0	$-\psi_2$	$-\psi_1$
$\boldsymbol{k}\overline{\boldsymbol{m}}$			$\bar{\psi}_0$	$-\bar{\psi}_2$	0	$\bar{\psi}_1$
$\boldsymbol{\ell m}$				$\bar{\psi}_4$	0	$-\bar{\psi}_3$
$\boldsymbol{\ell}\overline{\boldsymbol{m}}$					ψ_4	ψ_3
$\boldsymbol{m}\overline{\boldsymbol{m}}$						$\psi_2 + \bar{\psi}_2$

と表現できる．($C_{(\boldsymbol{xy})(\boldsymbol{vw})}$ は組ごとに対称であるから，下半分は省略してある.)

証明　C はトレース・フリーであるから，零的 4 組の中の 2 つのベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ に対し

$$0 = \Sigma g^{ab} C_{a\boldsymbol{v}b\boldsymbol{v}} = -C_{\boldsymbol{kv\ell w}} - C_{\boldsymbol{\ell vkw}} + C_{\boldsymbol{mv}\overline{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{w}} + C_{\overline{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{vmw}}$$

となる．ここで，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ を限定すると次のようになる．

1. $C_{\boldsymbol{kmk}\overline{\boldsymbol{m}}} = C_{\boldsymbol{\ell m \ell}\overline{\boldsymbol{m}}} = C_{\boldsymbol{km\ell m}} = 0$
2. $C_{\boldsymbol{k\ell k\ell}} = C_{\boldsymbol{m}\overline{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{m}\overline{\boldsymbol{m}}} = \psi_2 + \bar{\psi}_2.$　　　(実)
3. $C_{\boldsymbol{km}\overline{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{m}} = \psi_1, C_{\boldsymbol{\ell}\overline{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{m}\overline{\boldsymbol{m}}} = \psi_3.$

さらに，巡回対称性 $C_{\boldsymbol{k\ell m\overline{m}}}+C_{\boldsymbol{km\overline{m}\ell}}+C_{\boldsymbol{k\overline{m}\ell m}}=0$ から

4. $C_{\boldsymbol{k\ell m\overline{m}}}=-\psi_2+\bar{\psi}_2,$　　　　　(虚)

となる．以上の関係式とそれらの複素共役から，C の成分が全て決定される．□

ワイル・スカラーを使うと，主要零的方向はきれいに表現することができる．

補題 5.8.7　主要零的ベクトルで重複度が m であるものを $\boldsymbol{k}$ とする．このとき，1つの (よって，任意の) 零的 4 組 $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{m}, \overline{\boldsymbol{m}}$ に関して

$$\begin{aligned}
m \geq 1 &\Leftrightarrow \psi_0 = 0,\\
m \geq 2 &\Leftrightarrow \psi_0 = \psi_1 = 0,\\
m \geq 3 &\Leftrightarrow \psi_0 = \psi_1 = \psi_2 = 0,\\
m \geq 4 &\Leftrightarrow \psi_0 = \psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0
\end{aligned}$$

が成立する．(したがって，例えば，$m=2 \Leftrightarrow \psi_0=\psi_1=0,\ \psi_2\neq 0$ である．)

証明　これは，命題 5.5.5 を書き換えたものである．

(1) もし $m\geq 1$ ならば，命題 5.5.5 より，$C_{\boldsymbol{kxkx}}=C_{\boldsymbol{kyky}}=C_{\boldsymbol{kxky}}=0$ である．しかるに

$$\psi_0 = C_{\boldsymbol{kmkm}} = C_{\boldsymbol{kxkx}} - C_{\boldsymbol{kyky}} + 2iC_{\boldsymbol{kxky}}$$

ゆえ，$\psi_0=0$ を得る．

逆に $\psi_0=0$ を仮定すると，$C_{\boldsymbol{kxkx}}-C_{\boldsymbol{kyky}}=C_{\boldsymbol{kxky}}=0$ となる．

C はトレース・フリーであるから，$C_{\boldsymbol{kxkx}}+C_{\boldsymbol{kyky}}=0$ である．

よって，$\boldsymbol{k}^\perp=\mathrm{Span}\{\boldsymbol{k},\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\}$ 上で $C_{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\cdot}$ はゼロとなる．よって，命題 5.5.5 より $m\geq 1$ となる．

(2) もし $m\geq 2$ ならば，命題 5.5.5 から

$$C_{\boldsymbol{kxkx}}=C_{\boldsymbol{kyky}}=C_{\boldsymbol{kxky}}=C_{\boldsymbol{kxk\ell}}=C_{\boldsymbol{kyk\ell}}=0$$

を得る．しかるに，$\psi_1=C_{\boldsymbol{k\ell km}}=C_{\boldsymbol{k\ell kx}}-iC_{\boldsymbol{k\ell ky}}$ であるから，ψ_0 と ψ_1 の両方がゼロとなる．

逆に，$\psi_0=\psi_1=0$ を仮定する．先ず，$\psi_1=0$ から任意の $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{k}^\perp$ に対して $C_{\boldsymbol{k\ell kv}}$ となり，$\psi_0=0$ から $C_{\boldsymbol{kxkx}}=C_{\boldsymbol{kyky}}=C_{\boldsymbol{kxky}}=0$ を得る．よって命題 5.5.5 から $m\geq 2$ となる．

他の場合も同様にして示すことができる．□

注意 5.8.8 ニューマン－ペンローズ技法で曲率をワイル・テンソルとリッチ・テンソルに分解するには，これまでと同じように，5.1 節の最後にある式を使えばよい．ちなみに，$g_{\boldsymbol{k\ell}} = -1, g_{\boldsymbol{m\overline{m}}} = +1$ であるから，$R_{\boldsymbol{k\ell}} = \mathrm{Ric}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\ell})$ のように書くと，

$$R_{\boldsymbol{kmkm}} = C_{\boldsymbol{kmkm}} = \psi_1, \quad R_{\boldsymbol{k\ell km}} = C_{\boldsymbol{k\ell km}} + \frac{1}{2}R_{\boldsymbol{km}} = \psi_1 + \frac{1}{2}R_{\boldsymbol{km}}$$
$$R_{\boldsymbol{km\overline{m}\ell}} = C_{\boldsymbol{km\overline{m}\ell}} + \frac{1}{2}(R_{\boldsymbol{m\overline{m}}} - R_{\boldsymbol{k\ell}}) - S/6 = \psi_2 + S/12$$

等を得る．最後の式は，$S = \mathrm{CRic} = \Sigma g^{ab}R_{ab} = 2(R_{\boldsymbol{m\overline{m}}} - R_{\boldsymbol{k\ell}})$ より出る．‖

リーマンの曲率テンソルをクリストッフェルの記号で表す古典的な表現に対比できるのが，曲率を零的 4 組のスピン係数で表すことである．ニューマン－ペンローズ技法では，スピン係数の微分が入り，作られる (実表現の) 式の数は最小の個数 (20 個) より増える．しかしながら，必要となる曲率の恒等式は 5 個．ザックスの方程式 (5.7 節) を一般化した式 2 個と，ワイル・スカラー ψ_1 を含む式 3 個である．これらの式は，リーマン曲率の式

$$\begin{aligned} R_{xyvw} &= -< R_{xy}v, w >= -< \nabla_x\nabla_y v, w > + < \nabla_y\nabla_x v, w > + < \nabla_{[x,y]}v, w > \\ &= -x < \nabla_y v, w > + < \nabla_y v, \nabla_x w > +y < \nabla_x v, w > \\ &\qquad - < \nabla_x v, \nabla_y w > + < \nabla_{[x,y]}v, w > \end{aligned}$$

から得られる．

命題 5.8.9 零的 4 組 $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{\overline{m}}$ に対して

(1) $\boldsymbol{k}[\rho] - \boldsymbol{\overline{m}}[\kappa] = \rho^2 + \sigma\bar{\sigma} + \rho(\varepsilon + \bar{\varepsilon}) - \bar{\kappa}\tau - \kappa(3\alpha + \bar{\beta} - \pi) + \frac{1}{2}\mathrm{Ric}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k})$,

(2) $\boldsymbol{k}[\sigma] - \boldsymbol{m}[\kappa] = \sigma(\rho + \bar{\rho} + 3\varepsilon - \bar{\varepsilon}) - \kappa(\tau - \bar{\pi} + \bar{\alpha} + 3\beta) + \psi_0$,

(3) $\boldsymbol{k}[\tau] - \boldsymbol{\ell}[\kappa] = \rho(\tau + \bar{\pi}) + \sigma(\bar{\tau} + \pi) + \tau(\varepsilon - \bar{\varepsilon}) - \kappa(3\gamma + \bar{\gamma}) + \psi_1 + \frac{1}{2}\mathrm{Ric}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{m})$,

(4) $\boldsymbol{k}[\beta] - \boldsymbol{m}[\varepsilon] = \sigma(\alpha + \pi) + \beta(\bar{\rho} - \bar{\varepsilon}) - \kappa(\mu + \gamma) - \varepsilon(\bar{\alpha} - \bar{\pi}) + \psi_1$,

(5) $\boldsymbol{m}[\rho] - \boldsymbol{\overline{m}}[\sigma] = \rho(\bar{\alpha} + \beta) - \sigma(3\alpha - \bar{\beta}) + \tau(\rho - \bar{\rho}) + \kappa(\mu - \bar{\mu}) - \psi_1 + \frac{1}{2}\mathrm{Ric}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{m})$,

が成立する．

証明　ザックスの方程式 (S1) を一般化するため，$\boldsymbol{k}[\rho]=-\boldsymbol{k}<\nabla_{\overline{\boldsymbol{m}}}\boldsymbol{k},\boldsymbol{m}>$ を計算する．先ず，一般式 $-x<\nabla_y v,w>$ において $x=\boldsymbol{k},y=\overline{\boldsymbol{m}},y=\boldsymbol{k},w=\boldsymbol{m}$ とすると

$$-\boldsymbol{k}<\nabla_{\overline{\boldsymbol{m}}}\boldsymbol{k},\boldsymbol{m}>+-\overline{\boldsymbol{m}}<\nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k},\boldsymbol{m}>=<\nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k},\nabla_{\overline{\boldsymbol{m}}}\boldsymbol{m}>-<\nabla_{\overline{\boldsymbol{m}}}\boldsymbol{k},\nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{m}>$$
$$-<\nabla_{[\boldsymbol{k},\overline{\boldsymbol{m}}]}k,\boldsymbol{m}>+R_{\boldsymbol{k}\overline{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{k}\boldsymbol{m}}$$

となる．この式の左辺が $\boldsymbol{k}[\rho]-\overline{\boldsymbol{m}}[\kappa]$ である．右辺は，系 5.8.2 から

$$<\nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k},\nabla_{\overline{\boldsymbol{m}}}\boldsymbol{m}>=<(\varepsilon+\bar{\varepsilon})\boldsymbol{k}-\bar{\kappa}\boldsymbol{m}-\kappa\overline{\boldsymbol{m}},\bar{\mu}\boldsymbol{k}-\rho\boldsymbol{\ell}+(\alpha-\bar{\beta})\boldsymbol{m}>$$
$$=\rho(\varepsilon+\bar{\varepsilon})-\kappa(\alpha-\bar{\beta})$$

を得る．同様にして，

$$-<\nabla_{\overline{\boldsymbol{m}}}\boldsymbol{k},\nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{m}>=-\kappa(\alpha+\bar{\beta})+\rho(\varepsilon-\bar{\varepsilon})$$

である．また，

$$[\boldsymbol{k},\overline{\boldsymbol{m}}]=(\pi-\alpha-\bar{\beta})\boldsymbol{k}-\bar{\kappa}\boldsymbol{\ell}+(\bar{\varepsilon}-\varepsilon+\rho)\overline{\boldsymbol{m}}+\bar{\sigma}\boldsymbol{m}$$

であるから，

$$-<\nabla_{[\boldsymbol{k},\overline{\boldsymbol{m}}]}\boldsymbol{k},\boldsymbol{m}>=(\pi-\alpha-\bar{\beta})\kappa-\bar{\kappa}\tau+(\bar{\varepsilon}-\varepsilon+\rho)\rho+\bar{\sigma}\sigma$$

を得る．これらの 3 式を加えて

$$\rho^2+\sigma\bar{\sigma}+\rho(\varepsilon+\bar{\varepsilon})-\bar{\kappa}\tau-\kappa(3\alpha+\bar{\beta}-\pi)$$

となる．後は，$R_{\boldsymbol{k}\overline{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{k}\boldsymbol{m}}$ が $\frac{1}{2}R_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}}$ となることを見れば (1) が得られる．

注意 5.8.8 で $R_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{m}\boldsymbol{k}\boldsymbol{m}}=C_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{m}\boldsymbol{k}\boldsymbol{m}}=\psi_0$ を示してあるから，後は上記と同様にして，$\boldsymbol{k}[\sigma]=-\boldsymbol{k}<\nabla_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{k},\boldsymbol{m}>$ から (2) が出る．

次に，ψ_1 を含む曲率の式を調べる．先ず，$\psi_1=C_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{\ell}\boldsymbol{k}\boldsymbol{m}}=C_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{m}\overline{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{m}}$ であるから，注意 5.8.8 を念頭に入れ，上記の公式 (*) を $R_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{\ell}\boldsymbol{k}\boldsymbol{m}}$ と $R_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{m}\overline{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{m}}$ に適用し，対称性を考慮して $R_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{m}\boldsymbol{k}\boldsymbol{\ell}}$ と $R_{\overline{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{m}\boldsymbol{k}\boldsymbol{m}}$ を計算する．

これで $R_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{\ell}\boldsymbol{k}\boldsymbol{m}}=\boldsymbol{k}[\tau]-\boldsymbol{\ell}[\kappa]+\ldots$ 等の式が得られるので，$R_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{\ell}\boldsymbol{k}\boldsymbol{m}}=\psi_1+\frac{1}{2}R_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{m}}$ を使えば (3) が出る．同様にして，$R_{\overline{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{m}\boldsymbol{k}\boldsymbol{m}}$ から (5) が分かる．

スピン係数 $\alpha, \beta, \varepsilon$ の 2 つの定義から，残り 2 つの式は

$$R_{\boldsymbol{kmk\ell}} = \boldsymbol{k}[\bar{\alpha} + \beta] - \boldsymbol{m}[\varepsilon + \bar{\varepsilon}] + \dots$$
$$R_{\boldsymbol{km\overline{m}m}} = -\boldsymbol{k}[\bar{\alpha} - \beta] + \boldsymbol{m}[\bar{\varepsilon} - \varepsilon] + \dots$$

となる．よって

$$\frac{1}{2}[R_{\boldsymbol{kmk\ell}} + R_{\boldsymbol{km\overline{m}m}}] = \boldsymbol{k}[\beta] - \boldsymbol{m}[\varepsilon] + \dots$$

となり，

$$R_{\boldsymbol{k\ell km}} = \psi_1 + \frac{1}{2}R_{\boldsymbol{km}}, R_{\boldsymbol{km\overline{m}m}} = \psi_1 - \frac{1}{2}R_{\boldsymbol{km}}$$

なので，これらから (4) が得られる．□

この命題 5.8.9 の式 (1) と (2) は，前の節のザックスの方程式 (S1), (S2) を一般化したものである．実際，$\boldsymbol{k}$ が測地線ならば，前に述べたように $\kappa = 0, \varepsilon + \bar{\varepsilon} = 0$ であるから，方程式 (1) は

$$\boldsymbol{k}[\rho] = \rho^2 + \sigma\bar{\sigma} + \frac{1}{2}\mathrm{Ric}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k})$$

となる．これは，$\rho = -\theta + \boldsymbol{i}\omega$ として，前節の (S1) 式である．次に，命題 5.8.9 の (2) 式で $\boldsymbol{k}$ とすると

$$\boldsymbol{k}[\sigma] = \sigma(\rho + \bar{\rho} + 3\varepsilon - \bar{\varepsilon}) + \psi_0$$

となる．方程式 (S2) では，ベクトル場 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ (よって $\boldsymbol{m}$ と $\overline{\boldsymbol{m}}$) は $\boldsymbol{k}$ 方向に平行である，と仮定されていた．よって，$\varepsilon - \bar{\varepsilon} = 0$, つまり $\varepsilon = 0$ である．これを入れると，上式は

$$\boldsymbol{k}[\sigma] = \sigma(\rho + \bar{\rho}) + \psi_0 = -2\theta\sigma + \psi_0$$

となる．すなわち，$R_{\boldsymbol{kmkm}} = C_{\boldsymbol{kmkm}}$ から

$$\psi_0 = \frac{1}{2}R_{\boldsymbol{k(x-iy)k(x-iy)}} = \frac{1}{2}[R_{\boldsymbol{k}x\boldsymbol{k}x} - R_{\boldsymbol{kxkx}} - \boldsymbol{i}\,2R_{\boldsymbol{kxkx}}]$$

で，ψ_0 は方程式 (S2) の曲率の項なのである．以上より，式 (2) から，ワイル・スカラー ψ_0 が拡大と剪断を出す，つまり $\psi_0 \neq 0$ ならば $\theta \neq 0, \sigma \neq 0$ となることが分かるのである．

5.9　ビアンキの恒等式とD型

さて，カー時空のようなD型時空における主要零的叢の幾何学的性質を調べるのであるが，そのためには，ビアンキの恒等式(1.3節)が必要となる(もちろん，他のペトロフ・タイプでもこの恒等式は有用である)．ビアンキの恒等式は，曲率の一般的性質を一番精密に表したものであり，ニューマン－ペンローズ技法等にこの恒等式を適用すると多量の式が得られる．ここで必要となるのは，ワイル・スカラー ψ_0, ψ_1, ψ_2 が関係している式である．

いま，零的4組を $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{m}, \overline{\boldsymbol{m}}$ とし，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ を任意のベクトル場とすると，微分に関する積の法則から

$$(*)\qquad \boldsymbol{k}[R(\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})] = (\nabla_{\boldsymbol{k}} R)(\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + R(\nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \\ + R(\boldsymbol{\ell}, \nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{m}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + R(\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{m}, \nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + R(\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{v}, \nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{w})$$

となる．(ここでは $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{m}$ を用いたが，他のベクトルでも成立する.) ビアンキの恒等式は

$$(\nabla_{\boldsymbol{k}} R)_{\boldsymbol{\ell m}} + (\nabla_{\boldsymbol{\ell}} R)_{\boldsymbol{mk}} + (\nabla_{\boldsymbol{m}} R)_{\boldsymbol{k\ell}} = 0$$

であるから，式(*)で $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{m}$ を巡回して加えれば，曲率テンソルの微分の項は消える．そして，残りにニューマン－ペンローズ技法を用いるのである．

ビアンキの恒等式を使って次の2式が出るが，カー時空の場合はリッチ平坦であるから，リッチ曲率が関係する項は計算しないでよい．

補題 5.9.1　零的4組 $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{m}, \overline{\boldsymbol{m}}$ に対して

(1) $\boldsymbol{k}[\psi_1] - \overline{\boldsymbol{m}}[\psi_0] = (\pi - 4\alpha)\psi_0 + 2(2\rho + \varepsilon)\psi_1 - 3\kappa\psi_2 +$(Ric の項),

(2) $\boldsymbol{m}[\psi_1] - \boldsymbol{\ell}[\psi_0] = (\mu - 4\gamma)\psi_0 + 2(2\tau + \beta)\psi_1 - 3\sigma\psi_2 +$(Ric の項)，を得る．

証明　式(*)で $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{m}$ と置いて，ワイル・スカラーの定義から

$$\boldsymbol{k}[R(\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{m})] = (\nabla_{\boldsymbol{k}} R)(\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{m}) + R(\nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{m}) \\ + R(\boldsymbol{\ell}, \nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{m}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{m}) + R(\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{m}, \nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k}, \boldsymbol{m}) + R(\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{k}, \nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{m})$$

となる．リッチ曲率が関係するところは除くので，Ric $=0$ と考えてよいから，R は C となる．上式で $\boldsymbol{k},\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{m}$ を巡回して加えると，

$$\begin{gathered}\boldsymbol{k}[C(\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{m},\boldsymbol{k},\boldsymbol{m})]+\boldsymbol{\ell}[C(\boldsymbol{m},\boldsymbol{k},\boldsymbol{k},\boldsymbol{m})]+\boldsymbol{m}[C(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{k},\boldsymbol{m})]= \\ C(\nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{m},\boldsymbol{k},\boldsymbol{m})+C(\boldsymbol{\ell},\nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{m},\boldsymbol{k},\boldsymbol{m})+C(\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{m},\nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k},\boldsymbol{m})+C(\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{m},\boldsymbol{k},\nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{m}) \\ C(\nabla_{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{m},\boldsymbol{k},\boldsymbol{k},\boldsymbol{m})+C(\boldsymbol{m},\nabla_{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{k},\boldsymbol{k},\boldsymbol{m})+C(\boldsymbol{m},\boldsymbol{k},\nabla_{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{k},\boldsymbol{m})+C(\boldsymbol{m},\boldsymbol{k},\boldsymbol{k},\nabla_{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{m}) \\ C(\nabla_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{k},\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{k},\boldsymbol{m})+C(\boldsymbol{k},\nabla_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{k},\boldsymbol{m})+C(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\ell},\nabla_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{k},\boldsymbol{m})+C(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{k},\nabla_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{m})\end{gathered}$$

となる．これを $B(\boldsymbol{k}\boldsymbol{\ell}\boldsymbol{m})(\boldsymbol{k}\boldsymbol{m})$ と置くことにする．

この式の左辺については，$C(\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{m},\boldsymbol{k}\boldsymbol{m})=0$ であるから，$-\boldsymbol{\ell}[\psi_0]+\boldsymbol{m}[\psi_1]$ となり，(2) 式の左辺となる．右辺については，曲率テンソルの対称性を使って整理し，

$$\begin{aligned} a&=C(\boldsymbol{k},\boldsymbol{m},\nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{m})+2C(\boldsymbol{k},\boldsymbol{m},\boldsymbol{m},\nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k}) \\ b&=C(\boldsymbol{k},\boldsymbol{m},\boldsymbol{\ell},[\boldsymbol{k},\boldsymbol{m}])+C(\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{m},\boldsymbol{k},\nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{m})+C(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\ell},\nabla_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{k},\boldsymbol{m}) \\ c&=C(\nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k},\boldsymbol{m},\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{m}) \\ d&=-2C(\boldsymbol{k},\boldsymbol{m},\boldsymbol{k},\nabla_{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{m})+C(\boldsymbol{k},\boldsymbol{m},\boldsymbol{k},\nabla_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{\ell}) \\ e&=C(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{k},\nabla_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{m})\end{aligned}$$

と 5 項に分けて計算する．例えば a を計算すると，系 5.8.2 の共変微分の式と補題 5.8.6 のワイル曲率の式を使い，

$$\begin{aligned} a&=C(\boldsymbol{k},\boldsymbol{m},\overline{\boldsymbol{k}},\boldsymbol{m})\bar{\pi}+2C(\boldsymbol{k},\boldsymbol{m},\boldsymbol{m},\boldsymbol{k}k)(\gamma+\bar{\gamma})+2C(\boldsymbol{k},\boldsymbol{m},\boldsymbol{m},\overline{\boldsymbol{m}})(-\tau) \\ &=\psi_1\bar{\pi}-2\psi_0(\gamma+\bar{\gamma})+2\psi_1\tau \\ &=-2(\gamma+\bar{\gamma})\psi_0+(2\tau+\bar{\pi})\psi_1\end{aligned}$$

となる．同様にして

$$\begin{aligned} b&=(2\bar{\alpha}+2\beta-\bar{\pi})\psi_1-2\sigma\psi_2+\sigma\bar{\psi}_2+\kappa\bar{\psi}_3, \\ c&=-\kappa\bar{\psi}_3, \\ d&=(-2\gamma+2\bar{\gamma}+\mu)\psi_0+(-\bar{\alpha}-\beta+2\tau)\psi_1, \\ e&=-\sigma\psi_2-\sigma\bar{\psi}_2+(-\bar{\alpha}+\beta)\psi_1\end{aligned}$$

を得る．したがって，

$$a+b+c+d+e=(-4\gamma+\mu)\psi_0+2(2\tau+\beta)\psi_1-3\sigma\psi_2$$

となり，(2) の右辺が得られる．

同様にして $B(\boldsymbol{k}\overline{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{m})(\boldsymbol{k}\boldsymbol{m})$ を計算すると (1) が出る．□

命題 5.9.2　M をリッチ平坦な時空とする．主要零的ベクトル場で重複度の 1 つが $m \geq 2$ であるものを $\boldsymbol{k}$ とする．このとき，零的 4 組 $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{m}, \overline{\boldsymbol{m}}$ は $\kappa\psi_2 = 0, \sigma\psi_2 = 0$ を満たす．したがって，重複度がちょうど 2 のときには，$\boldsymbol{k}$ は，原測地線で，剪断はゼロである．

証明　補題 5.8.7 より，$m \geq 2$ ならば $\psi_0 = \psi_1 = 0$ となる．そして，$\mathrm{Ric} = 0$ であるから，補題 5.9.1 から $\kappa\psi_2 = 0, \sigma\psi_2 = 0$ となる．□

これで，D 型の時空について述べる準備ができた．

命題 5.9.3　D 型の時空 M において，2 個の主要零的叢は，測地線であり，剪断はゼロである．さらに，M (ないしは M 上の任意の開集合) において，測地線で剪断がゼロである叢はこれだけである．

証明　局所的に，$\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{\ell}$ が主要零的方向であるとする．各重複度は 2 である．もし必要なら $<\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\ell}> = -1$ となるように $\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{\ell}$ を取り直し，零的 4 組 $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{m}, \overline{\boldsymbol{m}}$ を作ることができる．補題 5.8.7 から $\psi_0 = \psi_1 = 0$ となる．この零的 4 組を逆にして $\psi_3 = \psi_4 = 0$ を得る．M は D 型であるから，全ての点でワイル・テンソルはゼロとはならず，$\psi_2 \neq 0$ を得る．命題 5.9.2 から，$\boldsymbol{k}$ は原測地線で剪断ゼロとなる．同じ論法を対称的に繰り返し，$\boldsymbol{\ell}$ についても同じ結果を得る．

次に，唯一性を見る．零的測地線叢に接するベクトル場を $\boldsymbol{n}$ とする．これが剪断ゼロならば，ザックスの方程式 (S2) で，$\boldsymbol{k}[\sigma] = -2\theta\sigma + \psi_0$ から $\psi_0 = 0$ となる．つまり，$\boldsymbol{n}$ は主要零的叢である．しかるに，$\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{\ell}$ を合わせて重複度が 4 となるから，命題 5.5.3 の分類から，$\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{k}$ か $\boldsymbol{\ell}$ の方向に一致することになる．□

この結果から直ちに，カー時空においては，内向線，外向線ともに主要零的叢は測地線で剪断がゼロであることが分かる．

ニューマン－ペンローズ技法を使えば，D 型の時空は，非常に簡潔に記述できる．

系 5.9.4　D 型の時空において，$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を (局所的な) 零的 4 組とし，$\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{\ell}$ が主要零的方向であるとする．このとき，スピン係数 $\kappa, \sigma, \nu, \lambda$ はゼロとなり，ワイル・テンソルの重複固有値である ψ_2 以外のワイル・スカラーもゼロとなる．

(スピン係数がゼロゆえ，固有値を表すのに記号 λ を使っても混乱は起きない．カー時空の場合には $\lambda = -\mathrm{M}(r - \boldsymbol{I}aC)^{-3}$ である.)

証明　最後の部分を示せばよい．(ここは，ペトロフ・タイプの固有値とニューマン－ペンローズ技法の固有値の両方が関係するので，自明ではない.) 仮定のような零的4組に対し，Span$\{\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\ell}\}$ は主要平面 Π である．ここで，$e_0 = (\boldsymbol{k}+\boldsymbol{\ell})/\sqrt{2}$, $e_1 = (\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\ell})/\sqrt{2}$ と定義する．これらのベクトル場から，正規直交標構の場 e_0, e_1, e_2, e_3 が得られる．いま Span$\{e_0, e_1\}$ が主要平面であるから，補題5.6.3より，$e_0 \wedge e_1$ と $e_2 \wedge e_3$ は，$\mathbb{C}$ の単純固有値 -2λ に対する固有ベクトルである．ゆえに，$e_3 \wedge e_1$ と $e_1 \wedge e_2$ は λ による固有空間を張っているのである．つまり，e_0, e_1, e_2, e_3 は，5.6節で定義した標準標構である．ゆえに (下記の) 補題5.9.5から，D型では，$\lambda = \lambda_2 = \lambda_3$ で $\psi_2 = \lambda$ となる．□

このように簡潔になることを使い，William Kinnersley (1968) は，それまでにいろいろな角度から知られていたD型のリッチ平坦な時空を完全に分類することに成功した．局所座標系で計量テンソルを記述し，全部で10組に分類されるのである．先ず，時空 M においてベクトル場 $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ で零的4組を作り，$\boldsymbol{k}$ が座標ベクトル場となるように座標系を導入する．座標系をいろいろと変換し，零的4組も修正を加え，(1階の微分方程式である) ニューマン－ペンローズ技法を書き下し，それを解く．これで，零的4組による座標系の式と計量テンソルが得られるのである．

次に，D型の時空と一般的なI型との関連を述べる．

補題 5.9.5　時空 M のワイル作用素 $\mathbb{C} \neq 0$ は対角化可能で，その固有値が $\lambda, \lambda_2, \lambda_3$ であるとする．つまり，M はI型 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq)$ かD型 $(\lambda_2 = \lambda_3)$ であるとする．標準標構場に随伴する零的4組 $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{\ell}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ に関して

$$\psi_0 = \psi_4 = \frac{1}{2}(\lambda_3 - \lambda_2), \quad \psi_2 = \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_3) = -\frac{1}{2}\lambda_1, \quad \psi_1 = \psi_2 = 0$$

となる．

証明　標準標構 e_0, e_1, e_2, e_3 に関するワイル・テンソルの成分は補題5.6.2で求めた．随伴する零的4組は

$$\sqrt{2}\boldsymbol{k} = e_0 + e_1, \quad \sqrt{2}\boldsymbol{\ell} = e_0 - e_1, \quad \sqrt{2}\boldsymbol{m} = e_2 - ie_3, \quad \sqrt{2}\overline{\boldsymbol{m}} = e_2 + \boldsymbol{i}e_3$$

である．これのワイル・スカラーは，そのままの計算で得られる．例えば，$\lambda_j = a_j + \boldsymbol{i} b_j$ で，

$$\begin{aligned}\psi_2 = C_{\boldsymbol{km\overline{m}\ell}} &= (1/4)C(e_0 + e_1, e_2 - \boldsymbol{i}e_3, e_2 + \boldsymbol{i}e_3, e_0 - e_1)\\ &= (1/4)[C_{0220} + C_{0330} - C_{1221} - C_{1331} - \boldsymbol{i}C_{1320} + \boldsymbol{i}C_{1230} + \boldsymbol{i}C_{0321} - \boldsymbol{i}C_{0231}]\\ &= (1/4)[a_2 + a_3 + a_3 + a_2 + \boldsymbol{i}(b_2 + b_3 + b_3 + b_2)] = \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_3)\end{aligned}$$

となる．ここで $\Sigma\lambda_j = 0$ であるから，$\psi_2 = -\frac{1}{2}\lambda_1$ を得る．□

I 型では，ψ_0 と ψ_4 がゼロでないから，零的 4 組を構成する零的ベクトル $\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{\ell}$ は主要零的ベクトルではない．$\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{\ell}$ を，4 個の主要零的方向のうちの 2 本となり，$\psi_0 = \psi_4 = 0$ を満たすようにするには，別な作り方をしなければならない．

5.10　ゴールドバーグ－ザックスの定理

リッチ平坦な時空では零的測地線叢が剪断ゼロとなることは，J. N. Goldberg and R. K. Sachs (1962) による基本的な結果を使って完全に記述することができる．

定理 5.10.1　リッチ平坦な (平坦ではない) 時空において，零的叢が測地線で剪断ゼロとなるための必要十分条件は，それがワイル・テンソルの重複 ($m \geq 2$) 主要零的叢となることである．

したがって，リッチ平坦な (真空の) 時空 M において，このような叢が存在するための必要十分条件は，M が代数的に退化する (ペトロフ・タイプでI型ではない) ことである，となる．以下の証明は，ニューマンとペンローズがニューマン－ペンローズ技法を導いた論文 (1962) によるものである．2 つに分割して証明していくことにする．

第 1 部.　$\boldsymbol{k}$ を重複 ($m \geq 2$) 主要零的ベクトル場とすると，$\boldsymbol{k}$ は測地線で剪断ゼロである．

ビアンキの恒等式を直接用いて証明する．$\boldsymbol{k}$ の重複度 m がちょうど 2 のとき，$\boldsymbol{k}$ が測地線で剪断ゼロとなることは前に示してある．よってここでは $m \geq 3$ を考える．このとき，補題 5.8.7 より，任意の零的 4 組 $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{m}, \overline{\boldsymbol{m}}$ に対して $\psi_0 = \psi_1 = \psi_2 = 0$

となり，補題 5.8.6 の配列は

	$\boldsymbol{k\ell}$	$\boldsymbol{km}$	$\boldsymbol{k\overline{m}}$	$\boldsymbol{\ell m}$	$\boldsymbol{\ell\overline{m}}$	$\boldsymbol{m\overline{m}}$
$\boldsymbol{k\ell}$	0	0	0	$-\bar{\psi}_3$	$-\psi_3$	0
$\boldsymbol{km}$		0	0	0	0	0
$\boldsymbol{k\overline{m}}$			0	0	0	0
$\boldsymbol{\ell m}$				$\bar{\psi}_4$	0	$-\bar{\psi}_3$
$\boldsymbol{\ell\overline{m}}$					ψ_4	ψ_3
$\boldsymbol{m\overline{m}}$						0

と簡単になる．$\psi_4 = C_{\boldsymbol{\ell\overline{m}\ell\overline{m}}}$ を除いて ψ_3 を調べるため，前節の長い式 $B(\boldsymbol{k\ell m})(\boldsymbol{km})$ において，2 番目の $\boldsymbol{m}$ を $\overline{\boldsymbol{k}}$ に置き換えて $B(\boldsymbol{k\ell m})(\boldsymbol{k\overline{m}})$ を作る．すなわち，

$$\boldsymbol{k}[C(\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{m},\boldsymbol{k},\overline{\boldsymbol{m}})]+\boldsymbol{\ell}[C(\boldsymbol{m},\boldsymbol{k},\boldsymbol{k},\overline{\boldsymbol{m}})]+\boldsymbol{m}[C(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{k},\overline{\boldsymbol{m}})]=$$
$$C(\nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{m},\boldsymbol{k},\overline{\boldsymbol{m}})+C(\boldsymbol{\ell},\nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{m},\boldsymbol{k},\overline{\boldsymbol{m}})+C(\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{m},\nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k},\overline{\boldsymbol{m}})+C(\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{m},\boldsymbol{k},\nabla_{\boldsymbol{k}}\overline{\boldsymbol{m}})$$
$$C(\nabla_{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{m},\boldsymbol{k},\boldsymbol{k},\overline{\boldsymbol{m}})+C(\boldsymbol{m},\nabla_{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{k},\boldsymbol{k},\overline{\boldsymbol{m}})+C(\boldsymbol{m},\boldsymbol{k},\nabla_{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{k},\overline{\boldsymbol{m}})+C(\boldsymbol{m},\boldsymbol{k},\boldsymbol{k},\nabla_{\boldsymbol{\ell}}\overline{\boldsymbol{m}})$$
$$C(\nabla_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{k},\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{k},\overline{\boldsymbol{m}})+C(\boldsymbol{k},\nabla_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{k},\overline{\boldsymbol{m}})+C(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\ell},\nabla_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{k},\overline{\boldsymbol{m}})+C(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{k},\nabla_{\boldsymbol{m}}\overline{\boldsymbol{m}})$$

とする．ワイル・テンソルの性質から，この式の多くの項がゼロとなり，

$$C(\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{m},\nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k},\overline{\boldsymbol{m}})+C(\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{m},\boldsymbol{k},\nabla_{\boldsymbol{k}}\overline{\boldsymbol{m}})+C(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\ell},\nabla_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{k},\overline{\boldsymbol{m}})=0$$

を得る．系 5.8.2 を使えば，これらの式は

$$\begin{aligned}
C(\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{m},\nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k},\overline{\boldsymbol{m}}) &= C(\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{m},(\varepsilon+\bar{\varepsilon})\boldsymbol{k}-\bar{\kappa}\boldsymbol{m}-\kappa\overline{\boldsymbol{m}},\overline{\boldsymbol{m}}) \\
&= -\bar{\kappa}C(\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{m},\boldsymbol{m},\overline{\boldsymbol{m}})=\bar{\kappa}\bar{\psi}_3, \\
C(\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{m},\boldsymbol{k},\nabla_{\boldsymbol{k}}\overline{\boldsymbol{m}}) &= C(\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{m},\boldsymbol{k},\pi\boldsymbol{k}-\bar{\kappa}\boldsymbol{\ell}-(\varepsilon-\bar{\varepsilon})\overline{\boldsymbol{m}}) \\
&= -\bar{\kappa}C(\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{m},\boldsymbol{k},\boldsymbol{\ell})=\bar{\kappa}\bar{\psi}_3, \\
C(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\ell},\nabla_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{k},\overline{\boldsymbol{m}}) &= C(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\ell},(\bar{\alpha}+\beta)\boldsymbol{k}-\bar{\rho}\boldsymbol{m}-\sigma\overline{\boldsymbol{m}},\overline{\boldsymbol{m}})=0
\end{aligned}$$

となる．したがって，$2\bar{\kappa}\bar{\psi}_3=0$ より $\kappa=0$ を得る．

同様にして，$B(\boldsymbol{k\ell m})(\boldsymbol{k\overline{m}})$ 式の最初の $\boldsymbol{k}$ を $\overline{\boldsymbol{m}}$ に置き換えると，$\sigma=0$ が出る．

残りの場合では，ψ_4 のみがゼロでないこととビアンキの恒等式 $B(\boldsymbol{k\ell m})(\boldsymbol{\ell\overline{m}})$ と $B(\boldsymbol{k\overline{m}m})(\boldsymbol{\ell m})$ から，$\kappa=\sigma=0$ が分かる．これで第 1 部が証明できた．□

第2部.　もし $\boldsymbol{k}$ が零的測地線のベクトル場で剪断ゼロならば，$\boldsymbol{k}$ は重複主要零的ベクトル場である．

局所的なことなので，$\boldsymbol{k}$ を含む零的4組 $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{m}, \overline{\boldsymbol{k}}$ が存在する．それらに対しては $\kappa = \sigma = 0$ である．補題5.8.7より，$\psi_0 = \psi_1 = 0$ を示せばよい．最初の関係式は，ザックスの方程式 $\boldsymbol{k}[\sigma] = (\rho + \bar{\rho})\sigma + \psi_0$ からすぐに出る．$\psi_2 = 0$ の証明は，簡単ではない．

注意5.8.4より，適当なブーストを取り，スピン係数 ε をゼロにし，κ と σ はゼロではないようにできる．これで，状況は次のように簡単になる．

系 5.10.2　リッチ平坦な時空において，零的4組 $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{m}, \overline{\boldsymbol{m}}$ が $\psi_0 = 0, \kappa = \varepsilon = \sigma = 0$ を満たすならば，

曲率の恒等式	ビアンキの恒等式
$(3')$ $\boldsymbol{k}[\tau] = (\tau + \bar{\pi})\rho + \psi_1$	$(1')$ $\boldsymbol{k}[\psi_1] = 4\rho\psi_1$
$(4')$ $\boldsymbol{k}[\beta] = \bar{\rho}\beta + \psi_1$	$(2')$ $\boldsymbol{m}[\psi_1] = 2(2\tau + \beta)\psi_1$
$(5')$ $\boldsymbol{m}[\rho] = (\bar{\alpha} + \beta)\rho + (\rho - \bar{\rho})\tau - \psi_1$	

となる．

証明　曲率の恒等式は命題5.8.9の方程式(3), (4), (5)から出る．ビアンキの恒等式は補題5.9.1より出る．□

第2部の証明を完成するために，零的4組をさらに簡潔にする．先ず，叢の曲線に沿って零的4組を平行にすることが考えられるが，系5.8.2から分かるように，これから得られるのは $\pi = 0$ である．系5.10.2の公式を検討すれば，τ を消去する方が重要であることが分かる．そのためには，(いささか間接的ではあるが) 次の2つの場合を調べればよい．

場合 1. ある開集合 $\mathcal{U}$ で $\rho = 0$ となる場合．このときは，式(5')からすぐに，$\mathcal{U}$ 上で $\psi_1 = 0$ となる．

場合 2.　ある開集合 $\mathcal{V}$ 上で ρ がゼロでない場合．これが成立すれば，関数 ρ の連続性から，ψ_1 の台，つまり集合 $\{p \in M | \rho(p) \neq 0\}$ の閉包の上で $\psi_1 = 0$ となる．M のこれ以外の点は (存在するとして) 場合1にあてはまるから，両方を合わせて定理の証明が完成する．

そこで，**時空全体で ρ がゼロにならない**と仮定してよい．注意5.8.4から，I型の

修正を零的 4 組に行うと ($\kappa, \rho, \sigma, \varepsilon$ は不変で), スピン係数 τ は

$$\tau_1 = |f|^2\kappa + \tau + \bar{f}\sigma + f\rho$$

のように変化する．しかるに，$\kappa = \sigma = 0$ で ρ はゼロでないから，$f = -\tau/\rho$ として新しい零的 4 組を作ることができ，そこでは τ は**恒等的にゼロ**になる．これより方程式 (3') は $\psi_1 = -\bar{\pi}\rho$ となる．

別の計算を ψ_1 に行い，$\psi_1 = 0$ とすることができる．先ず，上のビアンキの恒等式を書き直し

$$\boldsymbol{k}[\ \ln\psi_1] = 4\rho, \qquad \boldsymbol{m}[\ \ln\psi_1] = 2\beta$$

とする．また，括弧積 $[\ \boldsymbol{k}, \boldsymbol{m}] = \boldsymbol{km} - \boldsymbol{mk}$ を $\ln\psi_1$ に用いると，方程式 (4') と (5') から，

$$(*) \quad [\boldsymbol{k}, \boldsymbol{m}](\ln\psi_1) = 2\boldsymbol{k}(\beta) - 4\boldsymbol{m}(\rho) = 2\bar{\rho}\beta - 4(\bar{\alpha} + \beta)\rho + 6\psi_1$$

を得る．しかるに，$[\ \boldsymbol{k}, \boldsymbol{m}]$ に系 5.8.2 のニューマンーペンローズ公式を用いて，同じ $[\ \boldsymbol{k}, \boldsymbol{m}](\ln\psi_1)$ を計算する．いま $\kappa = \sigma = \varepsilon = 0$ であるから，$[\ \boldsymbol{k}, \boldsymbol{m}] = (\bar{\pi} - \bar{\alpha} - \beta)\boldsymbol{k} + \bar{\rho}\boldsymbol{m}$ となり

$$\begin{aligned}(**) \quad [\ \boldsymbol{k}, \boldsymbol{m}](\ln\psi_1) &= (\bar{\pi} - \bar{\alpha} - \beta)\boldsymbol{k}[\ \ln\psi_1] + \bar{\rho}\boldsymbol{m}[\ \ln\psi_1] \\ &= 4(\bar{\pi} - \bar{\alpha} - \beta)\rho + 2\bar{\rho}\beta\end{aligned}$$

となる．この 2 式 (*), (**) の右辺は等しいから

$$2\bar{\rho}\beta - 4(\bar{\alpha} + \beta)\rho + 6\psi_1 = 4(\bar{\pi} - \bar{\alpha} - \beta)\rho + 2\bar{\rho}\beta$$

で，$\psi_1 = (2/3)\bar{\pi}\rho$ を得る．しかるに $\psi_1 = -\bar{\pi}\rho$ である．ここで ρ はゼロではないから，この 2 式より $\pi = 0$ となり，$\psi_1 = 0$ を得る．これで第 2 部の証明が終わり，定理 5.10.1 の証明が完成した．□

ゴールドバーグーザックスの定理によれば，リッチ平坦な時空においては，零的測地線叢で剪断ゼロであるものはほとんど存在しないことになる．一般的なペトロフ・タイプである I 型では，局所的にも存在しない．代数的に見て特別なタイプでは存在する訳であり，D 型では 2 個存在する．この定理は，Ric = 0 をリッチ曲率に関する別な条件に置き換えて，一般化されている．例えば，Kundt and Thompson (1962) のクンツートンプソンの定理，Robinson and Schild (1962) 等を見よ．

この節では，ビアンキの恒等式に関して，本書で必要とする部分につき，それを強調する形で証明を与えた．本書では，ニューマン－ペンローズ技法のほんの一部を使っただけなのである．この公式の元々の形は，最も一般的な場合で**全て**の式を羅列し，丁寧に証明を与えてある．なにかの問題を解く場合には，この式のリストを調べて使えるものを見つけ，適当な零的4組でその式を簡単にして使用すればよい．

例えば，次の問題を考えるとする．ペトロフ・タイプのI型において，ワイル作用素 $\mathbb{C}$ の2個の固有値が等しい，つまり $\lambda_2 = \lambda_3$ とするとD型になる．では，$\lambda_2 = -\lambda_3$ のようにしたらどうであろうか．リッチ平坦の場合については，次のような否定的な結果が，Carl Brans (1975) で得られている．(なお，trace $\mathbb{C} = 0$ ゆえ，$l_2 = -l_3$ と $l_1 = 0$ は同値であることに注意しておく.)

命題 5.10.3　リッチ平坦な時空 M において，ワイル・テンソル $\mathbb{C}$ が対角化可能であるとする．もし $\mathbb{C}$ の固有値がゼロならば，M は平坦である．

証明　$\mathbb{C}$ が対角化可能であるから，各点において，M はI型，D型，O型のうちのどれかである (M 全体で同一の型であるとは仮定しない). M はリッチ平坦であるから，O型(共形的平坦)ならば平坦となる．D型なら固有値はゼロでないから，この場合は除く．後はI型．そこで，M のある p で，よって(各固有値の連続性から) p のある近傍 $\mathcal{U}$ でI型とする．いま，λ_1 をゼロである固有値とし，$\mathcal{U}$ 上で，滑らかな関数 f により $f = \lambda_3 = -\lambda_2$ であるとする．補題 5.9.5 により，p の近くで零的4組 $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{m}, \bar{\boldsymbol{i}}$ を取り，(ゼロでない)ワイル・スカラーを，$\psi_0 = \psi_4 = \frac{1}{2}(\lambda_3 - \lambda_2) = f$ とすることができる．

ビアンキの恒等式から作られたニューマン－ペンローズ技法 を Chandrasekhar (1983) で調べると

$$-\boldsymbol{k}[\psi_3] + \overline{\boldsymbol{m}}[\psi_2] = 2\lambda\psi_1 - 3\pi\psi_2 + 2(\varepsilon - \rho)\psi_3 + \kappa\psi_4 + (\text{Ric の項})$$
$$\boldsymbol{\ell}[\psi_2] - \boldsymbol{m}[\psi_3] = 2\nu\psi_1 - 3\mu\psi_2 + 2(\beta - \tau)\psi_3 + \sigma\psi_4 + (\text{Ric の項})$$

がある．今の条件下では，これらの式は $\kappa f = \sigma f = 0$ となる．$\mathcal{U}$ 上で f はゼロではないから，$\kappa = \sigma = 0$ を得る．しかるに，命題 5.8.9 の一般化したザックスの方程式 (2) より $\psi_0 = 0$ である．つまり，$f = 0$. これは矛盾である．□

5.9節で述べたように，ニューマン－ペンローズ技法は，種々の自然な条件を満たす局所的に定義された時空を発見して分類するのに大きな貢献をした．Kramer らによる Exact Solutions of Einstein's Field Equations (1980) には，多量の時空が，適当

な零的 4 組を使い，ペトロフ・タイプと等長変換群によりきれいに分類されている．

これとは逆の研究方向として，現在知られている少数の時空を取り上げ，それの物理学的性質をこまかく調べることも必要である．この場合には，ニューマン－ペンローズ技法だけではなく，テンソル解析，カルタン流の計算，そしてそれ以外の手法も必要となってくる．チャンドラセカールは，彼の本 The Mathematical Theory of Black Holes (1983) において，

「驚くべき事には，一般相対性理論におけるブラックホールの解は全てペトロフ・タイプの D 型となる．したがって，解析に必要な零的 4 組は，スピン係数 $\kappa, \sigma, \lambda, \nu$ と，ψ_2 以外のワイル・スカラーがゼロとなるものである.」

最後に，ニューマン－ペンローズ技法に表れる式の形からして，その計算に (少なくても検算には) コンピュータが必要となることを注意しておく．

付録A

単位系

相対性理論においては，簡単のため，光の速度 c と重力定数 G を (単位なしの)1 に設定した単位系が使用される．これを**幾何単位系** (geometric units) と呼ぶ．普通，単位系では，色々な単位を，**基準単位** U のベキ乗に帰着することができる．よく知られている例では，光年で，距離を時間に帰着している．

幾何単位系では，$1 = c =$ (距離)/(時間) ゆえ，距離，時間，質量を同じ単位で表している．ちなみにニュートン力学では $|a| = |F|/m = GM/r^2$ であり，(距離)/(時間)^2 = (質量)/(距離)^2 となっている．

幾何単位系と通常使われている単位系との間では，c と G を両方の単位系で表して，交換することができる．例えば，cgs 系では

$$c_{cgs} = 3 \times 10^{10} \text{ cm/sec}, \qquad G_{cgs} = 6.67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3/(g \text{ sec}^2)$$

となる (むろん近似値である). センチメートルを基準単位にすると，1 sec $= 3 \times 10^{10}$cm であり，

$$1g = 6.67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{sec}^2 = 7.4 \times 10^{-29} \text{ cm}$$

となる．例えば，太陽の質量は約 $2 \times 10^{33} g$ であるから 14.8×10^4cm, つまりほぼ 1.5 km となる．これは相対論の効果が顕著に現れる大きさではない．この質量を持つブラックホールでは，地平面の半径は $r_\pm < 2\text{M} = 3$ km であり，太陽の容積では地平面は無視してよいのである．

テンソル場にも単位系を与えることができる．恣意的に単位を与えることもできるが，もちろん，自然に導入できる単位もある．テンソル場に単位を与えることは，物理的な意味を持たせる，というばかりでなく，検算の役目にもなるのである (下記を見よ).

カー時空において，基準単位 U を，(距離)～(質量)～(時間) なるものとする．ボイヤー－リンキスト座標における座標ベクトル場 ∂_t は，作用素 d/dt ということで，単位は U^{-1} となる．ニュートン力学の公式から，カー・パラメータ a (単位質量あたり

の角運動量) は $a \sim U$ となる．角度と三角関数は，$U/U = U^0$ であるから，無単位である．また，$\Delta = r^2 - 2\mathrm{M}r + a^2$ と $\rho^2 = r^2 + a^2C^2$ の単位は U^2 である．

いくつかの単位を以下に示す．

U^4	$Q \sim \mathcal{K}$(カーター定数)
U^2	Δ, ρ^2, g(計量), $\mathfrak{q} = ds^2$, $g_{\vartheta\vartheta}$, $g_{\varphi\varphi}$, L
U^1	M, a, r, t, $g_{t\varphi}$, E, V(標準ベクトル場), τ(固有時)
U^0	ϑ, φ, ∂_ϑ, ∂_φ, g_{rr}, g_{tt}, W, $\Omega^i{}_j$, $C = \cos\vartheta$, $S = \sin\vartheta$
U^{-1}	∂_r, ∂_t
U^{-2}	断面曲率，ガウス曲率

したがって，例えば，補題 2.1 の (m3) 式は $ag_{\varphi\varphi} + (r^2 + a^2)g_{t\varphi} = \Delta S^2$ **ではない**，とすぐに分かるのである．

パラメータを簡単にするように単位を変えることもできる．その例が第 4 章にある．第 4 章では，質点 $\mathfrak{q} = -m^2$ を $\mathfrak{q} = -1$ として計算した．このようにしても軌道は変わらないが，第 1 積分の単位は変化する．例えば，エネルギー E は，単位あたりのエネルギー (比エネルギー) ということで無単位になる．すなわち，$E \sim U^0$, $L \sim U^1$, $Q \sim \mathcal{K} \sim U^2$ となる．

さらに簡潔にするならば，ブラックホールの質量 M を 1 とすることもできる．$m = \mathrm{M} = 1$ を幾何単位系の基準単位にするわけである．例えば命題 4.3.7 の

$$R(r) = (E^2 - m^2)r^4 + 2\mathrm{M}m^2r^3 + [a^2(E^2 - m^2) - L^2 - Q]r^2 \\ +2\mathrm{M}[Q + (L - aE)^2]r - a^2Q$$

を考える．これを $m^2\mathrm{M}^4$ で割り，

$$\boldsymbol{a} = a/\mathrm{M}, \quad \boldsymbol{r} = r/\mathrm{M}, \quad \boldsymbol{E} = E/m, \quad \boldsymbol{L} = L/(m\mathrm{M}), \quad \boldsymbol{Q} = Q/(m^2\mathrm{M}^2)$$

と置くと (これらは無単位である)

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{E}^2 - 1)\boldsymbol{r}^4 + 2\boldsymbol{r}^3 + [\boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{E}^2 - 1) - \boldsymbol{L}^2 - \boldsymbol{Q}]\boldsymbol{r}^2 \\ +2[\boldsymbol{Q} + (\boldsymbol{L} - \boldsymbol{aE})^2]\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{Q}$$

となる．このように置く方が長い計算を行うときには便利である．数値計算で例を検討する場合に使われる．しかしながら本書では，混乱を避けるため，$\mathrm{M} = 1$ は採用していない．

付録B

微分形式

滑らかな多様体上に与えられた**次数** (degree) p の**微分形式** (differential form) θ とは，階数 p の歪対称共変テンソル場である，というのが古典的な定義である．したがって，θ を，適当なベクトル・バンドルの断面と考えてもよい．多様体 M において微分形式の一般論を展開するならば次数 p は $p \le \dim M$ であるが，本書で必要となるのは $p \le 2$ の場合である．ここではこの範囲で簡単に概略を述べるだけにする (だからと言って，本書での必要性が薄いわけではない)．詳しくは，Abraham, Marsden and Ratiu (1983), Wald (1984) 等を見よ．以下，微分形式は滑らか，つまり C^∞ クラスであるとする．

- 0 次の微分形式とは，M 上の (滑らかな) 実数値関数 f である．
- 1 次の微分形式とは (1.1 節で定義したように), M 上の 〈コベクトル〉 である．

特に 1 形式は，滑らかな関数が作る環 $\mathfrak{F}(M)$ 上の加群 $\mathfrak{X}^*(M)$ である．微分形式上には 2 つの写像が定義される．**楔積** (wedge product) $\wedge$ と**外微分** (exterior derivative) d である．

- 0 形式 f と 1 形式 ω の楔積は $f\omega$ である．
- 2 個の 1 形式の楔積は，任意のベクトル v, w に関して

$$(\theta \wedge \phi)(v, w) = \begin{vmatrix} \theta(v) & \theta(w) \\ \phi(v) & \phi(w) \end{vmatrix}$$

で定義する．(楔積の定義には，係数 1/2 を付けるものと付けないものがある．本書では，付けない定義を採用した.) 1 形式どうしの楔積では $\theta \wedge \phi = -\phi \wedge \theta$ が成立する．したがって $\theta \wedge \theta = 0$ である．

- 0 形式 f の外微分は，f の微分 df である．
- 1 形式 ω の外微分は，ベクトル場 X, Y に関し

$$(d\omega)(X, Y) = X(\omega Y) - Y(\omega X) - \omega([X, Y])$$

で定義される 2 形式である．

外微分には

$$d(\text{定数}) = 0, \quad d(f+g) = df + dg, \quad d(fg) = g\,df + f\,dg,$$
$$d(F(f)) = F'(f)\,df$$

なる性質がある．

さらに

$$d(\omega + \theta) = d\omega + d\theta, \quad d(f\omega) = df \wedge \omega + f\,d\omega, \quad d(df) = 0$$

なる性質があるが，これは容易に証明できる．

1.1 で述べたように，1 形式 ω を座標系 $(x^1, \ldots, x^n)$ で表すと $\omega = \Sigma f_i\,dx^i$ となる．ここに $f_i = \omega(\partial_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ である．したがって，$d(dx^i) = 0$ であるから

$$d\omega = \Sigma\, d(f_j dx^j) = \Sigma\, df_j \wedge dx^j = \Sigma\,(\partial f_j/\partial x^i)\,dx^i \wedge dx^j$$

となる．そして，楔積は歪対称であるから

$$d\omega = \sum_{i<j} (\partial f_j/\partial x^i - \partial f_i/\partial x^j)\,dx^i \wedge dx^j$$

を得る．

これらの性質をより高い次数 p の場合へ拡張するのは簡単であるが，順列の個数だけ添字が表れるので，計算は煩雑になる．

第 2 章で，次のような 3 次の微分形式が必要となる所がある．n 次元擬リーマン多様体において，ゼロとならないベクトル場 V が**超曲面直交** (hypersurface-orthogonal) であるとは，$(n-1)$ 次元の分布 $V^\perp$ が積分可能となることである．この条件は，V の計量に関して双対な量 θ で明示することができる．(θ は，任意のベクトル y に関して $\theta(y) = < V, y >$ を満たす 1 形式である．古典的な言い方では，V の反変成分 V^i の添字を下げたものが θ_i である.)

補題　ベクトル場 V が超曲面直交であるための必要十分条件は，V の計量に関して双対な量 θ が $\theta \wedge d\theta = 0$ を満たすことである．

この事実はフロベニウスの定理 (1.7 節) から分かる．

付録C

カーター定数

4.2 節では，極平面という特別な場所においてカーター定数を定義した．ここでは，同様な方法を一般の場合に適用する．カー測地線の ϑ 式に関するラグランジ形式をボイヤー－リンキスト座標 で表すと $(\rho^2\vartheta')' = \mathrm{I} + \mathrm{II}$ となる．ここに，

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2}\left[\partial_\vartheta g_{rr} r'^{\,2} + \partial_\vartheta g_{\vartheta\vartheta}\vartheta'^{\,2}\right],$$
$$\mathrm{II} = \frac{1}{2}\partial_\vartheta g_{tt} t'^{\,2} + \partial_\vartheta g_{t\varphi} t'\varphi' + \frac{1}{2}\partial_\vartheta g_{\varphi\varphi}\varphi'^{\,2},$$

である．最初の項 I は，極平面の場合と同じである．つまり $-a^2SC(r'^{\,2}/\Delta + \vartheta'^{\,2})$ となる．前と同様に，補題 4.2.1 から導かれる第 1 積分 $\mathfrak{q} = ds^2$ を用いて r' を消去すると，

$$\mathrm{I} \; = -\rho^{-4}a^2SC[\mathfrak{q}\rho^2 + \mathbb{P}^2/\Delta - \mathbb{D}^2/S^2]$$

を得る．

次の項 II は (極平面の場合では存在しない), 処理しやすい項ではない．しかし，命題 4.1.5 を使えば，微分 φ' と t' を r, ϑ に置き換えることができる．いま，$\mathrm{II} = \mathcal{A}t' + \mathcal{B}\varphi'$ として

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}[\partial_\vartheta g_{tt} t' + \partial_\vartheta g_{t\varphi}\varphi'], \quad \mathcal{B} = \frac{1}{2}[\partial_\vartheta g_{t\varphi} t' + \partial_\vartheta g_{\varphi\varphi}\varphi']$$

と書く．これらの項をそれぞれ偏微分する代わりに，補題 2.1.1 の計量恒等式 (m3), (m4) を微分すると，

$$(r^2 + a^2)\partial_\vartheta g_{tt} + a\partial_\vartheta g_{t\varphi} = 0 \tag{C.1}$$

$$(r^2 + a^2)\partial_\vartheta g_{t\varphi} + a\partial_\vartheta g_{\varphi\varphi} = 2a\Delta SC \tag{C.2}$$

を得る．$\mathcal{A}$ に (C.1) を，$\mathcal{B}$ に (C.2) を使うと，それぞれ偏微分が 1 つ消え，

$$\mathcal{A} = (1/2a)\partial_\vartheta g_{tt}[at' - (r^2 + a^2)\varphi']$$
$$\mathcal{B} = (1/2a)\partial_\vartheta g_{t\varphi}[at' - (r^2 + a^2)\varphi'] + \Delta SC\varphi'$$

となる．共通項 $[at' - (r^2 + a^2)\varphi']$ は，補題 4.1.4 より $-\mathbb{D}/S^2$ となる．したがって，

$$\mathrm{II} \ = \mathcal{A}t' + \mathcal{B}\varphi' = -\mathbb{D}/(2aS^2)[\partial_\vartheta g_{tt} t' + \partial_\vartheta g_{t\varphi}\varphi'] + \Delta SC{\varphi'}^2$$

である．これの t', φ' に命題 4.1.5 を代入する．大括弧の部分に (C.1) を使い

$$T = \mathbb{D}/(S^2\rho^2)[aS^2\partial_\vartheta g_{tt} + \partial_\vartheta g_{t\varphi}]$$

となる．しかるに，計量恒等式の (m2) を微分して

$$aS^2\partial_\vartheta g_{tt} + \partial_\vartheta g_{t\varphi} + 2aSCg_{tt} = -2aSC$$

であるから，

$$\begin{aligned} T &= -\mathbb{D}/(S^2\rho^2)2aSC(1 + g_{tt}) = -\mathbb{D}/(S^2\rho^2)2aSC(2\mathrm{M}r/\rho^2) \\ &= -4\mathrm{M}arSC\mathbb{D}/(S^2\rho^4) \end{aligned}$$

を得る．これらを II の式に代入して

$$\begin{aligned} \mathrm{II} \ &= \mathcal{A}t' + \mathcal{B}\varphi' = -\mathbb{D}/(2aS^2)\left[-4\mathrm{M}arSC\mathbb{D}/(S^2\rho^4)\right] \\ &\qquad + \Delta SC\left[\Delta^{-1}a\mathbb{P}/\Delta + S^{-2}\mathbb{D}\right]^2/\rho^4 \\ &= 2\mathrm{M}r\rho^{-4}S^{-3}C\,\mathbb{D}^2 + \rho^{-4}SC[\Delta^{-1}a^2\mathbb{P}^2/\Delta + 2aS^{-2}\mathbb{P}\mathbb{D} + \Delta S^{-4}\mathbb{D}^2] \end{aligned}$$

となる．I と II の和を作ると，$\mathbb{P}^2$ が消えるから

$$\begin{aligned} \mathrm{I} \ + \ \mathrm{II} &= \mathbb{D}^2\rho^{-4}S^{-3}C[2\mathrm{M}r + \Delta + a^2S^2] + 2\mathbb{P}\mathbb{D}aS^{-1}C\rho^{-4} - \mathfrak{q}a^2\rho^{-2}SC \\ &= \mathbb{D}\rho^{-4}S^{-3}C[\mathbb{D}(r^2 + a^2 + a^2S^2) + 2aS^2\mathbb{P}] - \mathfrak{q}a^2\rho^{-2}SC \end{aligned}$$

となる．また，$\mathbb{P}$ と $\mathbb{D}$ の定義から $\mathbb{P} + a\mathbb{D} = E\rho^2$ であるから，上式の大括弧の部分は

$$\mathbb{D}(r^2 + a^2 + a^2S^2) + 2aS^2[-a\mathbb{D} + E\rho^2] = \rho^2[\mathbb{D} + 2aS^2E]$$

である．よって ρ^2 を掛けて

$$\rho^2(\rho^2\vartheta')' = \rho^2(\mathrm{I} \ + \mathrm{II}) = \mathbb{D}S^{-3}C[\mathbb{D} + 2aS^2E] - \mathfrak{q}a^2SC$$

を得る．この右辺は ϑ の関数であるから，極平面の場合と同様に，この方程式は微分可能である．ゆえに $d\mathbb{D}/d\vartheta = -2aESC$ なる関係式を使うと

$$\rho^2(\rho^2\vartheta')' = S^{-4}[\mathbb{D}^2SC - S^2\mathbb{D}\,d\mathbb{D}/d\vartheta] - \mathfrak{q}a^2SC$$

である．そして $d(\mathbb{D}^2/S^2)/d\vartheta = 2S^{-4}[S^2\mathbb{D}\,d\mathbb{D}/d\vartheta - \mathbb{D}^2SC]$ であるから

$$2(\rho^2\vartheta')(\rho^2\vartheta')' = -(\mathbb{D}/S^2)' - 2\mathfrak{q}a^2SC\vartheta'$$

を得る．ゆえに

$$\rho^4\vartheta'^{\,2} = -\mathbb{D}/S^2 + \mathfrak{q}a^2C^2 + \mathcal{K}$$

となる．4.2 節で述べたように，これらの方程式は一方から一方が出るから，定理 4.2.2 の証明は完了する．

他の微分についても研究が進んでいる．例えば，カーターのハミルトン作用素による研究 (Carter 1968), ニューマン－ペンローズ技法を使う方法 (Walker and Penrose 1970) 等がある．

付録D

外積

V を，実数上 (ちなみにこの仮定は本質的ではない) の n 次元ベクトル空間とする．整数 p ($0 \le p \le n$) に対し，ベクトル空間 $\Lambda^p(V)$ を，V の p 次**外積** (exterior product) と呼ぶ．すなわち，p 個のベクトルから作った楔積 $v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots, \wedge v_p$ の全体が作る集合を $\Lambda^p(V)$ とするのである．ここに，**楔積** (wedge product) は，双線形で結合律を満たし，交代 (つまり $w \wedge v = -v \wedge w$) である．特に，$\Lambda^0 V = R, \Lambda^1 V = V$ とする．ここでは，$\Lambda^p(V)$ に関する 2 つの性質を述べておく．これは，$\Lambda^p(V)$ を特徴づけるものであり，第 5 章で必要となるものでもある．詳しくは，Abraham, Marsden and Ratiu (1983), Bishop and Goldberg (1980), Warner (1983) 等を見よ．

普遍写像定理　いま $V \times \ldots \times V$ (p 個) からベクトル空間 W への，歪対称，多重線形写像を A とする．このとき，$v_1, v_2, \ldots, v_p \in V$ に対して $\ell(v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_p) = A(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ を満たす線形変換 $\ell\colon \Lambda^p(V) \to W$ が一意に存在する．

一般に，$\Lambda^p(V)$ の元を p **ベクトル** (p-vector) と呼ぶ．とくに，2 ベクトルを 2 重ベクトルと呼び，$\Lambda^1(V) = V$ ならば 1 ベクトルで，もちろんこれは，普通のベクトルである．

楔積 $\wedge$ は交代であるから，$v \wedge v = 0$ となる．これから，1 形式の場合と同様に，〈重複があるとゼロ〉という性質が出てくる．つまり，$v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots, \wedge v_p$ の中に同じベクトルがあれば，この式はゼロとなるのである．

標準基底　いま $\{e_1, \ldots, e_n\}$ を V の基底とする．このとき，p ベクトル $e_{i_1} \wedge \ldots e_{i_p}$, ($1 \le i_1 < \ldots, < i_p \le n$) の全体は $\Lambda^p(V)$ の基底となる．これを $\Lambda^p(V)$ の**標準基底** (canonical basis) と呼ぶ．

すなわち，$\Lambda^p(V)$ の次元は ${}_nC_p$ となる．特に，$\Lambda^n(V)$ は 1 次元で，その基底は $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$ である．外積に関するいろいろな性質の基本となるのが次の 2 つの性質

である．

性質 1　V のベクトル $v_1, v_2, \ldots, v_p$ が 1 次独立であるための必要十分条件は，$v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_p \neq 0$ となることである．

証明　もし $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ が 1 次独立ならば，これは V の基底の一部である．よって，$v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_p$ は (必要なら順序を整理して)$\Lambda^p(V)$ の標準基底の一部となり，ゼロにはならない．一方，$\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ が 1 次従属ならば，$v_p = \Sigma_{i<p} c_i e_i$ と書くことができる．これを $v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_p$ に代入すれば，同じベクトルの繰り返しが出てくるから $v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_p = 0$ となる．□

性質 2　いま $0 \neq v \in V$ で，α は，$v \wedge \alpha = 0$ を満たす p ベクトルとする．このとき $(p-1)$ ベクトル γ で，$\alpha = v \wedge \gamma$ を満たすものが存在する．

証明　V の基底を $\{v, e_2, \ldots, e_n\}$ とし，これから作られる標準基底で α を表示する．仮定 $v \wedge \alpha = 0$ より，p ベクトルを作る基底の中に v が含まれていることが分かる．その v を除いたものが求める γ である．□

p ベクトル α が，V のベクトルを用いて $v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_p$ と表示できるとき，α は**分解可能** (decomposable) である，と呼ぶ．このことを幾何学的に見れば，$v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_p$ は空間 V の平行多面体であり，その各辺がベクトル $v_1, v_2, \ldots, v_p$ なのである．

楔積は，自然な方法で，ベクトルから p ベクトルへ拡張できる (普遍写像定理を 2 回使用すればよい)．そして，ベクトルにおける楔積の交代性から，$\alpha \in \Lambda^p(V)$，$\beta \in \Lambda^q(V)$ に対して $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$ が成立することが分かる．つまり，**歪可換** (anticommutativity) なのである．例えば，2 重ベクトルは全ての p ベクトルと可換となる．

性質 3　2 重ベクトル β が分解可能である必要十分条件は $\beta \wedge \beta = 0$ である．

証明　明らかに，分解可能ならば与式が成立することが分かる．逆を，$n = \dim V \leq 4$ の場合について証明する．先ず，$n \leq 3$ の場合に，任意の 2 重ベクトル α は $\alpha \wedge \alpha = 0$ を満たし，ゆえに分解可能であることを示す．$n < 3$ の時は明らかである．$n = 3$ のとき，α を標準基底で表すと $\alpha \wedge \alpha = 0$ である．いま，V から $\Lambda^3 V \approx R$ への写像

$x \to x \wedge \alpha$ を考えると，これは線形であるから，$x \wedge \alpha = 0$ を満たす x が存在する．よって性質 2 より，α は分解可能である．

次に $n = 4$ とする．V の基底を $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ と置き，$\beta = e_0 \wedge x + \alpha$ と書く．ここに α は e_0 を含んでいない項とする．この α は，$W = \mathrm{Span}\{e_1, e_2, e_3\}$ として，$\Lambda^2 W$ に含まれるから，分解可能である．よって，$\alpha = v \wedge w$ と書ける．しかるに，$0 = \beta \wedge \beta = e_0 \wedge x \wedge v \wedge w$ であるから，これらのベクトルは 1 次従属である．よって，β は，$\dim U \leq 3$ として，$\Lambda^2 U$ に含まれる．したがって分解可能であることが分かる．□

性質 4　分解可能な 2 重ベクトル $\delta = 0$ は 2 次元平面 $P(\delta)$ を一意に決定する．すなわち，$\delta = v \wedge w$ とするとき $P = \mathrm{Span}\{v, w\}$ となる．

証明　$x \wedge y = v \wedge w$ が成立するとき，$\mathrm{Span}\{x, y\} = \mathrm{Span}\{v, w\}$ となることを示せばよい．$v \wedge w$ はゼロでないから，$\{v, w, e_3, \ldots, e_n\}$ を V の基底とすることができる．もし x が $\mathrm{Span}\{v, w\}$ に含まれないならば，この基底で x を表すと，ベクトル e_j, ($j \geq 3$) を含むことになる．しかるに $x \wedge v \wedge w \neq 0$ は，$x \wedge x \wedge y = 0$ に反する．
□

ゼロでない 2 個の分解可能な 2 重ベクトル β, δ が 1 次従属 (つまり $\beta = c\delta$) となる必要十分条件は $P(\beta) = P(\delta)$ である．

いま $P(\delta)$ 内のゼロでないベクトルを x とすると，ベクトル $y \in P(\delta)$ が存在し，$\delta = v \wedge w$ となる．実際，$\delta = v \wedge w$ ならば $x = av + bw$ となる．この係数の少なくとも 1 個はゼロでないから，$a \neq 0$ とすると，$y = w/a$ として $x \wedge y = v \wedge w$ となる．

性質 5　分解可能な 2 重ベクトル β と δ が $\beta \wedge \delta = 0$ を満たすなら，1 個のベクトルを共有する．すなわち，ベクトル u, v, w が存在し，$\beta = u \wedge v$, $\delta = u \wedge w$ となる．

証明　いま $\beta = v \wedge w$, $\delta = x \wedge y$ と置く．もし $P(\beta) \cap P(\delta) = 0$ ならば，ベクトル v, w, x, y は独立であり，$\beta \wedge \delta \neq 0$ となる．これは不可能である．もし $P(\beta) = P(\delta)$ ならば，x と y は v と w の 1 次結合になっている．よって，$x \wedge y = c(v \wedge w)$ で $\delta = v \wedge (cw)$ である．最後に，$P(\beta) \cap P(\delta)$ が 1 次元の場合を調べる．つまり Ru であるとする．このときは，前に述べたように，ベクトル $v \in P(\beta)$, $w \in P(\delta)$ により $\beta = u \wedge v$, $\delta = u \wedge w$ となる．□

楔積の交代性により，正方行列の行列式に関する古典的な公式が導かれる．

性質 6　ベクトルを $v_i = \Sigma A_{ij} w_j$ ($1 \leq i, j \leq q$) と書くと

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_q = (\det A) w_1 \wedge \ldots \wedge w_q$$

が成立する．

よって例えば，分解可能な 2 重ベクトル δ は，2 次元の部分空間 P を定める (性質 4) ばかりでなく，それの向きも決定するのである．すなわち，δ が $v \wedge w$ の正数倍で書けるとき，$\{v, w\}$ が作る基底を正の向きとする．もちろん，この性質は p ($p \leq \dim V$) 次元の部分空間へ拡張することができる．

本書で言及している 4 次元の多様体 M でいえば，連続した 4 ベクトル場 ω が存在するとき，向き付け可能である，と呼ぶわけである．各点 $p \in M$ の基底 $\{e_0, \ldots, e_3\}$ に対して $e_0 \wedge \ldots \wedge e_3 = \omega_p$ として，これが空間全体に定義できるとき，ω を正の向きとするのである．性質 6 より，(向き付けられた) 時空間の微分同相写像は，ある点におけるヤコビ行列の行列式が正ならば，向き付けを保存することが分かる．行列式が負ならば向き付けは逆になるのである．時空は (定義から) 連結で行列式はゼロにならないから，1 点で正ならば任意の点で正なのである．

記号表

各記号に添付した数字は，初出の章と節である．常識的な記号（例えば，多様体の M ）や，本全体に関わらない記号は省いてある．

本書全体を通して $S = \sin\vartheta, C = \cos\vartheta$ が使われている．ニューマン－ペンローズ技法における記号の使い方（5.7 節から 5.10 節まで）は，他の部分とやや異なっている．

a：単位質量あたりの角運動量	2.1
A：カー時空の軸	2.3
β：逆方向等長変換	3.1
$C = \cos\vartheta$	2.1
$C, \mathbb{C}$：ワイル・テンソル	5.1
C：縮約	1.2
$\mathbb{D} = L - aES^2$	4.1
$\Delta = r^2 - 2\mathrm{M}r + a^2$：地平面関数	2.1
$\mathcal{D}(r_\pm)$：クルスカル領域	3.3
E：測地線のエネルギー	4.1
$e = E^2 + \mathfrak{q}$：有効エネルギー	4.7
ϵ：赤道等長変換	2.3
Eq：赤道平面	2.3
$\mathcal{E}$：エルゴ球	2.4
H：カー時空の地平面	2.5
$\mathbb{H}$：長い地平面	3.3
$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\ell}$：零的ベクトル場	5.7
$K(\Pi)$：Π の断面曲率	1.3
K：カー時空	2.3
K^*：カー・スター時空	2.5

$^*K$：スター・カー時空	3.1
$\mathcal{K}$：カーター定数	4.2
L：軸の周りの角運動量	4.1
Λ：零的円錐	1.5
$\Lambda^2 = \Lambda^2 V$：外積	付録 D
M_f, M_e, M_s：最大カー時空	3.1, 3.2, 3.5
m：粒子の質量	1.6
M：カー時空の質量	2.1
μ：はり合わせ写像	1.4
∇：共変微分	1.3
I, II, III：ボイヤー－リンキスト・ブロック	2.2
ω, Ω：カーター形式	1.8
$\Theta = \Theta(\vartheta)$：$\vartheta$－方程式における関数	4.2
Π：平面，主要平面	2.5
$P_{\mathrm{I}}, P_{\mathrm{II}}, P_{\mathrm{III}}$：極平面	2.3
$\mathbb{P} = (r^2 + a^2)E - La$	4.1
$\phi(r)$：判別式	4.7
Φ：有効ポテンシャル	4.11, 4.13
$\mathfrak{q} =< \gamma', \gamma' >$	4.1
Q：カーター定数	4.2
r, ϑ, φ, t：ボイヤー－リンキスト座標	2.1
$r_\pm$：地平面半径	2.2
R：リーマン曲率テンソル	1.3
Ric：リッチ曲率テンソル	1.3
$R(r)$：r－方程式の多項式	4.2
$\rho^2 = r^2 + a^2 C^2$	2.1
Σ：リング状特異領域	2.2
$S = \sin\vartheta$	2.1
$\boldsymbol{S}(r_\pm)$：交叉球	3.3
$S^2\langle r\rangle$：ファイバー球	3.6
T：咽喉	2.3
$\mathfrak{T}$：タイムマシン	2.4
V, W：標準ベクトル場	2.1

参考文献

Abraham, R., J. E. Marsden, and T. Ratiu, 1983. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, Addison-Wesley, Reading, MA.

Ashtekar, A., and R. O. Hansen, 1978. A Unified Treatment of Null and Spatial Infinity in General Relativity I, J. Math. Phys. 19, 1542-1566.

Bardeen, J. M., 1975. Timelike and null geodesics in the Kerr metric, in *Black Holes, ed.* by C. DeWitt and B. S. DeWitt, Gordon and Breach, New York.

Beem, J. K., and P. E. Ehrlich, 1981. *Global Lorentzian Geometry*, Dekker, New York.

Bishop, R. L., and S. Goldberg, 1980. *Tensor Analysis on Manifolds*, Dover, New York.

Boyer, R. H., and R. W. Lindquist, 1967. Maximal analytic extension of the Kerr metric, J. Math. Phys. 8, 265-281.

Brans, C. H., 1975. Some restrictions on algebraically general vacuum metrics, J. Math. Phys. 16, 1008-1010.

Carter, B., 1968. Global structure of the Kerr family of gravitational fields, Phys. Rev. 174, 1559-1571.

Carter, B., 1973. Properties of the Kerr metric, in *Black Holes*, ed. by C. DeWitt and B. S. DeWitt, Gordon and Breach, New York.

Chandrasekhar, S., 1983. *The Mathematical Theory of Black Holes*, Oxford Univ. Press, Oxford, England.

Choquest-Bruhat, Y., C. DeWitt-Morette, and M. Dillard-Bleick, 1977. *Analysis, Manifolds, and Physics,* North Holland, Amsterdam.

Debever, R., 1958. La super-énergie en relativité général,Bull. Soc. Math. Bleg. 10, 112 -147.

de Felice, F., 1968. Equatorial Geodesic Motion in the Gravitational Field of a Rotating Source, Nuovo Cim. B57, 351-388.

de Felice, F., 1972. Orbital and Vortical Motion in the Kerr Metric, Nuovo Cim. 10 B, 447-458.

Dodson, C. T. J., and T. Poston, 1991. *Tensor Geometry*, 2nd ed, Springer, New York.

Eisenhart, L. P., 1926. *Riemannian Geometry*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ.

Ellis, G. F. R., and B. G. Schmidt, 1977. Singular Spacetimes, Gen. Rel. Grav. 8, 915-953.

Geroch, R. P., 1970. Singularities, in *Relativity*, ed. by S. Fickler, M. Carmeli, and L. Witten, Plenum Press, New York.

Geroch, R. P., A. Held, and R. Penrose, 1973. A space-time calculus based on paris of null directions, J. Math. Phys. 14, 874-881.

Greenberg, M. J., and J. R. Harper, 1981. *Algebraic Topology*, Benjamin/Cummings, Menlo Park, CA.

Goldberg, J. N., and R. K. Sachs, 1962. A theorem on Petrov types, Acta. Phys. Polonica 22(Supp. 13), 13-23.

Harpaz, A., 1992, *Concepts of the Theory of Relativity*, Jones and Bartlett, Boston.

Hawking, S. W., and G. F. R. Ellis, 1973. *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, England.

Helgason, S., 1978. *Differential Geometry, Lie Groups, and Sysmmetric Spaces,* Academic Press, New York.

Helliwell, T. M., and A. J. Mallinckrodt, 1975. Null geodesics in the extended Kerr manifold, Phys. Rev. D 12, 2993-3003.

Kerr, R. P., 1963. Gravitational Field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics, Phys. Rev. Lett. II, 237-238.

Kinnersley, W., 1968. Type D vacuum metrics, J. Math. Phys. 10, 1195-1203.

Kobayashi, S., and K. Nomizu, 1963, 1969. *Foundations of Differential Geometry*, vol. 1, Vol. 2, Wiley, New York.

Kramer, D., H. Stephani, E. Herlt, and M. A. H. MacCallum, 1980. *Exact Solutions of Einstein's Field Equations,* Cambridge Univ. Press, Cambidge, England.

Krivenko, O. P., K. A. Pyragas, and I. T. Zhuk, 1976. On the Second Integrals of Geodesics in the Kerr Field, J. Astrophysics and Space Science 40, 39-61,

Kruskal, M. D., 1960. Maximal extension of Schwarzschild metric, Phys. Rev. 119, 1743-1745.

Kundt, W., and A. Thompson, 1962. Le tenseur de Weyl et une congruence associée de géodêsiques isotropes sans distorsion, C. R. Acad. Sci. (Paris) 254, 4257.

Mal'cev, A. I., 1963. *Foundations of Linear Algebra,* Freeman, San Francisco.

Massey, W. S., 1987. *Algebraic Topology: An Introduction,* Springer, New York.

Misner, C. W., K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, 1973. *Gravitation,* Freeman, San Francisco.

Newman, E. T., et al. 1965. Metric of rotating, charged mass, J. Math. Phys. 6, 918-919.

Newman, E. T., and R. Penrose, 1962. An Approach to Gravitational Radiation by a Method of Spin Coefficients, J. Math. Phys. 3, 566-578; errata, 4,998.

O'Neill, B., 1966. *Elementary Differential Geometry* , Academic Press, New York.

O'Neill, B., 1983. *Seni-Riemannian Geometry,* Academic Press, New York.

Pais, A., 1982. *Subtle is the Lord: The Science and Life of Albert Einstein,* Oxford Univ. Press, Oxford, England.

Penrose, R., 1969. Gravitational collapse: The role of general relativity, Nuovo Cim. 1, 252-271.

Petrov, A. Z., 1954. Sci. Trans. Kazan State Univ. 114, book 8, 55-69. This paper is summarized in Thorpe, 1969.

Pirani, F. A. E., 1962. Gravitational Radiation, in *Gravitation: An Introduction to Current Research.* ed. by L. Witten, Wiley, New York.

Redheffer, R., 1991. *Differential Equations: Theory and Applications,* Jones and Bartlett, Boston.

Robinson, D. C., 1977. A Simple Proof of the Generalization os Israel's Theorem, Gen. Rel. Grav. 8, 695-698.

Robinson, I, and A. Schild, 1962. Generalization of a theorem by Goldberg and Sachs, J. Math. Phys. 4, 484.

Sachs, R. K., 1962. Gravitational Waves in General Relativity VI: The Outgoing Radiation Condition, Proc. Roy. Soc. London A 264, 309-337 (1961), ibid. 270, 103-126.

Sachs, R. K., 1964. Gravitational Radiation, in *Relativity, Groups, and Topology,* ed, by DeWitte and DeWitt, Gordon and Breach, New York.

Sachs, R. K., and H. Wu, 1977. *General Relativity for Mathematicians,* Springer, New York.

Sharp, N. A., 1979. Geodesics in black hole space-times, Gen. Rel. Grav. 10, 659-670.

Stewart, J. M., and M. Walker, 1973. *Black Holes: The Outside Story,* Springer Tracts in Modern Physics, vol 69, Springer, Berlin.

Steenrod, N., 1951. *Topology of Fibre Bundles,* Princeton Univ. Press, Princeton, NJ.

Stoghianidis, E. and D. Tsoubelis, 1987. Polar Orbits in the Kerr Space-Time, Gen. Rel. Grav. 19, 1235-1249.

Thorpe, J. A., Curvature and the Petrov Canonical Forms, J. Math. Phys. 10, 1-7.

Tipler, F. J., C. J. S. Clark, and G. F. R. Eillis, 1980, Singularities and Horizons, In *General Relativity and Gravitation: one hundred years after the birth of Albert Einstein,* vol. 2, ed. by A. Held, Plenum Press.

Vishveshvara, C. V., 1968. Generalization of the Schwarzschild Surface to arbitrary static and stationary Metrics, J. Math. Phys. 9, 1319-1322.

Wald, R., 1984. *General Rlativity,* Univ, Chicago Press, Chicago, IL.

Walker, M, and R. Penrose, 1970. On Quadratic First Integrals of the Geodesic Equuations for Type [22] Spacetimes, Commun. Math. Phys. 18, 265-274.

Warner, F., 1983. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups,* Springer, New York.

Wilkins, D. C., 1972. Bound Geodesics in the Kerr Metric, Phys. Rev. D 5, 814-822.

参考書補足

原著の文献表に並んでいる書籍は，微分幾何学，相対性理論，宇宙論，それぞれの分野で代表的なものであるが，横文字のため，初学者には敷居が高いかもしれない(Steenrod の *Topology of Fibre Bundles* は翻訳がある．大口邦雄訳：ファイバー束のトポロジー (吉岡書店，1976))．ここでは，日本語の参考書を幾つか補足しておく．

ブラックホールに関する入門書としては：

[1] ロバート・ケロッグ著，山岸賢吾訳：一般相対性理論入門 (講談社 ブルーバックス 1986)

[2] 冨松彰：ブラックホールと時空 (共立出版 モダン・スペース・アストロノミー シリーズ 1985)

[3] 江里口良治：時空のゆがみとブラックホール (培風館 ニューコスモス シリーズ 1992)

[4] R. ルフィーニ，佐藤文隆：ブラックホール (中央公論 自然選書 1976)

[1] は，いわゆる相対性理論の入門書であるが，凡百の本とは異なる特徴がある．たいていの本では，マイケルソン・モーレーの実験から話を始め，時間の同時性の解説に頁を使い，そして読者は混乱してしまうことが多い．ところがこの本では，最初から多様体としての時空を前面に出して解説を統一している．幾何学として時空を図解しているので実に分かりやすい．[2], [3] はブラックホールの概説書である．この分野を概観するには便利な本といえる．[4] は，入門書と呼ぶには語弊があるかもしれないが，ブラックホールを〈本格的に〉総覧した良書である．

相対性理論を意識した微分幾何学の本として：

[5] 朝長康郎：リーマン幾何学入門 (共立出版 共立全書 1970)

[6] 野水克己：現代微分幾何入門 (裳華房 基礎数学選書 1981)

[7] シュッツ著，家正則，二間瀬敏史，観山正見訳：物理学における幾何学的方法 (吉岡書店 物理学叢書 1987)

[8] 矢野健太郎：相対性理論 (至文堂 近代数学新書 1963)

[5] は，微分幾何学の全般的な入門書であり，相対性理論にも言及されている．[6] は，ローレンツ計量を始めとして現代的な話題が豊富である．[7] は物理学者が書いた幾何学の本であり，物理を例として幾何学を勉強するには格好の本である．数学者の書いた [5], [6] と読み比べるのも面白いであろう．[8] は，逆に，数学者が書いた相対性理論である．もちろん，微分幾何学の入門書としても素晴らしいものである．

本格的な相対性理論の本として：

[9] 内山龍雄：一般相対性理論 (裳華房 物理学選書 1978)

[10] 佐藤文隆，小玉秀雄：一般相対性理論 (岩波書店 岩波講座 現代の物理学 1992)

両方とも，微分幾何学を用いて相対論を展開した標準的教科書である．[9] は昔から定評のある本である．[10] は，数学的側面を強調した読みやすいものに仕上がっている．

当然の事ながら，ここでは，数学の方面から相対性理論，ブラックホールに向かう，という角度で気が付いた本の一部を取り上げたにすぎない．微分幾何学，相対性理論，どちらの分野でも多数の良書が出版されている．上記の本を参考に，あるいは書店を巡って，自分の勉強に最適で長く愛読できる本をいろいろと探していただきたい．

なお，上記の中には絶版になっているものもあるが，大学の図書館ならば備えている筈である．

索　　引

か 行

さ　行

た 行

な 行

は 行

ま　行

や　行

ら　行

わ　行

著者略歴

Barrett O'Neill（バレット オニール）
MIT 卒業．1951年 Ph. D.を取得
現　在　UCLA名誉教授
専　攻　微分幾何学、相対性理論
著　書　Semi-Riemannian Geometry
(Academic Press 1966)
Elementry Differential Geometry
(Academic Press 1983)

訳者略歴

井川俊彦（いかわ　としひこ）
1982年　東京理科大学大学院理学研究科修了
現　在　日本大学医学部助教授　理学博士
専　攻　微分幾何学

カー・ブラックホールの幾何学

1996年12月20日 初版第1刷発行

原著者　バレット オニール
訳　者　井川俊彦
発行者　関野　元
発行所　株式会社トッパン
〒104 東京都中央区八重洲2-2-7
トッパン八重洲ビル
TEL(03) 3276-8191(代表)
FAX(03) 3276-5446
装幀・菊池　薫
印刷／製本・東京書籍印刷株式会社

The Geometry of Kerr Black Holes
by
Barrett O'Neill

Original English language edition published by
A K Peters, Ltd. © 1995

Printed in Japan　ISBN 4-8101-8946-5